ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 4, 1975 Механика

Р. М. БАРСЕГЯН

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА НАПОРА

В настоящей работе дается уравнение одномерной фильтрации жидкости в доформируемых грунтах с учетом начального градиента напора. Уравнение движения выводится на основе закона Дарси и отличается от соответственного уравнения неустановившейся фильтрации жидкости в деформируемых грунтах, принятого до настоящего времени в механике грунтов, где основным законом фильтрации принимается закон Дарси-Герсеванова [1]. На численном примере сопоставлены значения напоров для одной частной задачи, решения которой найдены с учетом и без учета начального градиента напора.

Как известно, фильтрация воды в плотных глинах возникает после того, как градиент напора превысит некоторое критическое значение, называемое начальным градиентом напора. В тех случаях, когда начальный градиент напора составляет не больше 10—20% от фактического градиента напора, то влияние начального градиента практически не учитывается. Если же он достигает значительных величин (например, для кембрийской глины [2] это значение больше 5), то учет влияния начального градиента напора становится практически необходимым.

Таким образом, при учете начального градиента напора обычная зависимость Дарси заменяется следующими зависимостями:

$$u_z = 0, \quad \text{когда} \quad \frac{\partial H}{\partial z} < i_0$$

$$u_z = -k\left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_0\right), \quad \text{когда} \quad \frac{\partial H}{\partial z} > i_0$$

где u_z — скорость фильтрации, H — напор, k — коэффициент фильтрации, i_0 — начальный градиент напора.

Выделяя в водонасыщенном грунте элементарный параллелепипед, обычным путем находим, что уравнение неразрывности жидкой фазы имеет вид

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

где n — пористость элементарного объема в момент времени t, причем $n = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, ε — коэффициент пористости.

Из (1) имеем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (1+\varepsilon)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[k\left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_0\right)\right] \tag{2}$$

С учетом равенства $H = \frac{p}{\gamma} + z$ (начало координатной системы находится на подошве слоя) ур-ние (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = (1+\varepsilon)^2\left[\frac{\partial k}{\partial z}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} + 1 - i_0\right) + \frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right] \tag{3}$$

Вычисляя производные $\frac{\partial p}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ из уравнения равновесия

$$p = q + w - \sigma + \left(\frac{\gamma\varepsilon + \gamma_{ск.}}{1+\varepsilon}\right)(l - z) \tag{4}$$

(где q — внешняя нагрузка, w — давление в воде по верхнему основанию водонасыщенного грунта, σ — напряжение в скелете, p — давление в воде, l — мощность грунта, γ — удельный вес жидкости, $\gamma_{ск}$ — удельный вес скелета) и подставляя в (3), получим

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{\gamma(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{2k}{\gamma}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^3}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 +$$
$$+\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial k}{\partial z}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2k}{\gamma}\frac{\gamma-\gamma_{ск}}{(1+\varepsilon)^2}\right]\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} -$$
$$-\left[\frac{1}{\gamma}\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\gamma\varepsilon - \gamma_{ск}}{1+\varepsilon} + \frac{k}{\gamma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - (1-i_0)\frac{\partial k}{\partial z}\right]$$

Подставляя в полученное уравнение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}, \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 + \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{dk}{d\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \text{ и } \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = k_0 = \mathrm{const}$$

и известное соотношение [3]

$$k = k_1 - \frac{k_1 - k_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon)$$

получим

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k}{\gamma}\left[\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right]\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} +$$
$$+\left[k_0\left(1 - i_0 - \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon + \gamma_{ск}}{1+\varepsilon}\right) - \frac{2k}{\gamma}\frac{\gamma - \gamma_{ск}}{(1+\varepsilon)^2}\right]\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} -$$
$$-\left[\frac{2k}{\gamma}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^3} + \frac{k}{\gamma}\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} - \frac{k_0}{\gamma}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{k_0}{\gamma}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right]\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 \tag{5}$$

Второе уравнение, содержащее неизвестные функции $H(z, t)$ и $\varepsilon(z, t)$, можно получить из уравнений (2) и(4), оно имеет вид:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{(1+\varepsilon)^2-(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}{\gamma\frac{d\varepsilon}{d\sigma}}\frac{\partial}{\partial z}\left[k\left(\frac{\partial H}{\partial z}-i_0\right)\right] \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) составляют систему основных уравнений одномерной фильтрации жидкости в деформируемых грунтах с учетом начального градиента напора.

Для спрямленного участка компрессионной кривой $\varepsilon=-a\sigma+\mathrm{const}$ имеем

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{k}{\gamma}\left[\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{1}{a}\right]\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2}+$$

$$+\left[k_0\left(1-i_0-\frac{1}{\gamma}\frac{\gamma\varepsilon+\gamma_{ск}}{1+\varepsilon}\right)-\frac{2k}{\gamma}\frac{\gamma-\gamma_{ск}}{(1+\varepsilon)^2}\right]\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-$$

$$-\left[\frac{2k}{\gamma}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^3}-\frac{k_0}{\gamma}\frac{(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{(1+\varepsilon)^2}-\frac{k_0}{a\gamma}\right]\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)^2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{(1+\varepsilon)^2+a(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{a\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[k\left(\frac{\partial H}{\partial z}-i_0\right)\right] \tag{8}$$

где a — коэффициент уплотнения.

Граничные условия обычные. На водопроницаемых участках известны значения напора, а на водонепроницаемых участках границы

$$\frac{\partial H}{\partial z}=i_0$$

Уравнения (5) и (6) (также (7) и (8)) при $i_0=0$ превращаются в систему уравнений одномерной фильтрации жидкости в деформируемых грунтах без учета начального градиента напора.

При постоянных q и w и осредненном коэффициенте пористости $\varepsilon_{ср}$ из основных уравнений (5) и (6) получим

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{(1+\varepsilon_{ср})^2+a(\gamma-\gamma_{ск})(l-z)}{a\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\left[k\left(\frac{\partial H}{\partial z}-i_0\right)\right] \tag{9}$$

Коэффициент фильтрации k в уравнении (9) не может быть постоянным, в противном случае это уравнение совпало бы с уравнением одномерной фильтрации без учета начального градиента напора.

Для примера найдем решение уравнения (9) при $k=\mu+\nu z$ (μ и ν — постоянные) с условиями

$$H(z,\,0) = H_0 = l + \frac{q}{\gamma} = \text{const}, \quad H(0,\,t) = 0, \quad H(l,\,t) = H_1 = \text{const}$$

Перепишем уравнение (9) в виде

$$\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = (\alpha + \beta z)\left[\nu \frac{\partial \overline{H}}{\partial z} + (\mu + \nu z)\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial z^2}\right] \tag{10}$$

где

$$\alpha = \frac{(1+\varepsilon_{\text{ср}})^2 + al(\gamma - \gamma_{\text{ск}})}{a\gamma}, \qquad \beta = \frac{\gamma_{\text{ск}} - \gamma}{\gamma}, \quad \overline{H} = H - i_0 z$$

Начальное и граничные условия для (10) будут

$$\overline{H}(z,\,0) = H_0 - i_0 z, \quad \overline{H}(0,\,t) = 0, \quad \overline{H}(l,\,t) = H_1 - i_0 l = \overline{H}_1 \tag{11}$$

Применяя преобразование Лапласа по времени к задаче (10)—(11), получим задачу (12)—(13)

$$(\alpha + \beta z)(\mu + \nu z)\frac{d^2 h}{dz^2} + \nu(\alpha + \beta z)\frac{dh}{dz} - ph = i_0 z - H_0 \tag{12}$$

$$h(0,\,p) = 0, \quad h(l,\,p) = \frac{\overline{H}_1}{p}$$

где

$$h(z,\,p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,\overline{H}(z,\,t)\,dt \tag{13}$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (12), при условии $\beta\mu = \alpha\nu$ дается формулой

$$h = C_1 \sin\sqrt{p}\,y + C_2 \cos\sqrt{p}\,y$$

где $y = \int \frac{dz}{\sqrt{(\alpha + \beta z)(\mu + \nu z)}}$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а решение задачи (12)—(13) имеет вид

$$h = \frac{i_0}{4a_0}\left[\frac{\sqrt{p}}{p + a_0}\,e^{\sqrt{a_0}\,y} + \frac{\sqrt{p}}{p + a_0}\,(b^2 - 4a_0 c)\,e^{-\sqrt{a_0}\,y} - \frac{2b}{\sqrt{p}}\right] - \frac{H_0}{\sqrt{p}} +$$

$$+ \frac{M \sin\sqrt{p}\,(y - y_2) + N \sin\sqrt{p}\,(y_1 - y)}{\sin\sqrt{p}\,(y_1 - y_2)} + \frac{\overline{H}_1 \sin\sqrt{p}\,(y_1 - y)}{p \sin\sqrt{p}\,(y_1 - y_2)} \tag{14}$$

где

$$a_0 = \beta\nu, \quad b = \beta\mu + \alpha\nu, \quad c = \alpha\mu, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ln\left(b + \sqrt{a_0 c}\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \ln [2a_0 l + b + 2\sqrt{a_0(a_0 l^2 + bl + c)}]$$

$$M = \frac{H_0}{\sqrt{p}} - \frac{i_0}{4a_0}\left[\frac{\sqrt{p}\, e^{\sqrt{a_0}y_1}}{p+a_0} + \frac{\sqrt{p}\,(b^2-4a_0c)\,e^{-\sqrt{a_0}y_1}}{p+a_0} - \frac{2b}{\sqrt{p}}\right]$$

$$N = \frac{H_0}{\sqrt{p}} - \frac{i_0}{4a_0}\left[\frac{\sqrt{p}\, e^{\sqrt{a_0}y_2}}{p+a_0} + \frac{\sqrt{p}\,(b^2-4a_0c)\,e^{-\sqrt{a_0}y_2}}{p+a_0} - \frac{2b}{\sqrt{p}}\right]$$

Решение задачи в преобразованиях без учета начального градиента напора имеет вид

$$h = -\frac{H_0}{\sqrt{p}} + \frac{\frac{H_0}{\sqrt{p}} \sin\sqrt{p}\,(y-y_2) + \left(\frac{\overline{H}_1}{p} + \frac{H_0}{\sqrt{p}}\right)\sin\sqrt{p}\,(y_1-y)}{\sin\sqrt{p}\,(y_1-y_2)} \tag{15}$$

Рассмотрим первые два приближения решений (14) и (15). В первом приближении из (14) получим

$$h = \frac{\overline{H}_1(y_1-y)}{p(y_1-y_2)} + Q\frac{\sqrt{p}}{p+a_0} \tag{16}$$

где

$$Q = \frac{i_0}{4a_0}\Big\{ e^{\sqrt{a_0}y} + (b^2-4a_0c)\,e^{-\sqrt{a_0}y} -$$

$$- \frac{y-y_2}{y_1-y_2}\left[e^{\sqrt{a_0}y_1} + (b^2-4a_0c)\,e^{-\sqrt{a_0}y_1}\right] -$$

$$- \frac{y_1-y}{y_1-y_2}\left[e^{\sqrt{a_0}y_2} + (b^2-4a_0c)\,e^{-\sqrt{a_0}y_2}\right]\Big\}$$

Оригинал для (16) будет

$$\overline{H} = \frac{\overline{H}_1(y_1-y)}{y_1-y_2} + Q\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + i\sqrt{a_0}e^{-a_0t}\operatorname{erf} i\sqrt{a_0t}\right) \tag{17}$$

Соответственное решение для задачи без учета начального градиента напора будет

$$H = \frac{H_1(y_1-y)}{y_1-y_2} \tag{18}$$

Отметим, что решения (17) и (18) пригодны для предельно больших значений времени.

Оригинал для второго приближения, полученный из формулы (14), имеет вид

$$\overline{H} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left(Q_4 - Q_3 + Q_5 - \frac{i_0 b}{2a_0} - H_0\right) +$$

$$+\left(Q_1 - Q_3 + \frac{Q_2}{a_0+\omega}\right) i\sqrt{a_0}\, e^{-a_0 t} \operatorname{erf} i\sqrt{a_0 t} +$$

$$+\left(Q_5 + \frac{Q_2}{a_0+\omega} - \frac{Q_3}{a_0+\omega} - \frac{Q_4}{\omega}\right)\sqrt{\omega}\, e^{\omega t} \operatorname{erf}\sqrt{\omega t}\left(Q_6 - \frac{Q_7}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{Q_7}{\omega} \tag{19}$$

где

$$\omega = \frac{6}{(y_1 - y_2)^2}, \quad Q_1 = \frac{i_0}{4a_0}\left[e^{\sqrt{a_0}\,y} + (b^2 - 4a_0 c)\, e^{-\sqrt{a_0}\,y}\right]$$

$$Q_2 = \frac{i_0}{4a_0}\frac{G_1}{(y_1 - y_2)^3}$$

где
$$G_1 = 6\{(y - y_2)\left[e^{\sqrt{a_0}\,y_1} + (b^2 - 4a_0 c)\, e^{-\sqrt{a_0}\,y_1}\right] +$$

$$+ (y_1 - y)\left[e^{\sqrt{a_0}\,y_2} + (b^2 - 4a_0 c)\, e^{-\sqrt{a_0}\,y_2}\right]\}$$

$$Q_3 = \frac{i_0}{4a_0}\frac{G_2}{(y_1 - y_2)^3}$$

где
$$G_2 = (y - y_2)^3\left[e^{\sqrt{a_0}\,y_1} + (b^2 - 4a_0 c)\, e^{-\sqrt{a_0}\,y_1}\right] +$$

$$+ (y_1 - y)^3\left[e^{\sqrt{a_0}\,y_2} + (b^2 - 4a_0 c)\, e^{-\sqrt{a_0}\,y_2}\right]$$

$$Q_4 = \frac{6\left(\frac{i_0 b}{2a_0} + H_0\right)}{(y_1 - y_2)^2}, \quad Q_5 = \frac{\left(\frac{i_0 b}{2a_0} + H_0\right)\left[(y - y_2)^3 + (y_1 - y)^3\right]}{(y_1 - y_2)^3}$$

$$Q_6 = \frac{\overline{H}_1 (y_1 - y)^3}{(y_1 - y_2)^3}, \quad Q_7 = \frac{6\overline{H}_1 (y_1 - y)}{(y_1 - y_2)^3}$$

Соответственное решение задачи без учета начального градиента напора будет

$$H = -\frac{H_0}{\sqrt{\pi t}} - H_0\sqrt{\omega}\, e^{\omega t} \operatorname{erf}\sqrt{\omega t} +$$

$$+ \frac{H_0\left[(y - y_2)^3 + (y_1 - y)^3\right]}{(y_1 - y_2)^3}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \sqrt{\omega}\, e^{\omega t} \operatorname{erf}\sqrt{\omega t}\right) +$$

$$+\left(Q_6' - \frac{Q_7'}{\omega}\right)e^{\omega t} + \frac{Q_7'}{\omega} \tag{20}$$

где

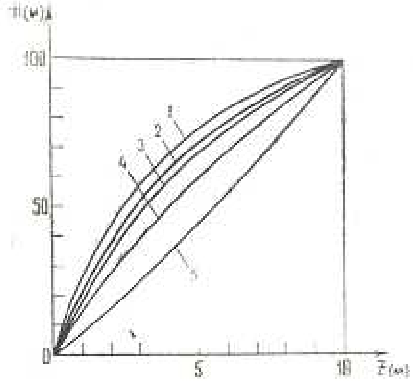
$$Q_6' = \frac{H_1 (y_1 - y)^3}{(y_1 - y_2)^3}, \quad Q_7' = \frac{6H_1 (y_1 - y)}{(y_1 - y_2)^3}$$

Для сопоставления решений (19) и (20) приведем численный пример со следующими исходными данными:

$$a = 0.01\,\frac{см^2}{кг}, \quad \varepsilon_{ср} = 0.7, \quad l = 1000\ см, \quad \gamma = 0.001\,\frac{кг}{см^3},$$

$$\gamma_{ск} = 0.0028\,\frac{кг}{см^3}, \quad \beta = 1.8, \quad \alpha = 0.1682\ см, \quad \mu = 0.0002\,\frac{см}{сут},$$

$$\nu = 0.00214\,\frac{1}{сут}, \quad i_0 = 5, \quad H_0 = 0, \quad H_1 = 10000\ см$$



Фиг. 1.

На фиг. 1 приведены графики напоров для двух значений времени $t = 100$ *сут* и $t = 1000$ *сут*. Графики 1 и 3 построены по формуле (19), а 2 и 4 — по формуле (20) соответственно для $t = 100$ *сут* и $t = 1000$ *сут*. График 5 соответствует предельному случаю, когда $t \to \infty$. Как видно, на фиг. 1 расхождение между значениями напоров, вычисленными по формуле (19) (с учетом начального градиента напора) и (20) (без учета начального градиента напора) значительное.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 5 X 1975

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՋՐԻ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԻԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐԸ ՃՆՇՄԱՆ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ԳՐԱԴԻԵՆՏԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Հոդվածում արտածվել է ձևափոխվող բնահողում հեղուկի ֆիլտրացիայի միաչափ խնդրի հավասարումը ճնշման սկզբնական գրադիենտի հաշվառմամբ։ Ստացված հավասարումը տարբերվում է մինչև այժմ բնահողերի մե-

խանիկայում օգտագործվող համապատասխաններից, որովհետև ֆիլտրացիայի հիմնական օրենք է ընդունված Դարսու օրենքը ի տարբերություն առաջիններում ընդունված Դարսի-Գերսևանովի օրենքի։ Թվային օրինակից երևում է, որ միևնույն խնդրի համար ստացված երկու լուծումների (ճնշման սկզբնական գրադիենտի հաշվառմամբ և առանց այն հաշվի առնելու դեպքում) միջև տարբերությունը զգալի է։

ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF UNSTEADY FILTRATION OF WATER WITH REGARD FOR THE INITIAL PRESSURE GRADIENT

R. M. BARSEGHIAN

Summary

The equation of one-dimensional filtration of water in deformed seil with regard for original pressure gradient is considered.

The equation of motion is derived on the basis of Darci's law and differs from the corresponding equation of the unsteady liquid filtration accepted nowdays in seil mechanics, where Darci-Gersevanov's law is assumed to be basic.

A numerical example is given to show that the difference between the solution of problems with regard for initial pressure gradient and regardless of this gradient is considerable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов, т. 2. Госстройиздат, М., 1961.
2. *Роза С. А.* Осадки гидротехнических сооружений на глинах с малой влажностью. «Гидротехническое строительство», № 9, 1950.
3. *Веселовский В. М.* Осадки сооружений во времени. Госстройиздат, М., 1940.