

П. И. ВАСИЛЬЕВ, Ю. Г. ВИЛЛЕР, А. А. ЗЕВИН

ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВНЕЦЕНТРИННО СЖАТОЙ СТЕНЫ ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БЕТОННЫХ БЛОКОВ

Бетонные стены различных сооружений бетонировуются горизонтальными блоками значительной толщины или собираются из сборных прямоугольных элементов. Швы между ними имеют малое сопротивление растяжению. Такие конструкции нередко рассчитывают без учета сопротивления растянутой зоны. В связи с этим в статье рассматривается задача о сжатии эксцентричной нагрузкой стены из бетонных блоков, с учетом влияния ползучести на деформации системы (фиг. 1). Показано, что перемещения, обусловленные ползучестью, могут привести к потере устойчивости системы — опрокидыванию.

Длина блоков предполагается достаточно большой, поэтому задача рассматривается как плоская.

§ 1. Рассмотрим предварительно контактную задачу о сжатии двух прямоугольных блоков эксцентричной нагрузкой, воспользовавшись функциями влияния перемещений границы прямоугольной области [1]. В безразмерных координатах $x = x/x_0$, $\vartheta = y/y_0$, $\zeta = s/y_0$ (фиг. 2) перемещения границы $x = 0$

$$\begin{aligned}
 u(\vartheta) &= \int_0^2 \hat{L}_0^i(\vartheta, \zeta) q(\zeta) d\zeta = \\
 &= \frac{(1-\nu^2)y_0}{E} \int_0^2 \left[\hat{L}_{0n}^i(\vartheta, \zeta) - \frac{2}{\pi} \ln|\vartheta - \zeta| \right] q(\zeta) d\zeta = \\
 &= \frac{(1-\nu^2)y_0}{E} \int_0^2 \hat{K}^i(\vartheta, \zeta) q(\zeta) d\zeta \tag{1}
 \end{aligned}$$

Здесь $q(\zeta)$ — нагрузка на гранях $x = 0$ и $x = -2$; $\hat{L}_{0n}^i(\vartheta, \zeta) = L_{0n}(\gamma_0, \gamma_D)$ ($\gamma_0 = 1 - \vartheta$, $\gamma_D = 1 - \zeta$) — регулярная часть функции влияния, которая протабулирована для различных значений $\gamma = y_0/x_0$.

Рассматривая контакт двух блоков (фиг. 3а), полагаем, что нагрузки q на противоположных гранях блоков отличаются незначительно и определяются равнодействующей P и величиной ε ; это допущение позволяет использовать функции влияния $\hat{L}_0^i(\vartheta, \zeta)$.

Собственным весом блоков пренебрегаем. Приблизительно влияние собственного веса можно учесть, добавляя его к поверхностным нагрузкам.

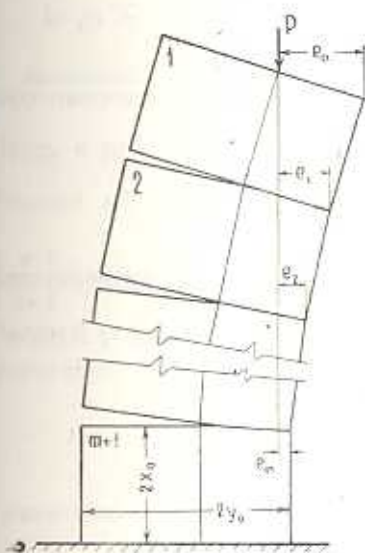
Вследствие симметрии относительно оси ϑ плоскость контакта не искажается. Учитывая (1), условия контактной задачи для идеально упругих блоков можно записать в виде

$$\frac{(1-\nu^2)}{E} \int_0^{\alpha(t)} K^T(\vartheta, \zeta) p(\zeta, t) d\zeta = \frac{\delta(t)}{2} - \frac{\varphi(t)\vartheta}{2} \quad (2)$$

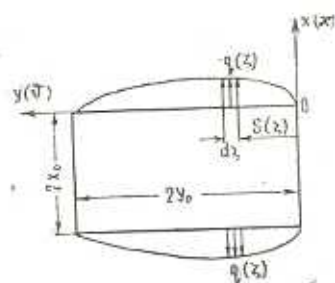
внутри области контакта $[0, \alpha(t)]$

$$\sigma_x(0, \vartheta, t) = 0 \text{ вне области контакта} \quad (3)$$

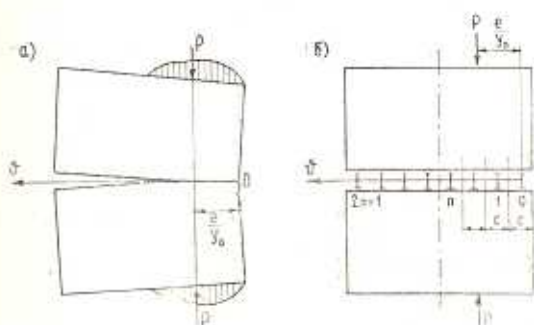
$$\int_0^{\alpha(t)} p(\zeta, t) d\zeta = \frac{P(t)}{y_0}, \quad \int_0^{\alpha(t)} p(\zeta, t) \zeta d\zeta = \frac{P(t)}{y_0} \frac{e(t)}{y_0} \quad (4)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В уравнениях (2)—(4) $p(\zeta, t)$ — контактное давление, $\delta(t)$ — взаимное сближение блоков, $\varphi(t)$ — их взаимный угол поворота.

Условия задачи с учетом ползучести получим, заменяя в (1) константы оператором

$$Q_t \int_0^{x^*(t)} K^T(\theta, \zeta) p^*(\zeta, t) d\zeta = \frac{\delta^*(t)}{2} + \frac{\varphi^*(t) \theta}{2} \quad (5)$$

$$\int_0^{x^*(t)} p(\zeta, t) d\zeta = \frac{P(t)}{y_0}, \quad \int_0^{x^*(t)} p^*(\zeta, t) \zeta d\zeta = \frac{P(t)}{y_0} \frac{e(t)}{y_0} \quad (6)$$

Здесь

$$Q_t = Q_0 [1 + H^*], \quad Q_0 = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \quad (7)$$

$$H^* f(t) = \int_0^t H(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad H(t, \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} EC(t, \tau) \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что уравнениям (5), (6) удовлетворяют функции

$$\begin{aligned} p^*(\zeta, t) &= p(\zeta, t); & x^*(t) &= x(t) \\ \delta^*(t) &= [1 + H^*] \delta(t); & \varphi^*(t) &= [1 + H^*] \varphi(t) \end{aligned} \quad (9)$$

которые решают задачу с учетом ползучести бетона.

Если $\frac{e(t)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} = \text{const}$, уравнения (5), (6) удовлетворяются при $p^*(\zeta, t) = p_0(\zeta) P(t)$; $x^*(t) = x_0 = \text{const}$; $\delta^*(t) = \delta_0 [1 + H^*] P(t)$; $\varphi^*(t) = \varphi_0 [1 + H^*] P(t)$, причем $p_0(\zeta)$, x_0 , δ_0 , φ_0 — решение соответствующей задачи теории упругости при $\frac{P}{y_0} = 1$.

Таким образом, приходим к следующим выводам*:

1. Ползучесть бетона не оказывает влияния на величину зоны контакта и контактные напряжения.

2. Зона контакта не зависит от величины действующей нагрузки и определяется только относительной координатной равнодействующей $\frac{e}{y_0}$.

§ 2. Рассмотрим сжатие прямоугольной призмы, состоящей из $m+1$ -го бетонного блока, с учетом деформированной схемы. Полагаем, что $m+1$ -й (нижний) блок зашпанден в основании, верхний блок свободен от кинематических связей. Все блоки имеют одинаковые размеры $2x_0 \cdot 2y_0$. Сжимающая сила $P = \text{const}$ приложена на расстоянии $e_0 = \text{const}$ от вертикальной грани верхнего блока (фиг. 1). Касательными напряжениями на поверхно-

* Полученные выводы справедливы также в случае сжатия идентичных пространственных тел произвольной формы, симметричных относительно плоскости изгиба, если контактирующие поверхности плоские и функцию влияния перемещений плоскости контакта упругих тел можно представить в виде произведения функции упругих постоянных на функцию координат.

Вывод о независимости контактных напряжений от характеристик ползучести бетона при сдавливании без отрыва внецентрично нагруженного штампа ограниченной ширины был ранее получен И. Е. Прокоповичем, ПММ, т. XX, в. 6, 1956 г.

стях контакта, которые появляются при деформациях системы, пренебрегаем.

Вследствие ползучести деформации системы увеличиваются, и расстояния e_k ($k=1, 2, \dots, m$) становятся функциями времени. Из геометрических соображений следует

$$\frac{e_k(t)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} \left[k\Phi(t) - \sum_{\nu=1}^{k-1} (k-\nu) \varphi_\nu(t) \right] \quad (10)$$

$$(k=1, 2, \dots, m)$$

где

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) \quad (11)$$

$\varphi_k(t)$ — взаимный угол поворота блоков k и $k+1$; $h=2x_0$ — высота блока.

Пусть в результате решения задачи теории упругости о сжатии двух блоков нагрузкой $\frac{P}{y_0} = 1$ при $Q_0 = 1$ получена зависимость

$\bar{\varphi} = \psi \left[\frac{e}{y_0} \right]$ взаимного угла поворота блоков от e/y_0 .

С учетом ползучести бетона

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \frac{PQ_0}{y_0} [1 + H^*] \psi \left[\frac{e_k(t)}{y_0} \right] = \\ &= \frac{PQ_0}{y_0} \left\{ \psi \left[\frac{e_k(t)}{y_0} \right] + \int_{\tau_0}^t H(t, \tau) \psi \left[\frac{e_k(\tau)}{y_0} \right] d\tau \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Решение системы (10) — (12) для произвольного момента времени может быть получено методом конечных сумм. Введем дискретную шкалу $t_i = \tau_0 + i\Delta$ и проинтегрируем (12) по формуле трапеций

$$\begin{aligned} \varphi_k(t_i) &= \frac{PQ_0}{y_0} \psi \left[\frac{e_k(t_i)}{y_0} \right] + \\ &+ \frac{PQ_0\Delta}{y_0} \left\{ \frac{H(t_i, \tau_0) \psi \left[\frac{e_k(\tau_0)}{y_0} \right] + H(t_i, t_i) \psi \left[\frac{e_k(t_i)}{y_0} \right]}{2} \right\} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{i-1} H(t_i, t_\nu) \psi \left[\frac{e_k(t_\nu)}{y_0} \right] \quad (i=1, 2, \dots) \quad (13) \end{aligned}$$

Соотношение (13) совместно с уравнениями (10), (11) позволяет определить неизвестные $e_k(t_i)$, $\varphi_k(t_i)$ последовательно, начиная с

$t_0 = \tau_0$. Полагая, что решение для моментов $\tau_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}$ известно, задавшись $\Phi(t_i)$, последовательно находим

$$\frac{e_1(t_i)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} \Phi(t_i), \quad \varphi_1(t_i) \text{ — по формуле (13)}$$

$$\frac{e_2(t_i)}{y_0} = \frac{e_0}{y_0} - \frac{h}{y_0} [2\Phi(t_i) - \varphi_1(t_i)], \quad \varphi_2(t_i) \text{ — по формуле (13) и т. д.}$$

После определения $\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), \dots, \varphi_k(t_i)$ проверяется выполнение условия (11); величина $\Phi(t_i)$ варьируется до тех пор, пока это условие не будет удовлетворено.

При $t_i = \tau_0$ в выражении (13) учитывается только первое слагаемое.

Таким образом, почти треугольная структура системы уравнений (10) значительно упрощает решение, так как при любом t_i задача по существу приводится к решению одного нелинейного уравнения (11).

Устойчивость системы блоков определяется условием $e_m(t) > 0$. Рассматривая конечный интервал времени, получим уравнение для определения критической силы в интервале $[\tau_0, \tau_1]$:

$$e_m \left[\frac{P_{k0}}{y_0}, Q_0, \tau_s, \tau_0, \tau_1 \right] = 0 \quad (14)$$

где τ_s — реологические параметры.

Практически нет необходимости решать уравнение (14); достаточно при заданной нагрузке P проверить выполнение условия $e_m(\tau_1) > 0$.

§ 3. Имея ввиду получение числовых результатов в задаче о сжатии двух упругих блоков, заменим непрерывный контакт системой $2(n+1)$ односторонних связей, расположенных в серединах участков шириной e_0 (фиг. 3б). Начало координат удобно совместить с нулевой связью.

Полагаем, что в пределах участков e_0 реакции связей распределяются равномерно.

Как показано в § 1, зона контакта, а, значит, и число включившихся связей не зависит от величины нагрузки и определяется относительной координатой ее приложения e/y_0 . Пусть при некотором значении e/y_0 включалась $r+1$ связь.

Тогда неизвестные $X_j = \frac{Z_j}{y_0}$, $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{Q_0}$; $\hat{\delta} = \frac{\delta}{y_0 Q_0}$ определяются из системы уравнений

$$A_{r+3} \bar{X} = \bar{P} \quad (15)$$

Здесь вектор $\bar{X} = (\hat{\varphi}, \hat{\delta}, X_0, X_1, \dots, X_r)$; вектор $\bar{P} = \left(\frac{Pe}{y_0^2}, \frac{-P}{y_0}, 0, 0, \dots, 0 \right)$; матрица порядка $r+3$

$$A_{r+3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2c & \dots & rc \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & 2\delta_{00}^{\cdot} & 2\delta_{01}^{\cdot} & 2\delta_{02}^{\cdot} & \dots & 2\delta_{0r}^{\cdot} \\ c & -1 & 2\delta_{10}^{\cdot} & 2\delta_{11}^{\cdot} & 2\delta_{12}^{\cdot} & \dots & 2\delta_{1r}^{\cdot} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ rc & -1 & 2\delta_{r0}^{\cdot} & 2\delta_{r1}^{\cdot} & 2\delta_{r2}^{\cdot} & \dots & 2\delta_{rr}^{\cdot} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Z_j — усилия в связях; φ — взаимный угол поворота блоков; δ — их сближение; $\delta_{ij}^{\cdot} = \frac{\delta_{ij}}{Q_0}$; δ_{ij} — перемещение поверхности контакта блока по направлению связи i от нагрузки $q = 1/cy_0$, равномерно распределенной на участке j .

Первые две строки в системе (15) представляют собой уравнение равновесия, остальные — уравнения неразрывности деформаций по направлению включившихся связей.

Перемещения δ_{ij} найдем, воспользовавшись выражением (1). Положив $\delta = c(i+0.5)$ и интегрируя в пределах $[c - (j+1)c, c]$ получим

$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}^{(2)}$$

где

$$\delta_{ij}^{(1)} = \frac{1-\nu^2}{E} L_{\text{св}}^{\cdot} [c(i+0.5), c(j+0.5)]$$

$$\delta_{ij}^{(2)} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ 1 + \ln \left[\left(\frac{j-i-0.5}{j-i+0.5} \right)^{j-1} \frac{1}{cV(j-i)-0.25} \right] \right\} \quad (i \neq j)$$

$$\delta_{ii}^{(2)} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left(1 - \ln \frac{c}{2} \right)$$

При интегрировании регулярной части функции влияния использовалась формула прямоугольников.

Так как число включившихся связей заранее не известно, уравнения (15) удобно решать в следующем порядке.

Последовательно, при $r=1, 2, \dots, 2n+1$, умножив обратную матрицу

$$A_{r+3}^{-1} = [a_{ij}^{(r+3)}] \text{ на вектор } \bar{P} \text{ при } \frac{P}{y_0} = 1, \text{ получим}$$

$$a_{ii}^{(r+3)} \frac{c}{y_0} - a_{i2}^{(r+3)} = \begin{cases} \bar{\varphi} & \text{при } i=1 \\ \bar{\delta} & \text{при } i=2 \\ \bar{X}_{i-3} & \text{при } i=3, 4, \dots, r+3 \end{cases}$$

где через $\bar{\varphi}$, $\bar{\delta}$ и \bar{X}_{i-3} обозначены величины φ , δ и X_{i-3} , соответствующие нагрузке $P/y_0 = 1$.

Координату равнодействующей, соответствующую включению r связей, можно найти из условия $\bar{X}_r = 0$

$$\frac{e_r}{y_0} = \frac{a_{r+3,2}^{(r+3)}}{a_{r+3,1}^{(r+3)}} \quad (17)$$

При заданной величине $\frac{e}{y_0}$ число включившихся связей определяется условием $\frac{e_{r+1}}{y_0} > \frac{e}{y_0} \geq \frac{e_r}{y_0}$. После определения r , из уравнений (15) находятся неизвестные $\hat{\varphi}$, $\hat{\delta}$ и X_l .

Решая (15) при $\frac{P}{y_0} = 1$ и различных значениях $\frac{e}{y_0}$, можно построить зависимость $\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \left[\frac{e}{y_0} \right]$, которая необходима для определения деформаций системы блоков с учетом ползучести.

§ 4. По изложенной методике решен численный пример о сжатии стены из квадратных блоков. При решении задачи о контакте двух блоков непрерывный контакт заменялся системой дискретных связей, расположенных в серединах участков величиной $y_0 = 0.1 y_0$.

В табл. 1 приведены значения $\bar{X}_l = \frac{Z_l}{P}$ в функции $\frac{e_r}{y_0}$. Зависимость $\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \left[\frac{e}{y_0} \right]$ дана в табл. 2. Эти данные могут быть использованы при расчете стены из произвольного количества квадратных блоков с учетом ползучести бетона.

Таблица 1

Зависимость $\bar{X}_l = \frac{Z_l}{P}$ от $\frac{e_r}{y_0}$

r	$\frac{e_r}{y_0}$	Номер связи l												
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
1	0	1	0											
2	0.0332	0.668	0.332	0										
3	0.0725	0.484	0.306	0.209	0									
4	0.1125	0.375	0.269	0.213	0.144	0								
5	0.1484	0.311	0.238	0.201	0.156	0.094	0							
6	0.1856	0.264	0.212	0.186	0.154	0.110	0.074	0						
7	0.2234	0.229	0.190	0.171	0.148	0.113	0.089	0.060	0					
8	0.2608	0.202	0.172	0.158	0.140	0.112	0.094	0.073	0.049	0				
9	0.2941	0.183	0.158	0.147	0.133	0.109	0.094	0.078	0.060	0.036	0			

На основании полученных результатов рассчитана стена из трех блоков. Устойчивость системы определяется величиной зоны контакта между

вторым и третьим блоком, которая зависит от $\frac{e_2(t)}{y_0}$; при $\frac{e_2(t)}{y_0} = 0$ система становится изменяемой.

Таблица 2

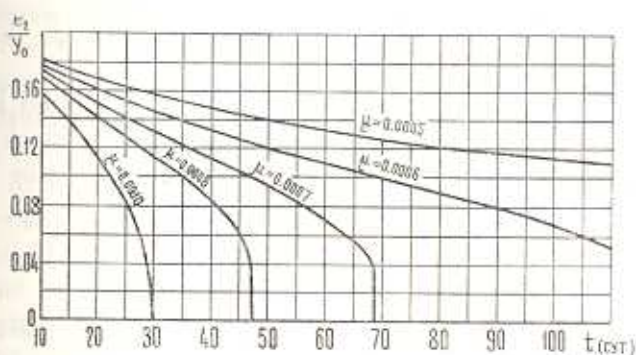
Зависимость $\frac{1}{\varphi} \approx \frac{y_0 \tau}{P Q_0}$ от $\frac{e}{y_0}$

$\frac{e}{y_0}$	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30
$\frac{1}{\varphi}$	40.16	23.6	16.4	12.2	9.4	7.5	6.1	5.1	4.3	3.7	3.3

На фиг. 4 приведены графики $\frac{e_2(t)}{y_0}$ в интервале времени 10—110 сут. Ядро ползучести бетона принято в виде

$$H(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} EC(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(EC_0 + \frac{EA_1}{\tau} \right) (1 - \exp[-\beta(t - \tau)])$$

при числовых значениях параметров $EC_0 = 1.8$; $EA_1 = 2.64$ сут; $\beta = 0.026$. Значение e_0 принято равным $0.2 y_0$.



Фиг. 4.

При заданных реологических параметрах и $\frac{e_0}{y_0}$ устойчивость системы в конечном интервале времени определяется безразмерным параметром $\mu = \frac{y_0 P Q_0}{EA_1}$. Как видно из фиг. 4, характерно резкое падение кривых $\frac{e_2(t)}{y_0}$ при значениях t близких к критическому времени, определяющему момент потери устойчивости.

Պ. Ի. ՎԱՍԻԼՅԵՎ, ՅՈՒ. Գ. ՎԻԼԼԵՐ, Ա. Ա. ՉԵՎԻՆ

ՌԻԳԼԱՆՆՅՈՒՆԱԶԵՎ ԱՌԱԶԳԱՍՈՂՔԱՅԻՆ ԲԵՏՈՆՅԱ ԲԼՈԿԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ
ՍԻՍԵՄԻ ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՍԵՂՄՈՒՄԸ

Ա մ ֆ ւ ֆ ւ ռ ի մ

Դիտարկվում է կարատամով առանձին ուղանկյունաձև բետոնյա բլոկների վերածված սրբիզմայի սեղմումը: Ուսումնասիրվում է սողքի ազդեցությունը սխառեմի կայունության վրա: Բերվում է թվային օրինակ:

CREEP EFFECT ON DISPLACEMENTS OF THE
ECCENTRICALLY COMPRESSED WALL MADE OF
RECTANGULAR CONCRETE BLOCKS

P. I. VASILIEV, Y. G. VILLER, A. A. ZEVIN

S u m m a r y

Discussed is the flat contact problem of compressing two rectangular concrete plates by an eccentric load.

It is shown that the creep has no affect either on the value of a contact zone or on contact voltages.

Based on the contact problem solution, discussed here are the displacements of the eccentrically compressed concrete block wall. It is shown that the creep has a substantial effect on the value of a critical load which leads to the stalling of the system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пощенко В. Н., Трапезников Л. П. Функции влияния для перемещенной границы прямоугольной области. «Изв. ВНИИГ», т. 93, 1970.