ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, №5, 1975 Механика

Г. Б. ВЕРМИШЯН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛАСТИНКЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ ВЯЗКО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано нагружение бесконечной пластинки из вязко-упругого материала с эллиптическим отверстием. Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающее напряжение, действующее в направлении малой оси эллипса, и меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой. Кроме того, рассматривается случай всестороннего растяжения пластинки.

Для установления связи между деформациями и напряжениями, возникающими в пластинке, необходимо знать составляющие так называемой комплексной податливости.

Известно [1], что составляющие комплексной податливости существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем.

Задача решена при условии, что температура на контуре отверстия равна температуре окружающей среды, а на боковой поверхности происходит свободная теплоотдача в окружающую среду по направлению нормали к плоскости пластинки, то есть по направлению оси oz.

Имеет место соотношение $\partial T/\partial z=\alpha(T_0-T)$, где α — коэффициент теплопередачи. Кроме того, предполагается, что температура по толщине пластинки не меняется.

1. *Одностороннее растяжение.* Будем рассматривать деформацию пластинки с эллиптическим отверстием, которая состоит из вязко-упругого материала. На пластинку действует растягивающая нагрузка в бесконечности, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, равной σ_y^0.

Будем полагать, что составляющая комплексной податливости $J''(T,\omega)$ мала по сравнению с $J'(T,\omega)$.

Таким образом, для определения напряженного состояния можно воспользоваться решением упругой задачи о растяжении пластинки с эллиптическим отверстием [2].

При решении задачи воспользуемся отображением внешности эллипса на внешность единичного круга $|\zeta|\geqslant 1$.

Отображение дается формулой

$$z = \omega_1(\zeta) = R(\zeta + \beta/\zeta) \quad (R > 0,\ 0 \leqslant \beta < 1) \tag{1.0}$$

Окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат с полуосями $a = R(1+\beta)$, $b = R(1-\beta)$.

В таком случае компоненты напряжения в полярной системе координат будут

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 \cos\omega t, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta^0 \cos\omega t, \quad \tau_{\rho\vartheta} = \tau_{\rho\vartheta}^0 \cos\omega t \tag{1.1}$$

где

$$\sigma_\rho^0 = -\frac{\sigma_y^0(\rho^2-1)}{2\beta}\left[\frac{\rho^4 + \beta(\rho^2-1)\cos 2\vartheta - \beta^2}{\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\beta)(\rho^2-\beta^2)(\rho^4-\beta^2)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2)^2}\right]$$

$$\sigma_\vartheta^0 = \frac{\sigma_y^0}{2\beta}\left[\frac{(1+2\beta)\rho^4 - (1+\beta^2)\rho^2 - \beta^2(2\beta+3) + \beta(\rho^2+1)^2\cos 2\vartheta}{\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\beta)(\rho^4-\beta^2)(\rho^2-\beta^2)(\rho^2-1)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2)^2}\right]$$

$$\tau_{\rho\vartheta}^0 = -\frac{\sigma_y^0}{2}\left[\frac{\rho^4-1}{\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2} - \frac{2\rho^2(1+\beta)(\rho^2-\beta^2)(\rho^2-1)}{(\rho^4 - 2\beta\rho^2\cos 2\vartheta + \beta^2)^2}\right]\sin 2\vartheta \tag{1.2}$$

Связь между компонентами деформации и напряжения возьмем в виде

$$\varepsilon_\rho = \frac{\sigma_\rho}{E} + \int_{-\infty}^{t} K(T, t-\tau)\,\sigma_\rho(\tau)\,d\tau - \frac{\nu\sigma_\vartheta}{E} - \nu\int_{-\infty}^{t} K(T, t-\tau)\,\sigma_\vartheta(\tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{\sigma_\vartheta}{E} + \int_{-\infty}^{t} K(T, t-\tau)\,\sigma_\vartheta(\tau)\,d\tau - \frac{\nu\sigma_\rho}{E} - \nu\int_{-\infty}^{t} K(T, t-\tau)\,\sigma_\rho(\tau)\,d\tau$$

$$\gamma_{\rho\vartheta} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\rho\vartheta} + 2(1+\nu)\int_{-\infty}^{t} K(T, t-\tau)\,\tau_{\rho\vartheta}(\tau)\,d\tau \tag{1.3}$$

где E — модуль упругости, а ν — коэффициент Пуассона.

Используя из (1.1) значения σ_ρ, σ_ϑ, $\tau_{\rho\vartheta}$ и введя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\varepsilon_\rho = (\sigma_\rho^0 - \nu\sigma_\vartheta^0)\left\{\left[\frac{1}{E} + \mathrm{Re}\int_0^\infty K(T, \zeta)\,e^{-i\omega\zeta}\,d\zeta\right]\cos\omega t - \right.$$

$$-\left[\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta\right]\sin\omega t\Big\}$$

$$\varepsilon_\theta=(\sigma_\theta^0-\nu\sigma_\rho^0)\left\{\left[\frac{1}{E}+\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta\right]\cos\omega t-\right.$$

$$-\left[\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta\right]\sin\omega t\Big\}$$

$$\gamma_{\rho\theta}=2(1+\nu)\,\tau_{\rho\theta}^0\left\{\left[\frac{1}{E}+\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta\right]\cos\omega t-\right.$$

$$-\left[\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta\right]\sin\omega t\Big\}\tag{1.4}$$

Введем комплексную податливость

$$J^*(T,\omega)=\int\limits_0^\infty K(T,\zeta)\,e^{-i\omega\zeta}d\zeta=J'(T,\omega)-iJ''(T,\omega)=$$

$$=J(T,\omega)\cos\varphi_0-iJ(T,\omega)\sin\varphi_0\tag{1.5}$$

где φ_0—сдвиг фаз между деформацией и напряжением.

Учитывая (1.5), из (1.4) получаем

$$\varepsilon_\rho=(\sigma_\rho^0-\nu\sigma_\theta^0)\left\{\left[\frac{1}{E}+J'(T,\omega)\right]\cos\omega t+J''(T,\omega)\sin\omega t\right\}$$

$$\varepsilon_\theta=(\sigma_\theta^0-\nu\sigma_\rho^0)\left\{\left[\frac{1}{E}+J'(T,\omega)\right]\cos\omega t+J''(T,\omega)\sin\omega t\right\}$$

$$\gamma_{\rho\theta}=2(1+\nu)\,\tau_{\rho\theta}^0\left\{\left[\frac{1}{E}+J'(T,\omega)\right]\cos\omega t+J''(T,\omega)\sin\omega t\right\}\tag{1.6}$$

Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, равна

$$W=\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\sigma_\rho\frac{d\varepsilon_\rho}{dt}dt+\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\sigma_\theta\frac{d\varepsilon_\theta}{dt}dt+\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\tau_{\rho\theta}\frac{d\gamma_{\rho\theta}}{dt}dt\tag{1.7}$$

Если теперь использовать (1.1), (1.6) и подставить в (1.7), получим

$$W=\pi J''(T,\omega)\left[(\sigma_\rho^0)^2-2\nu\sigma_\rho^0\sigma_\theta^0+(\sigma_\theta^0)^2+2(1+\nu)(\tau_{\rho\theta}^0)^2\right]\tag{1.8}$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязко-упругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла

$$q=\omega kW/2\pi\tag{1.9}$$

Здесь k—величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ—коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. С целью установления максимального нагрева, будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + f(\rho, \theta)\, J''(T, \omega) = \alpha (T - T_0)\, |\omega_1'(\zeta)|^2 \tag{1.10}$$

где

$$f(\rho, \theta) = \frac{\mu R^2}{2\beta^2 \rho^4 (\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2)} \Big\{ 2\beta^2 [\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta - \beta(\beta + 2)]^2 +$$

$$+ (1 + \nu)(\rho^2 - 1) \Big[(\rho^4 - \beta^2) + \beta(\rho^4 - 1)\cos 2\theta -$$

$$- \frac{(1 - \beta)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^4 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \Big] \Big[(1 + 2\beta)\rho^4 - (1 + \beta^2)\rho^2 - \beta^2 (2\beta + 3) +$$

$$+ \beta(\rho^2 + 1)^2 \cos 2\theta - \frac{(1 + \beta)(\rho^2 - 1)(\rho^2 - \beta^2)(\rho^4 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \Big] +$$

$$+ (1 + \nu)(\rho^2 - 1)^2 \Big[(\rho^2 + 1) - \frac{2\rho^2 (1 + \beta)(\rho^2 - \beta^2)}{\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2} \Big]^2 \sin^2 2\theta \Big\} \tag{1.11}$$

$$\mu = \frac{\omega k (\sigma_y^0)^2}{2ac}, \qquad |\omega_1'(\zeta)|^2 = \frac{R^2}{\rho^4}(\rho^4 - 2\beta\rho^2 \cos 2\theta + \beta^2) \tag{1.12}$$

a—коэффициент теплопроводности, c—теплоемкость.

Граничные условия для температуры T примем следующими:

$$T = T_0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \tag{1.13}$$

то есть температура на контуре отверстия равна температуре окружающей среды.

Кроме того, предполагается, что температура на бесконечности ограничена.

Известно [3], что компоненты комплексной податливости и комплексного модуля связаны соотношением

$$J'(T, \omega) = \frac{E'(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}$$

$$J''(T, \omega) = \frac{E''(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2} \tag{1.14}$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E'(T, \omega)$ и $E''(T, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией, при этом $E'(T, \omega)$ будем считать постоянной

$$E'(T, \omega) = A, \quad E''(T, \omega) = B + CT \tag{1.15}$$

Кроме того, так как обычно $E''(T,\omega) \ll E'(T,\omega)$, то величиной $E''(T,\omega)$ по сравнению с $E'(T,\omega)$ можно пренебречь.

Тогда (1.14) принимает вид

$$J'(T,\omega) = 1/A, \quad J''(T,\omega) = (B+CT)/A^2 \tag{1.16}$$

Подставляя (1.16) в (1.10), вводя новую неизвестную функцию

$$(B+CT)/A = u(\rho,\vartheta) \tag{1.17}$$

получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} - \gamma^2 u = -F(\rho,\vartheta)\,u - \Phi(\rho,\vartheta) \tag{1.18}$$

где

$$\gamma^2 = \alpha R^2$$

$$F(\rho,\vartheta) = \frac{C}{A^2} f(\rho,\vartheta) + \gamma^2\left(\frac{2\beta}{\rho^2}\cos 2\vartheta - \frac{\beta^2}{\rho^4}\right)$$

$$\Phi(\rho,\vartheta) = \frac{\gamma^2(B+CT_0)}{A}\left(1 - \frac{2\beta}{\rho^2}\cos 2\vartheta + \frac{\beta^2}{\rho^4}\right) \tag{1.19}$$

функция $f(\rho,\vartheta)$ дается по формуле (1.11). Согласно (1.13) граничные условия для $u(\rho,\vartheta)$ будут

$$u = (B+CT_0)/A = u_0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \tag{1.20}$$

а на бесконечности $u(\rho,\vartheta)$ ограничена.

Решение уравнения (1.18) при граничном условии (1.20) можно свести к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(\rho_0,\vartheta_0) = \Psi(\rho_0,\vartheta_0) + \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} K^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta)\,u(\rho,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \tag{1.21}$$

где

$$K^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta) = F(\rho,\vartheta)\,G^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta) \tag{1.22}$$

$$\Psi(\rho_0,\vartheta_0) = -u_0\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}G^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta)\right]_{\rho=1} d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} G^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta)\,\Phi(\rho,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta \tag{1.23}$$

$G^*(\rho_0,\vartheta_0;\rho,\vartheta)$ — функция Грина для уравнения (1.18) в случае внешности круга.

Эта функция имеет вид

$$G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}[K_0(\delta r) - V(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)]$$

$$r = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho_0^2} \tag{1.24}$$

где

$$V(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{I_0(\delta)}{K_0(\delta)} K_0(\delta\rho_0) K_0(\delta\rho) +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(\delta)}{K_n(\delta)} K_n(\delta\rho_0) K_n(\delta\rho) \cos n(\vartheta - \vartheta_0)$$

Используя теорему сложения для цилиндрических функций [4], $G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$ можно представить в виде

$$G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\left| W_0(\rho_0, \rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho_0, \rho)\cos n(\vartheta - \vartheta_0) \right| \tag{1.25}$$

$$W_n(\rho_0, \rho) = [I_n(\delta\rho_0) K_n(\delta) - K_n(\delta\rho_0) I_n(\delta)] \frac{K_n(\delta\rho)}{K_n(\delta)}, \quad 1 < \rho_0 < \rho$$

$$= [I_n(\delta\rho) K_n(\delta) - K_n(\delta\rho) I_n(\delta)] \frac{K_n(\delta\rho_0)}{K_n(\delta)}, \quad \rho_0 > \rho > 1 \tag{1.26}$$

$I_n(x)$—функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_n(x)$—функция Макдональда.

Вычисляя интегралы, входящие в формулу (1.23), получаем

$$\Psi(\rho_0, \vartheta_0) = u_0 + \delta^2\beta^2 u_0 \int_1^{\infty} W_0(\rho_0, \rho)\frac{d\rho}{\rho^3} - 2\beta u_0\left[\frac{1}{\rho_0^2} - \frac{K_2(\delta\rho_0)}{K_2(\delta)}\right]\cos 2\vartheta_0 \tag{1.27}$$

Для решения интегрального уравнения (1.21), его ядро заменим вырожденным. Разлагаем ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\{\varphi_k(\rho, \vartheta) = c_k(\rho - 1)\cos k\vartheta/\rho^{k+3}, \quad \varphi_m(\rho, \vartheta) = c_m(\rho - 1)\cos m\vartheta/\rho^{m+3}\} \tag{1.28}$$

где

$$c_p = \sqrt{(2p+2)(2p+3)(2p+4)} / \sqrt{2\pi} \tag{1.29}$$

Разложение будет иметь следующий вид:

$$K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A^*_{km}\varphi_k(\rho_0, \vartheta_0)\varphi_m(\rho, \vartheta) \tag{1.30}$$

где

$$A^*_{km} = c_k c_m \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\cos k\vartheta_0 \frac{(\rho_0-1)}{\rho_0^{k+2}} d\rho_0 d\vartheta_0\right\}\times$$

$$\times \cos m\vartheta \frac{(\rho-1)}{\rho^{m+2}} d\rho d\vartheta =$$

$$= c_k c_m \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty} G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)\cos k\vartheta_0 \frac{(\rho_0-1)}{\rho_0^{k+2}} d\rho_0 d\vartheta_0\right\}\times$$

$$\times F(\rho, \vartheta)\cos m\vartheta \frac{(\rho-1)}{\rho^{m+2}} d\rho d\vartheta =$$

$$= c_k c_m \int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\left\{\int_1^{\infty} W_k(\rho_0, \rho)\frac{(\rho_0-1)\,d\rho_0}{\rho_0^{k+2}}\right\} F(\rho, \vartheta)\cos m\vartheta \frac{(\rho-1)}{\rho^{m+2}} d\rho d\vartheta \tag{1.31}$$

Функция $F(\rho, \vartheta)$ дается по формуле (1.19), $W_k(\rho_0, \rho)$—по формуле (1.26).

Из-за громоздкости явные выражения для A^*_{km} не приводим.

После преобразования интегральное уравнение (1.21) принимает вид

$$u(\rho_0, \vartheta_0) - \sum_{k,m=1}^{N} A^*_{km}\varphi_k(\rho_0, \vartheta_0)\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\varphi_m(\rho, \vartheta)\,u(\rho, \vartheta)\,\rho d\rho d\vartheta = \Psi(\rho_0, \vartheta_0) \tag{1.32}$$

Решение интегрального уравнения (1.32) имеет следующую форму [5]:

$$u(\rho_0, \vartheta_0) = \Psi(\rho_0, \vartheta_0) + \frac{\rho_0-1}{\rho_0^3}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k Y_k}{\rho_0^k}\cos k\vartheta_0 \tag{1.33}$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^{N} A^*_{km} X_m \tag{1.34}$$

где $\Psi(\rho_0, \vartheta_0)$ дается формулой (1.27), c_k—формулой (1.29). Постоянные X_m определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^{N} A^*_{mk} X_k = \Phi_m \quad (m = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.35}$$

где

$$\Phi_2 = -16\sqrt{21}\,\pi\beta u_0\left\{\frac{1}{20} - \frac{1}{K_2(\delta)}\int_1^{\infty} K_2(\delta\rho)\frac{(\rho-1)\,d\rho}{\rho^4}\right\}$$

$$\Phi_m = 0, \quad m \neq 2 \tag{1.36}$$

Интеграл, входящий в формулу (1.36), вычисляется численным методом.

Учитывая (1.17), из (1.33) получаем решения задачи при одностороннем растяжении.

2. *Всестороннее растяжение.* Рассмотрим случай, когда на пластинку действует всесторонняя растягивающая нагрузка, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, равной σ_r^0.

Компоненты напряжения даются формулой (1.1), где

$$\sigma_\rho^0 = \frac{\sigma_r^0(\rho^4-\beta^2)}{\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2}\left[1-\frac{(1+\beta^2)\rho^2-2\beta\rho^2\cos 2\theta}{\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2}\right]$$

$$\sigma_\theta^0 = \frac{\sigma_r^0(\rho^4-\beta^2)}{\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2}\left[1+\frac{(1+\beta^2)\rho^2-2\beta\rho^2\cos 2\theta}{\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2}\right]$$

$$\tau_{\rho\theta}^0 = \frac{2\sigma_r^0\beta\rho^2(\rho^4-1)(\rho^2-\beta^2)}{(\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2)^2}\sin 2\theta \qquad (2.1)$$

Решение рассмотренного случая ищется методом, излагаемым в § 1. Для функции $u(\rho, \theta)$ получается краевая задача типа (1.18)—(1.20), лишь с той разницей, что функция $F(\rho, \theta)$, входящая в формулу (1.19), имеет вид

$$F(\rho, \theta) = \delta^2\left(\frac{2\beta}{\rho^2}\cos 2\theta-\frac{\beta^2}{\rho^4}\right)+$$

$$+\frac{4R^2\omega C}{A^2\rho^4}\left\{\frac{2(\rho^4-\beta^2)^2-(1+\nu)(\rho^2-1)^2(\rho^2-\beta^2)^2}{\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\rho^2(1+\nu)(\rho^2-1)(\rho^2-\beta^2)\left[(1+\beta^2)(\rho^4+\beta^2)-4\beta^2\rho^2\right]}{(\rho^4-2\beta\rho^2\cos 2\theta+\beta^2)^2}\right\} \qquad (2.2)$$

Окончательное решение задачи при всестороннем растяжении дается по формулам (1.33) и (1.34).

Коэффициенты Фурье A_{km}^*, входящие в решение задачи, вычисляются на основании формул (1.31) и (2.2). Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения для пластинки с эллиптическим отверстием, отношения полуосей которой равны $b/a = 1/3$, $1/7$, $1/9$. Материал является полиэтиленом.

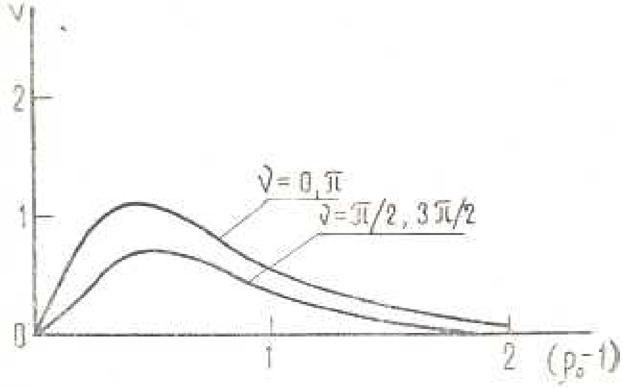
При вычислении использованы следующие данные [5]:

$\beta = 1/2$, $3/4$, $4/5$; $R = 1$, $A = 3.4 \cdot 10^4$ *кг/см²*, $B = 3.87 \cdot 10^7$ *кг/см²*

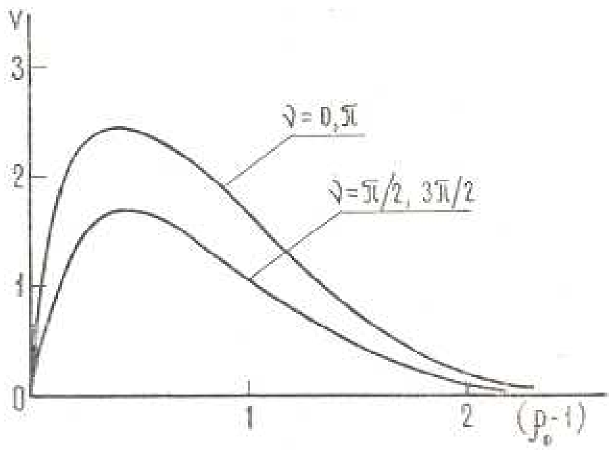
$C = 3.87$ *кг/см² град*, $ac = 0.28$ *ккал/м час град*, $\omega = 100$ *гц*

$k = 0.00234$ *ккал/кгм*, $T_0 = 20°$, $\alpha = 0.71$ *см⁻²*, $\sigma_r^0 = 3$ *кг/см²*

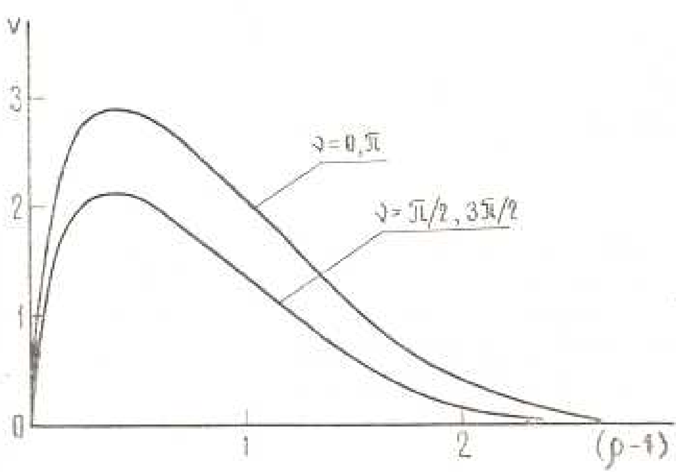
На основании полученных результатов построены графики. На фиг. 1, 2, 3, показаны графики изменения перепада температуры $\vartheta = T - T_0$ в зависимости от ρ_0 при различных значениях отношения полуосей эллипса.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В таблице приведены значения ϑ в зависимости от ρ_0.

Таблица 1

$$\vartheta = T - T_0$$

$\rho_0 - 1$	$\beta = 1/2$		$\beta = 3/4$		$\beta = 4/5$	
	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\theta = 0, \pi$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\theta = 0, \pi$	$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\theta = 0, \pi$
0.01	0.00712	0.07676	0.17102	0.27263	0.21429	0.21518
0.03	0.01733	0.18470	0.41008	0.41309	0.50950	0.51272
0.05	0.09633	0.23939	0.47687	0.52147	0.60110	0.64868
0.08	0.10733	0.46797	0.89012	1.01108	1.12532	1.25434
0.1	0.19939	0.61095	1.11591	1.41831	1.43319	1.74655
0.2	0.49834	0.81768	1.41587	2.19286	1.82420	2.43363
0.3	0.61926	1.09070	1.54716	2.47440	2.21101	2.95899
0.4	0.68201	1.28311	1.61032	2.44521	2.19013	2.87151
0.5	0.70298	1.14531	1.72337	2.40281	2.11743	2.85109
0.8	0.55843	0.87454	1.60537	2.10429	1.76180	2.49004
1	0.48146	0.52890	1.08678	1.71598	1.45783	2.12231
1.5	0.15291	0.21291	0.46135	0.76371	0.22258	1.15884
4	0.00582	0.02271	0.02291	0.12925	0.02626	0.05328

После обобщения результатов можно сделать следующий вывод: сравнительно высокие температуры получаются вдоль большой оси эллипса, при этом с уменьшением отношения b/a зона максимального нагрева приближается к контуру отверстия.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 11 V 1975

Գ. Բ. ՎԵՐՄԻՇՅԱՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔՈՎ ՄԱԾՈՒՑԻԿ-ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ԹԻԹԵՂՈՒՄ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՎԻԲՐԱՑԻՈՆ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ամփոփում

Դիտարկված է մածուցիկ-առաձգական նյութից, էլիպտական անցքով անվերջ թիթեղի բեռնավորումը։ Կիրառված բեռը իրենից ներկայացնում է էլիպսի փոքր առանցքի ուղղությամբ ձգող ուժ, որը փոփոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով հարմոնիկ օրենքով։

Դիտարկված է նաև թիթեղի ձգումը բոլոր ուղղություններով։

Խնդիրը լուծված է այն պայմանով, որ անցքի եզրի վրա ջերմաստիճանը հավասար է շրջապատող միջավայրի ջերմաստիճանին, իսկ թիթեղի հարթության վրա տեղի է ունենում ազատ ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ։

Բերված են հաշվումներ, բոլոր ուղղություններով ձգման դեպքում։

DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN A PLATE WITH AN ELLIPTIC HOLE MADE OF VISCO-ELASTIC MATERIAL UNDER THE EFFECT OF VIBRATORY LOAD

G. B. VERMISHIAN

S u m m a r y

The loading of an infinite plate with an elliptic hole made of visco-elastic material is examined. The applied load is a tensile stress acting along the minor axis of the ellipse and changing by the harmonic law with a steady amplitude. The case of omnidirectional tension of the plate is considered as well.

The problem is solved on condition that the temperature on the contour of the hole is equal to the ambient temperature, and on the lateral surface a free heat transfer into the surrounding medium takes place.

Calculation is made for the case of omnidirectional tension.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР, Механика, № 6, 1965.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. «Наука», М., 1966.
3. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. Изд. ИЛ, М., 1963.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Изд. «Наука», М., 1966.
5. *Вермишян Г. Б., Галин Л. А.* Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.