ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 4, 1975 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕРМОУПРУГОЙ И ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКАХ, КОГДА ПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Пользуясь минимальными принципами термоупругой и термопластической краевых задач [1], путем подходящего выбора статически возможных полей скоростей изменения напряжений и кинематически возможных полей скоростей деформаций, получаются некоторые неравенства, связывающие решения краевой задачи в несвязанной термоупругой и термопластической постановках. В частности, на базе термоупругих решений получается оценка сверху для решения термопластической краевой задачи.

В качестве механических соотношений принимаются соотношения Прагера [2], учитывающие влияние температуры на поверхность текучести материала. Аналогичные вопросы без учета влияния температуры на поверхность текучести материала рассмотрены в работе [3].

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассмотрим тело объема V, находящееся под действием массовых сил X_i, поверхностных нагрузок P_i, приложенных на части поверхности S_p и перемещений u_{i0}, заданных на остальной части поверхности тела S_u. Будем считать, что эти воздействия и температурное поле тела θ зависят от времени t, но они настолько медленно изменяются, что можно пренебречь инерционными эффектами. Как обычно, будем полагать, что температурное поле тела не зависит от его напряженного состояния и определяется решением соответствующей задачи теплопроводности. С целью упрощения считаем также, что из физико-механических свойств материала только поверхность текучести зависит от температуры.

Соотношения термопластичности примем в виде [2]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}'_{ij} + \dot{\varepsilon}''_{ij} + \alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \tag{1.1}$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = A_{ijnk}\dot{\sigma}_{nk} \tag{1.2}$$

$$\dot{\varepsilon}''_{ij} = gH\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{nk}}\dot{\sigma}_{nk} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta}\right) \tag{1.3}$$

где $\dot{\varepsilon}'_{ij}$ — тензор скоростей упругих деформаций, $\dot{\varepsilon}''_{ij}$ — тензор скоростей пластических деформаций, σ_{ij}, A_{ijnk} — тензоры напряжений и коэффициентов упругости, δ_{ij} — символ Кронекера, α — коэффициент линейного температурного расширения материала. Положительная функция упрочнения H при ассоциированном законе течения (1.3) известным образом определяется в зависимости от формы поверхности текучести $f=0$. Коэффициент g принимает значения

$$g=0, \text{ если } f<0, \text{ а также, если } f=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\leqslant 0 \quad (1.4)$$

и

$$g=1, \text{ если } f=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\geqslant 0 \quad (1.5)$$

Согласно с минимальными принципами термопластической краевой задачи [1] выражения

$$\frac{1}{2}\int_v\left[\dot{\sigma}^*_{ij}(\dot{\varepsilon}^*_{ij}+\alpha\dot{\vartheta}\delta_{ij})+g^*H\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}^*_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\right)\right]dv-\int_{s_u}\dot{\sigma}^*_{ij}n_j\dot{u}_i ds \quad (1.6)$$

и

$$\frac{1}{2}\int_v\left[\dot{\sigma}^0_{ij}(\dot{\varepsilon}^0_{ij}-\alpha\dot{\vartheta}\delta_{ij})-g^0H\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}^0_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}\right)\right]dv-$$

$$-\int_v\dot{X}_i\dot{u}^0_i dv-\int_{s_p}\dot{P}_i\dot{u}^0_i ds \quad (1.7)$$

свои абсолютно минимальные значения получают только при $\dot{\sigma}^*_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}$ (когда статически возможное поле скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}^*_{ij}$ совпадает с действительным полем скоростей $\dot{\sigma}_{ij}$) и при $\dot{\varepsilon}^0_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}$ (когда кинематически возможное поле скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}^0_{ij}$ совпадает с действительным полем $\dot{\varepsilon}_{ij}$)*. Причем связь между $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ и $\dot{\sigma}^*_{ij}$, а также между $\dot{\varepsilon}^0_{ij}$ и $\dot{\sigma}^0_{ij}$ выражается соотношениями (1.1)—(1.3).

Если в (1.6), (1.7) и в соотношениях (1.1), (1.2) положить $H=0$, то получатся соответствующие минимальные принципы для термоупругой краевой задачи.

2. Принимая в качестве статически возможного поля скоростей изменения напряжений действительное поле скоростей изменения термоупругих напряжений ($\dot{\sigma}^*_{ij}=\dot{\sigma}^e_{ij}$), минимальный принцип для скоростей изменения напряжений термопластической краевой задачи представим в виде неравенства

---

* В работе [1] эти минимальные принципы получены при постоянных объемных силах, когда $\dot{X}_i=0$. Можно убедиться в том, что учет изменений объемных сил сказывается только на минимальном принципе для скоростей деформаций и выражается появлением члена $-\int_v\dot{X}_i\dot{u}^0_i dv$.

$$\frac{1}{2}\int\limits_v\left[\dot{\sigma}_{ij}^e\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*e}+\alpha\dot{\theta}\delta_{ij}\right)+g^eH\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^e+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right]dv-\int\limits_{s_u}\dot{\sigma}_{ij}^e n_j\dot{u}_{i0}ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_v\left[\dot{\sigma}_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}+\alpha\dot{\theta}\delta_{ij}\right)+gH\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right]dv+\int\limits_{s_u}\dot{\sigma}_{ij}n_j\dot{u}_{i0}\,ds\geqslant 0 \tag{2.1}$$

Исключая поверхностные интегралы с помощью уравнений виртуальных работ и имея в виду соотношения (1.1)—(1.3), из (2.1) получим

$$\int\limits_v\dot{\sigma}_{ij}^e\dot{\varepsilon}_{ij}^{*e}dv+\int\limits_v H\left[g^e\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^e+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)-g\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}dv-J\geqslant 0 \tag{2.2}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*e}$ — скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если действительные напряжения σ_{ij} изменились бы со скоростями изменения термоупругих напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^e$,

$$J=\int\limits_v\left(2\dot{\sigma}_{ij}^e\dot{\varepsilon}_{ij}^H-\dot{\sigma}_{ij}^e\dot{\varepsilon}_{ij}^{eH}-\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^H\right)dv \tag{2.3}$$

Символом «H» наверху обозначены скорости соответствующих деформаций без температурного расширения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^H=\dot{\varepsilon}_{ij}-\alpha\dot{\theta}\delta_{ij},\quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{eH}=\dot{\varepsilon}_{ij}^e-\alpha\dot{\theta}\delta_{ij} \tag{2.4}$$

Применяя минимальный принцип для скоростей изменения напряжений термоупругой краевой задачи, когда в качестве статически возможного поля принимается действительное поле скоростей изменения напряжений термопластической краевой задачи $\dot{\sigma}_{ij}$ и следуя работе [3], получим

$$J-\int\limits_v\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}dv\geqslant 0 \tag{2.5}$$

Суммируя неравенства (2.2) и (2.5), приходим к следующему неравенству:

$$\int\limits_v\left[\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}+gH\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right]dv\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_v\left[\dot{\sigma}_{ij}^e\dot{\varepsilon}_{ij}^{*e}+g^eH\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^e+\frac{\partial f}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)\right]dv \tag{2.6}$$

С помощью соотношений (1.3) неравенство (2.6) можно представить в виде

$$\int\limits_v\Pi\left(\dot{\sigma}_{ij}\right)dv\leqslant\int\limits_v\Pi\left(\dot{\sigma}_{ij}^e\right)dv \tag{2.7}$$

или

$$\int\limits_v \frac{(\dot{\varepsilon}_{ij})^2}{gH\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^2}\, dv \leqslant \int\limits_v \frac{(\dot{\varepsilon}_{ij}^{e})^2}{g^e H\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)^2}\, dv \tag{2.8}$$

где Π — пластический потенциал

$$\Pi = \frac{1}{2}\, gH\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}\right)^2, \quad \left(\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\sigma}_{ij}}\right) \tag{2.9}$$

Левые части неравенств (2.7) и (2.8), разумеется, можно рассматривать как некоторые интегральные критерии об интенсивности процесса дальнейшего пластического течения в теле при заданных скоростях изменения внешних воздействий.

Неравенства (2.7) и (2.8) позволяют оценить сверху эти критерии на базе термоупругих решений, без анализа действительного упруго-пластического равновесия тела.

3. В качестве кинематически возможного поля скоростей деформаций примем действительное поле скоростей деформаций термоупругой краевой задачи, то есть

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{0} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} \tag{3.1}$$

Тогда для соответствующих скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{0e}$ с помощью соотношений (1.1)—(1.3) получим

$$\dot{\sigma}_{ij}^{0e} = \dot{\sigma}_{ij}^{e} - A_{ijnk}^{-1}\dot{\varepsilon}_{nk}^{0e} \tag{3.2}$$

где A_{ijnk}^{-1} — тензор модулей упругости, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{0e}$ — скорости пластических деформаций, которые имели бы место, если действительные деформации ε_{ij} изменились бы со скоростями термоупругих деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$.

При кинематически возможном поле (3.1) минимальный принцип для скоростей деформаций термопластической краевой задачи выразится неравенством

$$\frac{1}{2}\int\limits_v \left[\dot{\sigma}_{ij}^{0e}\dot{\varepsilon}_{ij}^{eH} - g^{0e}H\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}^{0e} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}\right)\right] dv - \int\limits_v \dot{X}_i\dot{u}_i^e\, dv - \int\limits_{s_p}\dot{P}_i\dot{u}_i^e\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_v \left[\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{H} - gH\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta}\right)\right] dv + \int\limits_v \dot{X}_i\dot{u}_i\, dv + \int\limits_{s_p}\dot{P}_i\dot{u}_i\, ds \geqslant 0$$

$$\tag{3.3}$$

Вычитая из (3.3) два раза

$$\int\limits_v (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^{e})(\dot{\varepsilon}_{ij}^{H} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{eH})\, dv = 0 \tag{3.4}$$

и имея в виду (3.2), с подходящим использованием уравнения виртуальных работ получим

$$J-\int_v\Big[\dot{\sigma}_{ij}^{0e}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*0e}+A_{ijnk}^{-1}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*0e}\,\dot{\varepsilon}_{nk}^{*0e}+g^{0e}H\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\dot{\theta}\Big(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij}^{0e}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\dot{\theta}\Big)-$$

$$-gH\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\dot{\theta}\Big(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\dot{\theta}\Big)\Big]\,dv\geqslant 0 \tag{3.5}$$

Применяя минимальный принцип для скоростей деформаций термоупругой краевой задачи, когда в качестве кинематически возможного поля $\dot{\varepsilon}_{ij}^{0}$ принимается действительное поле скоростей деформаций упруго-пластического тела $\dot{\varepsilon}_{ij}$, после некоторых выкладок, аналогичных вышесделанным, получим

$$-J+\int_v\big(A_{ijnk}^{-1}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{nk}^{*}+\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\big)\,dv\geqslant 0 \tag{3.6}$$

Суммируя неравенства (3.5) и (3.6) и имея в виду (1.3) и (2.9), находим

$$\int_v\big(2\Pi+A_{ijnk}^{-1}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{nk}^{*}\big)\,dv\geqslant\int_v\big[2\Pi\,(\dot{\varepsilon}_{ij}^{0e})+A_{ijnk}^{-1}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*0e}\,\dot{\varepsilon}_{nk}^{*0e}\big]\,dv \tag{3.7}$$

С учетом (2.7) и (3.7) для материалов, которые в упругой области изотропны и линейны, получим

$$\int_v\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,dv\geqslant\int_v\dot{\varepsilon}_{ij}^{*0e}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*0e}\,dv+\frac{1}{G}\int_v\big[\Pi\,(\dot{\varepsilon}_{ij}^{0e})-\Pi\,(\dot{\sigma}_{ij}^{e})\big]\,dv \tag{3.8}$$

где G — модуль сдвига материала.

Неравенство (3.8) можно использовать в качестве оценки решения термопластической краевой задачи снизу.

Аналогичные вопросы в рамках деформационной теории пластичности рассмотрены в работе [4].

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 16 X 1974

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ Ե ՋԵՐՄԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԵՂԱԾ ԿԱՊԸ, ԵՐԲ ՆՅՈՒԹԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԿԱԽՎԱԾ ԵՆ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻՑ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Օգտվելով ջերմաառաձգական և ջերմապլաստիկական դրվածքներով եզրային խնդիրների մինիմալ սկզբունքներից և համապատասխան ձևով ընտ-

ընտրելով լարումների փոփոխման արագությունների ստատիկորեն հնարավոր դաշտը ու դեֆորմացիաների արագությունների կինեմատիկորեն հնարավոր դաշտը ստացվում են որոշ անհավասարություններ, որոնք կապ են հաստատում ջերմաառաձգական և ջերմապլաստիկական դրվածքներով եզրային խնդրի համար ստացված լուծումների մեջ։ Մասնավորապես, ջերմաառաձգական դրվածքով ստացված լուծման հիման վրա ստացվում է ջերմապլաստիկական եզրային խնդրի լուծման վերին գնահատականը։

ON CORRELATION BETWEEN SOLUTIONS OF BOUNDARY PROBLEMS IN THERMOELASTIC AND THERMOPLASTIC STATEMENTS, WITH ELASTIC PROPERTIES OF THE MATERIAL DEPENDING ON TEMPERATURE

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

In terms of minimum principles of thermoelastic and thermoplastic boundary problems, by proper selection of statically and kinematically probable fields of velocity variation in stress and deformation, some inequalities are obtained relating the solutions for boundary problems in statements independent of thermoelasticity and thermoplasticity. In particular, on the basis of thermoelastic solutions the upper estimation for the thermoplastic boundary problem is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mroz Z., Rantecki B.* Variational principles in uncoupled thermoplasticity. Int. J. Eng. Sci. 11, No. 11, 1973.
2. *Прагер В.* Неизотермическое пластическое деформирование. Механика, № 5 (57), 1959.
3. *Киракосян Р. М.* Минимальные принципы и некоторые теоремы об упруго-пластическом равновесии тел при нестационарных силовых и температурных воздействиях. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, № 2, 1973.
4. *Киракосян Р. М.* О связях между решениями краевой задачи деформируемого тела, полученными в упругой и упруго-пластической постановках. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVII, № 1, 1974.