

Г. Е. БАГДАСАРЯН

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПОТОКЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Одной из основных трудностей решения задачи устойчивости упругих тел в потоке проводящего газа при действии магнитного поля является определение действующих на тело сил, вызванных обтекающим потоком и магнитным полем. Задача определения этих сил (аэродинамическое давление в возмущенном потоке и напряжения Максвелла в газе и в вакууме) сравнительно просто разрешается для тонких тел бесконечных размеров, обтекаемых идеально проводящим газом. Что же касается задач флаттера, то решение их и в этом случае весьма затруднительно из-за сложного характера зависимости аэродинамических и магнитных сил от возмущений обтекаемой поверхности.

В общем случае, когда пластинка имеет конечные размеры, определение указанных сил связано с почти непреодолимыми математическими трудностями. Однако, в области больших сверхзвуковых скоростей возможны существенные упрощения, основанные на асимптотических свойствах сверхзвукового потока.

Точное решение задачи флаттера бесконечно длинной цилиндрической оболочки в потоке идеально проводящего газа при наличии продольного магнитного поля получено в работе [1]. Исходя из этого решения, в работе [2] путем предельного перехода получены приближенные формулы для расчета избыточного давления, компоненты индуцированного электромагнитного поля и напряжения Максвелла в газе и указаны границы применения полученных результатов (например, в отношении числа Маха). Формула для давления является некоторым обобщением известной формулы, полученной на основе поршневой теории классической газодинамики на случай магнитогазодинамического обтекания тонких тел.

В настоящей статье на основе результатов работы [2] дается способ определения компоненты Максвеллова тензора напряжений в вакууме. Тем самым получена формула для полного определения величины поверхностных сил, действующих на пластинку в зависимости от упругих перемещений пластинки и от напряженности заданного магнитного поля. Ее можно применять к анализу устойчивости конечных пластин, движущихся в сверхзвуковом потоке проводящего газа. Полученная формула используется для решения конкретных задач устойчивости непроводящих пластин в потоке идеально проводящего газа в присутствии продольного магнитного поля.

1. Рассматривается тонкая упругая пластинка постоянной толщины  $h$ , отнесенная к декартовым координатам  $x, y, z$  так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью  $xu$ .

Пусть пластинка с одной стороны ( $z > h/2$ ) обтекается сверхзвуковым потоком идеально проводящего газа с невозмущенной скоростью  $U$ , направленной вдоль оси  $ox$ . Другая сторона ( $z < -h/2$ ) пластинки соприкасается с вакуумом. Пластинка находится в магнитном поле, вектор напряженности которого направлен параллельно вектору скорости обтекающего потока. Принимается, что магнитные и диэлектрические проницаемости газа и материала пластинки равны единице. Влияния токов смещения на характеристики устойчивости пластинки пренебрегаются. Предполагается также, что упругие перемещения, электромагнитные и аэродинамические возмущения настолько малы, что задачу можно рассматривать в линейной постановке.

Пусть  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной плоскости пластинки. Вследствие этих возмущений в газе и в вакууме индуцируется электромагнитное поле, компоненты которого определяются из уравнения магнитогазодинамики и уравнения Максвелла для вакуума. При этом должны удовлетворяться условия непроницаемости стенок, условия для электромагнитного поля на поверхности раздела двух сред и условия затухания электромагнитных и аэродинамических возмущений на бесконечности. Поставленная таким образом задача допускает точное решение лишь для бесконечных пластин и цилиндрических оболочек [1, 3]. Исходя из этих решений, в работе [2] путем предельного перехода (в случае сверхзвуковых скоростей) при  $z = \frac{h}{2} + 0$  получены следующие приближенные выражения для избыточного давления  $\Delta p$ , нормального компонента индуцированного магнитного поля  $h_z^{(i)}$  и напряжения Максвелла  $T_{zz}^{(i)}$  в газе:

$$\Delta p = \frac{\kappa p_0}{a_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$T_{zz}^{(i)} = - \frac{\kappa p_0}{a_0} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

$$h_z^{(i)} \Rightarrow H_0 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.2)$$

где

$$a_0^2 = \frac{\kappa p_0}{\rho_0}, \quad \lambda = \frac{V_A}{a_0}, \quad V_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} \quad (1.3)$$

В формулах (1.1)—(1.3)  $p_0$  — давление,  $\rho_0$  — плотность невозмущенного газа,  $\kappa$  — показатель политропии,  $H_0$  — напряженность заданного продольного магнитного поля,  $V_A$  — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена,  $a_0$  — скорость звука в газе.

Выражение для нормальной составляющей внешней поверхностной нагрузки  $Z$  в указанной выше задаче имеет вид [1, 3]



$$Z = -\Delta p + T_{zz}^{(i)} - T_{zz}^{(e)}, \quad T_{zz}^{(e)} = -\frac{H_0}{4\pi} h_x^{(e)} \quad (1.4)$$

Здесь  $T_{zz}^{(e)}$  — компонента тензора напряжений Максвелла в вакууме,  $h_x^{(e)}$  — компонента индуцированного в вакууме магнитного поля по направлению оси  $Ox$ .

2. Для окончательного определения поверхностной нагрузки  $Z$ , как видно из (1.4), необходимо иметь значение  $h_x^{(e)}$  на поверхности  $z = -h/2$  пластинки. Для нахождения  $h_x^{(e)}$  необходимо в полупространстве  $z < -h$  решить уравнение Максвелла для вакуума

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} = 0 \quad (2.1)$$

при следующем условии на поверхности  $z = -h$ :

$$h_z^{(e)} = H_0 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2)$$

Обозначим через  $\Omega$  область плоскости  $z=0$ , ограниченную контуром пластинки. Предположим, что пластинка по всему контуру контактирует с идеально проводящей диафрагмой, движение которой задано. Тогда компонента  $h_z^{(e)}$  индуцированного магнитного поля в области  $(x, y) \in \Omega$ ,  $z = -h$  будет иметь значение

$$h_z^{(e)} = [\operatorname{rot} (\vec{u}_0 \times \vec{H}_0)]_z = H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} \quad (x, y) \in \Omega, \quad z = -h$$

где  $\vec{u}_0 (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$  — заданный вектор перемещения точек диафрагмы. Отсюда для неподвижной диафрагмы ( $\vec{u}_0 = 0$ ) получим  $h_z^{(e)} = 0$  в плоской области  $(x, y) \in \Omega$ ,  $z = -h$ .

Введением потенциальной функции  $\varphi$  посредством

$$\vec{h}^{(e)} = \operatorname{grad} \varphi \quad (2.3)$$

задача (2.1)–(2.2) приводится к следующей внешней задаче Неймана для функции  $\varphi$

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = \Psi(x, y, t) = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w}{\partial x} & (x, y) \in \Omega \\ H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x} & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

Из теории потенциала известно, что решение задачи (2.4) может быть представлено в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+h)^2]^{1/2}} \quad (2.5)$$

В частном случае, когда форма колебаний пластинки—цилиндрическая поверхность (плоская задача), решение задачи Неймана представляется посредством логарифмического потенциала простого слоя

$$\varphi(x, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (z+h)^2}} d\xi \quad (2.6)$$

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} H_0 \frac{\partial w}{\partial x}, & |x| \leq a \\ H_0 \frac{\partial u_{0z}}{\partial x}, & |x| > a \end{cases}$$

Здесь  $2a$  — ширина пластинки.

Из (2.5) в силу (2.3) найдем

$$h_x^{(e)}|_{z=-h} = \frac{H_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) \Psi(\xi, \eta, t)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (2.7)$$

Отметим, что в (2.7) интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя (2.7) в (1.4) и учитывая (1.1) и (1.2), для поперечной нагрузки получим следующую окончательную формулу:

$$Z = -\frac{\rho_0 a_0}{\alpha_0} \sqrt{1+\lambda^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^2 \frac{\rho_0 a_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) \Psi(\xi, \eta, t)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (2.8)$$

В случае плоской задачи

$$Z = -\frac{\rho_0 a_0}{\alpha_0} \sqrt{1+\lambda^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^2 \frac{\rho_0 a_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi, t)}{x-\xi} d\xi \quad (2.9)$$

Таким образом, найдено выражение для поперечной нагрузки в зависимости от упругих возмущений и напряженности заданного магнитного поля. Остается подставить (2.8) в уравнения движения пластинки. Тогда задача устойчивости пластинки в потоке проводящего газа при действии продольного магнитного поля приводится к исследованию системы интегродифференциальных уравнений с ядром Коши при обычных условиях закрепления краев пластинки.

3. Рассмотрим задачу устойчивости пластинки-полосы шириной  $2a$  ( $-a \leq x \leq a$ ,  $-\infty < y < \infty$ ), обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком идеально проводящего невязкого газа с невозмущенной скоростью  $U$ , направленной вдоль оси  $ox$ . Пластинка, другая сторона которой соприкасается с вакуумом, находится в магнитном поле с вектором напряженности, параллельным вектору скорости обтекающего потока. Предполагается, что пластинка по краям  $x = \pm a$  жестко заделана и настолько длинная, что реализуется цилиндрическая форма потери устойчивости.

В силу сказанного рассматриваемая задача, согласно (2.9), приводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x_0^4} + 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{a_0} \sqrt{1 + \lambda^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) - \lambda^2 \frac{\rho_0 a_0^2}{a\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial w(\xi_0, t)}{\partial \xi_0} \frac{d\xi_0}{\xi_0 - x_0} = 0 \quad (3.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_0} = 0 \quad \text{при} \quad x_0 = \pm 1 \quad (3.2)$$

В (3.1), (3.2)  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность материала пластинки,  $\varepsilon$  — коэффициент линейного затухания,  $x = ax_0$ ,  $\xi = a\xi_0$  — безразмерные координаты, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Представляя искомый прогиб пластинки в виде

$$w(x_0, t) = f_1(t)(1 - x_0^2)^2 + f_2(t)x_0(1 - x_0^2)^2$$

удовлетворим граничным условиям (3.2), а из уравнения (3.1) методом Бубнова-Галёркина для неизвестных функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + (\chi + \mu \sqrt{1 + \lambda^2}) \frac{df_1}{d\tau} + (1 + \alpha_1 \lambda^2) f_1 + \beta_1 M \sqrt{1 + \lambda^2} f_2 &= 0 \\ \frac{d^2 f_2}{d\tau^2} + (\chi + \mu \sqrt{1 + \lambda^2}) \frac{df_2}{d\tau} + (\gamma^2 + \alpha_2 \lambda^2) f_2 - \beta_2 M \sqrt{1 + \lambda^2} f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь введены следующие безразмерные обозначения:

$$\tau = \Omega_1 t, \quad \chi = \frac{\varepsilon}{\Omega_1}, \quad \mu = \frac{\gamma p_0}{2\rho h a_0 \Omega_1}, \quad \Omega_1^2 = \frac{63D}{4\rho h a^4}$$

$$\Omega_2^2 = \frac{485D}{4\rho h a^4}, \quad \alpha_1 = \frac{35}{8\pi} \frac{\rho_0 a_0^2}{2\rho h a \Omega_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{77}{8\pi} \frac{\rho_0 a_0^2}{2\rho h a \Omega_1^2}$$

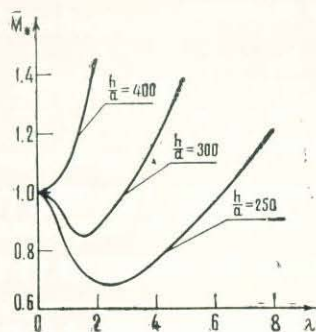


$$M = \frac{U}{a_0}, \quad \beta_1 = \frac{\rho p_0}{4\rho h a \Omega_1^2}, \quad \beta_2 = 11\beta_1, \quad \gamma = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

Из системы (3.3), аналогичным образом как в [4], для критической скорости получим формулу

$$M_*^2 = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \sqrt{1 + \lambda^2}} \left[ \left( \frac{\gamma^2 - 1}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \lambda^2 \right)^2 + \left( \frac{\gamma^2 + 1}{2} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \lambda^2 \right) (\gamma + \sqrt{1 + \lambda^2})^2 \right] \quad (3.4)$$

На фиг. 1 представлен график зависимости критической скорости  $\bar{M}_* = M_*/M_*^0$  ( $M_*^0$  — критическое значение скорости в отсутствие магнитного поля) от параметра  $\lambda$ , характеризующего величину напряженности магнитного поля, при различных значениях  $h/a$ . Кривые, приведенные на фигуре, построены по уравнению (3.4) при  $\rho = 8 \cdot 10^3 \rho_0$ ,  $v_0 = 15 a_0$  ( $v_0$  — скорость звука в материале пластинки).



Фиг. 1.

Из фиг. 1 видно, что магнитное поле со сравнительно малой напряженностью может оказать дестабилизирующее влияние, приводящее к уменьшению критической скорости флаттера.

Аналогичные результаты получены в работах [1, 5] для бесконечной цилиндрической оболочки на основании анализа точных решений.

4. В качестве второго примера рассмотрим задачу устойчивости бесконечной анизотропной слоистой пластинки в сверхзвуковом потоке идеально проводящего газа при наличии магнитного поля с вектором напряженности, параллельным вектору скорости обтекающего потока. Пластинка, собранная из произвольного числа однородных анизотропных слоев, обтекается потоком газа с невозмущенной скоростью  $U$ , направленной вдоль оси  $ox$ . Предполагается, что материал пластинки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной плоскости  $(xy)$ .

В силу принятых предположений для рассматриваемой пластинки имеем следующие исходные уравнения движения [6]

$$\begin{aligned}
 L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -X \\
 L_{12}u + L_{22}v + L_{23}w &= -Y \\
 L_{13}u + L_{23}v + L_{33}w &= Z
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Здесь  $X, Y, Z$  — компоненты внешней нагрузки по направлениям  $x, y, z$ ;  $u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t)$  — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения токов  $(xy)$  координатной плоскости пластинки,  $L_{jk}$  — линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{12} &= c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{22} &= c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
 L_{13} &= -K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\
 L_{23} &= -K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} - 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \\
 L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
 &\quad + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

$c_{jk}, D_{jk}, K_{jk}$  — соответственно жесткости растяжения, изгиба и взаимного влияния слоев пластинки

$$\begin{aligned}
 c_{jk} &= \sum_{s=1}^p B_{jk}^{(s)} (h_s - h_{s-1}) \\
 K_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p B_{jk}^{(s)} (h_s^2 - h_{s-1}^2) \\
 D_{jk} &= \frac{1}{3} \sum_{s=1}^p B_{jk}^{(s)} (h_s^3 - h_{s-1}^3)
 \end{aligned}$$

$h_s$  — расстояние  $s$ -го слоя от координатной плоскости,  $B_{jk}^{(s)}$  — упругие коэффициенты  $s$ -го слоя,  $p$  — число слоев пластинки.

Большой интерес представляют пластинки, составленные из ортотропных слоев так, что направления упругости не совпадают с направлениями

координатных линий  $ox$  и  $oy$ . В этом случае, как известно [6], пластинка качественно работает как произвольно анизотропная. Тогда коэффициенты  $B_{jk}^{(s)}$  имеют вид [6]

$$\begin{aligned}
 B_{11}^{(s)} &= B_{11}^{(s)*} \cos^4 \varphi_s + 2(B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*}) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + B_{22}^{(s)*} \sin^4 \varphi_s \\
 B_{22}^{(s)} &= B_{11}^{(s)*} \sin^4 \varphi_s + 2(B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*}) \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s + B_{22}^{(s)*} \cos^4 \varphi_s \\
 B_{12}^{(s)} &= B_{12}^{(s)*} + [B_{11}^{(s)*} + B_{22}^{(s)*} - 2(B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*})] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s \\
 B_{66}^{(s)} &= B_{66}^{(s)*} + [B_{11}^{(s)*} + B_{22}^{(s)*} - 2(B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*})] \sin^2 \varphi_s \cos^2 \varphi_s \quad (4.3) \\
 B_{16}^{(s)} &= \frac{1}{2} [B_{22}^{(s)*} \sin^2 \varphi_s - B_{11}^{(s)*} \cos^2 \varphi_s + (B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*}) \cos 2\varphi_s] \sin 2\varphi_s \\
 B_{26}^{(s)} &= \frac{1}{2} [B_{22}^{(s)*} \cos^2 \varphi_s - B_{11}^{(s)*} \sin^2 \varphi_s - (B_{12}^{(s)*} + 2B_{66}^{(s)*}) \cos 2\varphi_s] \sin 2\varphi_s
 \end{aligned}$$

где  $\varphi_s$  — угол между главными геометрическими и физическими направлениями  $s$ -го слоя,  $B_{jk}^{(s)*}$  — коэффициенты упругости  $s$ -го слоя при  $\varphi_s = 0$ .

В системе (4.1) заменив  $X, Y, Z$  выражениями [7]

$$\begin{aligned}
 X &= -m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \\
 Y &= -m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \quad (4.4) \\
 Z &= -m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2m_0 \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p - m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\
 &\quad + m_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

получим уравнения устойчивости слоистой анизотропной пластинки в сверхзвуковом потоке идеально проводящего газа при действии магнитного поля.

Здесь  $\varepsilon$  — коэффициент линейного затухания,  $m_0, m_1, m_2$  — приведенные массы

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \frac{1}{g} \sum_{s=1}^p \gamma_s (h_s - h_{s-1}) \\
 m_1 &= \frac{1}{2g} \sum_{s=1}^p \gamma_s (h_s^2 - h_{s-1}^2) \\
 m_2 &= \frac{1}{3g} \sum_{s=1}^p \gamma_s (h_s^3 - h_{s-1}^3)
 \end{aligned}$$

$\gamma_s$  — удельный вес  $s$ -го слоя,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\Delta p$  — суммарное аэродинамическое и магнитное давление, которое согласно (2.8) имеет вид



$$\Delta p = - \frac{\rho_0}{\alpha_0} \sqrt{1 + \lambda^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda^2 \frac{\rho_0 \alpha_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) w'_\xi(\xi, \eta, t)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \quad (4.5)$$

Решение системы (4.1) будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль пластинки [7]

$$\begin{aligned} u &= iu_1 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \\ v &= iu_2 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \\ w &= u_3 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $u_1, u_2, u_3$  — некоторые комплексные коэффициенты,  $\omega$  — частота колебаний,  $k_x = \pi/\lambda_x$ ,  $k_y = \pi/\lambda_y$  — волновые числа,  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  — длины полуволн соответственно в направлениях  $x$  и  $y$ .

Подставляя (4.6) в уравнения (4.1), с учетом (4.4) и (4.5) получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{b_{jk}}{m_0 h^2} - \delta'_{jk} \omega^2 + \delta''_{jk} \left[ \lambda^2 \mu_1 m + 2i\varepsilon\omega + i\mu_2 \left( \omega - \frac{m}{h} U \right) \sqrt{1 + \lambda^2} \right] \right\} u_k = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (4.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$b_{11} = c_{11} m^2 + 2c_{16} mn + c_{66} n^2$$

$$b_{12} = b_{21} = c_{16} m^2 + (c_{12} + c_{66}) mn + c_{26} n^2$$

$$b_{22} = c_{66} m^2 + 2c_{26} mn + c_{22} n^2$$

$$b_{13} = b_{31} = \frac{1}{h} [K_{11} m^3 + 3K_{16} m^2 n + (K_{12} + 2K_{66}) mn^2 + K_{26} n^3]$$

$$b_{23} = b_{32} = \frac{1}{h} [K_{22} n^3 + 3K_{26} n^2 m + (K_{12} + 2K_{66}) m^2 n + K_{16} m^3]$$

$$b_{33} = \frac{1}{h^2} [D_{11} m^4 + 4D_{16} m^3 n + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + 4D_{26} mn^3 + D_{22} n^4] \quad (4.8)$$

$$\delta'_{11} = \delta'_{22} = 1, \quad \delta'_{12} = \delta'_{21} = 0, \quad \delta'_{33} = 1 + \frac{m_2}{m_0} \frac{m^2 + n^2}{h^2}$$

$$\delta'_{31} = \delta'_{13} = \frac{m_1}{m_0} \frac{m}{h}, \quad \delta'_{23} = \delta'_{32} = \frac{m_1}{m_0} \frac{n}{h}$$

$$\mu_1 = \frac{\rho_0 \alpha_0^2}{m_0 h} \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \mu_2 = \frac{\rho_0}{\alpha_0 m_0}$$

$$m = k_x h, \quad n = k_y h, \quad \delta_{jk}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из системы алгебраических однородных уравнений (4.7) можно определить критическую скорость флаттера.

Система (4.7) имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы. Тогда критическая скорость флаттера определяется из уравнения

$$\left| \frac{b_{jk}}{m_0 h^2} - \delta_{jk}^* \omega^2 + \delta_{jk}^* \left[ \lambda^2 \mu_1 m + i(2\varepsilon + \mu_2 \sqrt{1 + \lambda^2}) \omega - i \frac{m \mu_2}{h} \sqrt{1 + \lambda^2} U \right] \right| = 0 \quad (4.9)$$

Невозмущенная форма равновесия пластинки устойчива пока все значения  $\omega$  лежат в левой полуплоскости комплексного переменного. Наименьшее значение  $U$ , при котором один из показателей  $\omega$  переходит на правую полуплоскость, оставаясь при этом комплексным, является критической скоростью флаттера. Скорость флаттера определяется здесь как минимальная скорость, при которой появляются бегущие волны с прогрессирующей амплитудой.

Если частота собственных поперечных колебаний пластинки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей плоскости (колебания с достаточно большим показателем изменчивости), то тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь. В этом случае уравнение (4.9) принимает вид

$$\omega^2 - \Omega_0^2 - A \left[ i \omega (2\varepsilon + \mu_2) \sqrt{1 + \lambda^2} - i \frac{m \mu_2}{h} \sqrt{1 + \lambda^2} U + m \mu_1 \lambda^2 \right] = 0 \quad (4.10)$$

где

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{m_0 h^2} \frac{b_{13} A_{13} - b_{23} A_{23} + b_{33} A_{33}}{\delta_{13}^* A_{13} - \delta_{23}^* A_{23} + \delta_{33}^* A_{33}}$$

квадрат частоты собственных поперечных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля,

$$A = \frac{A_{33}}{\delta_{13}^* A_{13} - \delta_{23}^* A_{23} + \delta_{33}^* A_{33}}$$

$A_{j3}$  — миноры второго порядка детерминанта (4.9).

Поступая аналогичным образом, как в работах [4, 7], из уравнения (4.10) для критической скорости флаттера получим формулу

$$U_{кр} = V \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\mu_2 \sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{\mu_1 A}{\Omega_0^2} \lambda^2} \quad (4.11)$$

где  $V = \Omega_0 h / m$  — фазовая скорость распространения изгибных волн при собственных колебаниях пластинки в вакууме.

Рассматривая формулу (4.11), замечаем, что зависимость критической скорости от параметра  $\lambda$ , как и в предыдущей задаче, может иметь экстремальный характер. При увеличении напряженности магнитного поля критическая скорость вначале уменьшается, достигая минимума для определенного значения  $\lambda$ , после чего начинает возрастать, стабилизируя рассматриваемый процесс.

Наибольший интерес представляют значения аргументов  $m$  и  $n$ , вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение. В общем случае эти значения можно найти численным методом. Для получения результатов в замкнутой форме рассмотрим случай, когда влиянием инерционных членов, возникающих вследствие несимметричного строения пластинки, можно пренебречь. Тогда, если имеет место цилиндрическая форма потери устойчивости, то  $n=0$ , а для критической скорости, согласно (4.8) и (4.11), получим следующее выражение:

$$U_* = \alpha h \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\mu_0 \sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \sqrt{m^2 + b \frac{\lambda^2}{m}} \quad (4.12)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{1}{m_0 h^4} \left[ D_{11} + \frac{2K_{11}K_{16}c_{16} - K_{12}^2c_{66} - K_{16}^2c_{11}}{c_{11}c_{66} - c_{16}^2} \right], \quad b = \frac{\rho_0 \alpha_0^2}{m_0 h \alpha^2} \quad (4.13)$$

Из (4.12) видно, что присутствие магнитного поля нарушает монотонную зависимость критической скорости от длины волны в направлении потока. Критическая скорость принимает минимальное значение при  $m^3 = b\lambda^2/2$  и равняется

$$\min_{(m)} U_* = \sqrt{3} \alpha h \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\mu_0 \sqrt{1 + \lambda^2}} \right) \left( \frac{b\lambda^2}{2} \right)^{1/3} \quad (4.14)$$

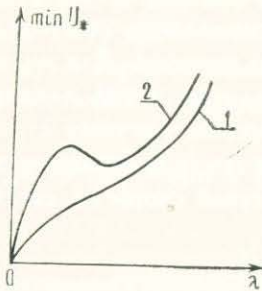
Формулы (4.13), (4.14) показывают, что минимальное значение критической скорости, а также величина параметра  $m$  (следовательно, и длина полуволны) существенным образом зависят от напряженности магнитного поля и согласно (4.3) являются периодическими функциями углов ориентации  $\varphi_s$  каждого слоя в теле пластинки.

На фиг. 2 приведена качественная картина изменения минимальной критической скорости в зависимости от  $\lambda$ . Кривая I соответствует случаю малого конструкционного затухания.

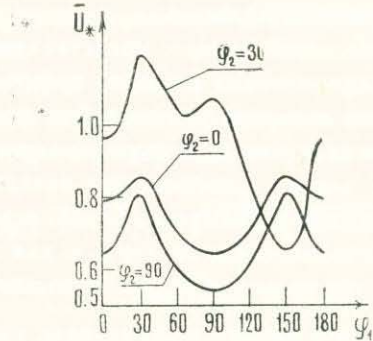
Для иллюстрации зависимости минимальной критической скорости от ориентации слоев пластинки, рассмотрим двухслойную пластинку, слои которой имеют одинаковые толщины, изготовлены из одинакового ортотропного материала, но различно ориентированы по отношению к главным геометрическим направлениям. Пусть ориентация первого слоя характеризуется углом  $\varphi_1$ , а второго слоя — углом  $\varphi_2$ .



На фиг. 3 приведен график зависимости  $\bar{U}_* = \beta \min_{(m)} U_*$ ,  $\beta = (h_1/m_0)^{-1/2} \cdot [3] \cdot [20B\varphi_0 V_A^2]^{-1/3}$  от углов ориентации  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при  $\varepsilon = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $B_{jk}^{(1)} = B_{jk}^{(2)}$ ,  $B_{66}^{(s)} = 0.5B$ ,  $B_{11}^{(s)} = 10B_{22}^{(s)} = 10B$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из фиг. 3 видно, что если в случае однослойной цилиндрической оболочки максимальные значения минимальной критической скорости получаются при совпадении главных геометрических и физических направлений [5], то здесь они получатся внутри прямоугольника  $[0 \leq \varphi_1 \leq \pi; 0 \leq \varphi_2 \leq \pi]$ . Значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , при которых  $\min_{(m)} U_*$  принимает максимальные значения,

существенно зависят как от напряженности магнитного поля, так и от отношения упругих постоянных материала слоев пластинки. От указанных величин зависят также значения  $\max_{(\varphi_1, \varphi_2)} [\min_{(m)} U_*]$ .

Таким образом, при заданном материале слоев и при заданном магнитном поле, варьируя углами ориентации материала слоев, можно значительно расширить область устойчивости пластинки.

Институт механики АН  
Армянской ССР

Поступила 22 I 1975

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԱՋԻ ՀՈՍԱՆՔԻ ՄԵՋ ԳՏՆՎՈՂ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ն փ ու մ

Հոդվածում, ելնելով գերձայնային հոսանքի ասիմպտոտիկ հատկություններից, ստացվել է բանաձև մագնիսական դաշտի և դադի հոսանքի ազդեցության շնորհիվ սալի վրա առաջացած ճնշումը հաշվելու համար:

Ստացված բանաձևը կիրառվում է տարբեր տիպի սալերի կայունությունը ուսումնասիրելիս երկայնական մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ստացվել են բանաձևեր կրիտիկական արագության հաշվման համար: Ուսումնասիրվել է մագնիսական դաշտի լարվածության և սալի անիզոտրո-

պուճյան ուղղութիւնների փոփոխութեան ազդեցութիւնը կրիտիկական արագ-  
 դուճյան մեծութեան վրա: Յուշց է արված, որ նշված մեծութիւնների միջև  
 կապակցութիւնը որոշ պայմանների դեպքում ունի էքստրեմալ բնույթ:

## ON STABILITY OF AN ELASTIC PLATE IN A FLOW OF CONDUCTING GAS IN A MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

### S u m m a r y

In terms of asymptotic properties of supersonic flow the formula is derived to determine pressure of a magnetic field and a gas flow into a plate.

The formula is applied to investigate the stability of a variety of plates in a magnetic field. Formulas to determine critical velocity are also obtained.

The effect of alteration both in the magnetic field strength and in anisotropy directions on the value of critical velocity is examined. This dependence is shown to be extremal under certain conditions.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Флаттер цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. МТТ, № 6, 1966.
2. Багдасарян Г. Е. Об устойчивости проводящей цилиндрической оболочки в потоке проводящего газа в присутствии магнитного поля. МТТ, № 1, 1975.
3. Kaliski S., Solarz Z. Aero-magneto-flutter of a plate flown past by a perfectly conducting gas in a magnetic field with isotropic action. Vibr. Probl., vol. 3, № 3, 1962.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
5. Аванесян Г. Г. Флаттер анизотропной цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. В сб. «Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ростов на Дону, 1971». «Наука», М., 1973.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
7. Багдасарян Г. Е. Устойчивость анизотропной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Докл. АН Арм. ССР, т. XXXIX, № 5, 1964.