

Ս. Ա. ՄԿՐՏՅԱՆ

ՓԼԱՏՏԵՐ ՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷԻ ՓԼԱՏԻՆԿԻ ԵՎ ՓՈՏՈՔԵ
 ՏԼԱԲՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷԳՈ ԳԱԶԱ ՓՐԻ ԴԵՅԻՄՎԻ
 ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ

ԵՎ ՆԱՏՈՅԱՇԷՐ ԲԱԲՈՒՄԵ ՐԱՏՄԱՏՐԻՎԱԾԵՆ ԶԱԴԱԿԱ ՍՏԱՅԻՄՎՈՒԹՅԱՆ ՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷԻ ՓԼԱՏԻՆԿԻ, ՈՒՅԵԱԿԱՅՈՒ ՏՎԵՐՅԱԶՎՈՒԿՈՎ ՓՈՏՈՔՈՒ ՏԼԱԲՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷԳՈ ՏՅԻՄԱԵՄՈՒ ՆԵՎՅԱԿՈՒ ՈՆԻԶԻՐՈՎԱՆՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ ԵՎ ՓՈՏՈՔՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ:

ՆԱ ՕՍՏՈՒՄ ՍՏԱՅԻՄՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱԳՆԻՏՈՒՍՏՐՈՒԳՈՒՄԻ [1, 2] ԵՎ ՍՏԱՅԻՄՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱԳՆԻՏՈՒԳՈՒԴԻՆԱՄԻԿԱ [3] ՕՐԵԴԵԼԱԾԵՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿԵՍԻ ՎՅԱԿՐԱՅԻՆ ԱՐԱՅՈՒՆՆԵՐ ԱՐԱՅԻՆ ԿՐԻՏԻԿԵՍԻ ՏՐՈՒՏՅԱՆ ՓԼԱՏՏԵՐԱ:

ԻՍՏԵԼՈՒԾԵՆ ԱՎԻՅԱՆԻՄՈՒՄԻ ԶԱԴԱՆՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ, Ա ԿԱՏՅԵՎ ՓՐՈՎՈԴԻՄՈՒՄԻ ԳԱԶԱ ԵՎ ՄԱՏԵՐԻԱԼԱ ՓԼԱՏԻՆԿԻ ՆԱ ԿՐԻՏԻԿԵՍՈՒ ՏՐՈՒՏՅԱՆ ՓԼԱՏՏԵՐԱ:

1. ՄՍՏՅԵՎ ԲԵՏՈՒՄԵՆՆԱԿԱ ԻԶՈՏՐՈՒՄԻ ՓԼԱՏԻՆԿԱ ՍՏԱՅԻՄՎՈՒՄԻ ԹՈՒՍՈՒՄԻ 2h, ՆԱԴՈՒՄՎԱՆԻՄԱՆ ԻԶ ՄԱՏԵՐԻԱԼԱ Տ ԿՈՆԵՄՆԱԿԱ ԷԼԵԿՏՐՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷՄՈՒ, ՈՒՆԵՍԵՆԱ Կ ՕՐՏՈԳՈՆԱԿԱԿԱՆ ԿՈՕՐԴԻՆԱՏԱՆ (x, y, z): ՓԼԱՏԻՆԿԱ ՏՈՒՐԿԱՏԱԿԵՆ Ա ՕՈՒՄՈՒՄԻ, Ա Տ ԴՐՈՒԳՈՒ ՄՈՒՄԻ ՈՒՅԵԱԿԱՅՈՒ ՏՎԵՐՅԱԶՎՈՒԿՈՎ ՓՈՏՈՔՈՒ ՏԼԱԲՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷԳՈ ՏՅԻՄԱԵՄՈՒ ՆԵՎՅԱԿՈՒ ՈՆԻԶԻՐՈՎԱՆՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ Տ ՆԵՎՈՒՄՎՈՒՄԻ ՏՐՈՒՏՅԱՆ ՍՏՈՒՄՈՒՄՈՒ \vec{U} , ՆԱՐԱՎԵՐՈՒՄԻ ՎՈՒԼՅՈՒ ՕՒՔԱ ՕՒՔԱ: ՆԱ ՓԼԱՏԻՆԿԱ ԴԵՅԻՄՎԻՄՈՒՄԻ ՎՆԵՇՆԵՎ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ Տ ԶԱԴԱՆՈՒ ՎԵԿՏՈՐ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՆԱՐՅԱՅՈՒՄՈՒՄԻ $\vec{H}_0 (H_{0x}, 0, H_{0z})$:

ՓՐԻՆԻՄԱԾԵՆ, ՉՏՈ ՄԱԳՆԻՏՆԵՎ ԵՎ ԴԻԱԷԼԵԿՏՐԻԿԵՍԻ ՓՐՈՒՅԱԿՈՒՄՈՒՄԻ ԳԱԶԱ ԵՎ ՄԱՏԵՐԻԱԼԱ ՓԼԱՏԻՆԿԻ ԲԱՐԱՅԻՆ ԵԴԻՆԻՄՈՒՄԻ:

ՍՏՐՈՒՄԻ ԵՎ ԷԼԵԿՏՐՄԱԳՆԻՏՆԱԿԱ ՄԱՏԵՐԻԱԼԱ ՓԼԱՏԻՆԿԻ ԽԱՐԱԿՏԵՐԻՅՈՒՄԻ: ՄՈԴՄՈՒՄ ՍՏՐՈՒՄԻ E, ԿՈԵՔՐԻՄԵՆՏՈՒ ՄԱՍՏՈՆԱՆ v, ՓԼՈՒՏՅՈՒՄՈՒ ρ , ԷԼԵԿՏՐՓՐՈՎՈԴՅԱՇԷՄՈՒ σ :

Վ ՕՒՄՈՒՄՈՒՄՈՒ ՓԼԱՏԻՆԿԻ ՓՐԻՆԻՄԱԾԵՆ ԳԻՓՈՏԵԶԱ ՄԱԳՆԻՏՈՒՍՏՐՈՒԳՈՒՄԻ ՏՈՒՔԻ ՄԵԼԱ [1, 2], ԿՈՒՅԵՎ ԶԱԴԱՆՈՒ ՍԻՏԵՄԱ ԿՈՕՐԴԻՆԱՏ ԱՆԱԼԻՏԻԿԵՍԻ ԶԱՓԻՍԵՆ Ա ՏԵԼՅՈՒՄՈՒՄԻ Վ ԵԴՆՈՒՄՈՒՄԻ:

$$\begin{aligned} u_x &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, & u_y &= v - z \frac{\partial w}{\partial y}, & u_z &= w(x, y, t) \\ e_x &= \varphi(x, y, t), & e_y &= \psi(x, y, t), & h_z &= f(x, y, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

ԶԵՏՅԵՎ $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ — ԻՏԿՈՒՄՅԵՎ ՏԱՆԵՆՑԻԱԿԱԿԱՆ ԵՎ ՆՈՐՄԱԿԱԿԱՆ ՓԵՐԵՄԵՇՈՒՄՆԵՐ ՄՈՒՔԱՆ ՏՐԵՄԻՆԱԿԱ ՓՈՒՅՈՒՄՈՒ ՓԼԱՏԻՆԿԻ, (u_x, u_y, u_z) — ՓԵՐԵՄԵՇՈՒՄՆԵՐ ՓՐՈՒԶՎՈՒՄՈՒ ՄՈՒՔԱ ՓԼԱՏԻՆԿԻ, φ, ψ — ԻՏԿՈՒՄՅԵՎ ՏԱՆԵՆՑԻԱԿԱԿԱՆ ԿՈՒՄՈՒՄՈՒՄՈՒ ՄԱԳՆԻՏՆՈՒ ՓՈԼՅԱ:

ческого поля, f — искомая нормальная компонента индуцированного магнитного поля во внутренней области (в пластинке).

Принимается также, что упругие, газодинамические и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

Для рассматриваемой задачи линеаризованные дифференциальные уравнения, описывающие движение ионизированного газа в случае изотермического состояния, записываются в виде [3]

$$\text{grad div } \vec{v} = \frac{1}{a_0^2} \left[\frac{d}{dt} \vec{v} - \frac{\sigma_0}{\rho_0 c^2} (\vec{v} \times \vec{H}_0) \times \vec{H}_0 \right] \\ \frac{dP}{dt} + a_0^2 \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \vec{h}^{(1)} = \frac{4\pi\sigma_0}{c^2} (\vec{v} \times \vec{H}_0), \quad \text{div } \vec{h}^{(1)} = 0 \quad (z > h)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \text{grad}$, $\vec{h}^{(1)}$ и \vec{H}_0 — векторы напряженности магнитного поля в возмущенном и невозмущенном состояниях соответственно, \vec{v} — вектор скорости, ρ_0 — плотность, σ_0 — проводимость, p — избыточное давление газа, a_0 — скорость звука для невозмущенного потока, c — электродинамическая постоянная.

Дифференциальные уравнения магнитоупругих колебаний пластинки, полученные на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, имеют вид [1, 2]

$$D\Delta\Delta w + \frac{2zh^2 H_{0x}}{3c} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{2zh^2}{3c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(H_{0z}^2 \Delta w - \right. \\ \left. - H_{0x}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{2zh H_{0x}}{c} \left(\psi + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z + \\ + \frac{2zh H_{0x} H_{0z}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[u + \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = \frac{(1-\nu^2)\sigma H_{0z}}{Ec} \left(\frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{H_{0x}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \psi \right) \quad (1.3) \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \\ = \frac{(1-\nu^2)\sigma H_{0z}}{Ec} \left(\varphi + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{(1-\nu^2) H_{0x}}{4\pi E} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi + \frac{H_{0x}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\varphi + \frac{H_{0z}}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Здесь h_x^+ , h_x^- и h_y^+ , h_y^- — значения компонент напряженностей тангенциального индуцированного магнитного поля на поверхностях пластинки $z = h$ и $z = -h$.

Выражение для нормальной составляющей внешней поверхностной нагрузки Z в рассматриваемой задаче имеет вид [4—5]

$$Z = -2\epsilon h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - p \quad (1.4)$$

где ε — коэффициент линейного затухания.

Системы (1.2) и (1.3) должны рассматриваться совместно с уравнениями электродинамики во внешней области для вакуума [2]

$$\operatorname{rot} \vec{h}^{(2)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{e}^{(2)} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{e}^{(2)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(2)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h}^{(2)} = 0 \quad (z < -h) \quad (1.5)$$

где $\vec{h}^{(2)}$ и $\vec{e}^{(2)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей в области $z < -h$.

Решения приведенных уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) должны удовлетворять общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях пластинки. Условие непроницаемости имеет вид

$$v_z = \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{при } z = h \quad (1.6)$$

Отметим, что в системе (1.2) первое уравнение является независимым и если известно его решение \vec{v} , то можно построить решение остальных уравнений. Иначе говоря, гидродинамическая и электромагнитная задачи частично распались. В случае, когда заданное магнитное поле перпендикулярно срединной поверхности пластинки, из (1.3) следует, что индуцированное электромагнитное поле не входит в уравнение движения пластинки (первое уравнение системы (1.3)). Следовательно, при действии поперечного магнитного поля задача устойчивости пластинки приводится к решению первого уравнения (1.3) совместно с первым и вторым уравнениями системы (1.2) с граничным условием (1.6), так как остальные уравнения могут быть опущены.

Граничные условия для компонент электромагнитного поля в случае действия продольного магнитного поля принимаются в следующем виде:

$$h_z^{(1)} = f(x, y, t) \quad \text{при } z = h \quad (1.7)$$

$$h_z^{(2)} = f(x, y, t), \quad e_x^{(2)} = \varphi(x, y, t), \quad e_y^{(2)} = \psi(x, y, t) \quad \text{при } z = -h$$

Таким образом, исконая задача устойчивости пластинки свелась к совместному интегрированию систем уравнений (1.2), (1.3), (1.5), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (1.6), (1.7) и начальным условиям

$$w = w_0 \Phi(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1 \Psi(x, y) \quad \text{при } t = 0 \quad (1.8)$$

2. Решения уравнений (1.2), (1.3) и (1.5) представим в виде

$$F(x, y, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{kn}(z, t) \exp[i(\xi_k x + \eta_n y)] \quad (2.1)$$

$$R(x, y, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{kn}(t) \exp[i(\xi_k x + \eta_n y)]$$

Здесь $\xi_k = k\pi/\lambda_x$, $\eta_n = n\pi/\lambda_y$ — волновые числа, λ_x и λ_y — длины полу-волн соответственно по направлениям осей ox и oy .

Подставляя (2.1) в (1.2), (1.3), (1.5) и применяя преобразование Лапласа по переменной t [6], с учетом (1.4), (1.8) для определения преобразованного электромагнитного, магнитогидродинамического поля и преобразованного прогиба пластинки получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$[\Omega_{kn}^2 + s^2 + (\varepsilon + 2\beta_0^2 \Omega_{kn}) s] w_{kn}^* = \alpha_{kn} (\varepsilon + s + 2\beta_0^2 \Omega_{kn}) + b_{kn} - \frac{1}{2\gamma h} p_{kn}^*(h)$$

$$i \xi_k \frac{dv_{knz}^*}{dz} - \xi_k \eta_n v_{kny}^* - \left[\xi_k^2 + \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} + m \theta_k(s) \right] v_{knx}^* = 0$$

$$i \eta_n \frac{dv_{knz}^*}{dz} - \xi_k \eta_n v_{knx}^* - \left[\eta_n^2 + \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} + m \theta_k(s) \right] v_{kny}^* = 0$$

$$\frac{d^2 v_{knz}^*}{dz^2} + i \xi_k \frac{dv_{knx}^*}{dz} + i \eta_n \frac{dv_{kny}^*}{dz} - \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} v_{knz}^* = 0$$

$$\theta_k(s) p_{kn}^*(z) + \alpha_0^2 \left(\frac{dv_{knz}^*}{dz} + i \xi_k v_{knx}^* + i \eta_n v_{kny}^* \right) = 0$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \Omega_{kn}^2 + s^2 + s \left[\varepsilon + \frac{\sigma H_{0x}^2}{\rho c^2} \left(1 + \frac{h^2 \gamma_n^2}{3} \right) \right] \right\} w_{kn}^* + \frac{\sigma H_{0x}}{\rho c} \dot{\psi}_{kn}^* - \\
 & - \frac{\sigma h^2 \gamma_n H_{0x}}{3 \rho c} (\xi_k \dot{\varphi}_{kn}^* + \gamma_n \dot{\psi}_{kn}^*) = b_{kn} - \frac{1}{2 \rho h} p_{kn}^*(h) + \\
 & + a_{kn} \left[\varepsilon + s + \frac{\sigma H_{0x}^2}{\rho c^2} \left(1 + \frac{h^2 \gamma_n^2}{3} \right) \right] \\
 & \quad \xi_k \dot{\psi}_{kn}^* - \gamma_n \dot{\varphi}_{kn}^* - \frac{is}{c} f_{kn}^* = 0 \\
 & i \xi_k f_{kn}^* + \frac{4 \pi \sigma}{s} \left(\dot{\psi}_{kn}^* + \frac{s H_{0x}}{c} w_{kn}^* \right) = \frac{h_{kny}^* - h_{kny}^*}{2h} + \frac{4 \pi \sigma a_{kn} H_{0x}}{c^2} \\
 & \quad i \gamma_n f_{kn}^* - \frac{4 \pi \sigma}{c} \dot{\varphi}_{kn}^* = \frac{h_{kny}^* - h_{kny}^*}{2h} \\
 & i \gamma_n h_{kny}^{(1)*} - \frac{dh_{kny}^{(1)*}}{dz} = 0, \quad i \xi_k h_{kny}^{(1)*} + i \gamma_n h_{kny}^{(1)*} + \frac{dh_{kny}^{(1)*}}{dz} = 0 \quad (2.3) \\
 & i \xi_k h_{kny}^{(1)*} - i \gamma_n h_{kny}^{(1)*} = -\frac{4 \pi \sigma_0 H_{0x}}{c^2} v_{kny}^*, \quad \frac{dh_{kny}^{(1)*}}{dz} - i \xi_k h_{kny}^{(1)*} = \frac{4 \pi \sigma_0 H_{0x}}{c^2} v_{kny}^* \\
 & \quad i \xi_k \frac{dv_{kny}^*}{dz} - \xi_k \gamma_n v_{kny}^* - \left[\varepsilon_k^2 + \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} \right] v_{kny}^* = 0 \\
 & i \gamma_n \frac{dv_{kny}^*}{dz} - \xi_k \gamma_n v_{kny}^* - \left[\gamma_n^2 + \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} + m \theta_k(s) \right] v_{kny}^* = 0 \\
 & \frac{d^2 v_{kny}^*}{dz^2} + i \xi_k \frac{dv_{kny}^*}{dz} + i \gamma_n \frac{dv_{kny}^*}{dz} - \left[m \theta_k(s) + \frac{\theta_k^2(s)}{\alpha_0^2} \right] v_{kny}^* = 0 \\
 & \quad \theta_k(s) p_{kn}^*(z) + \alpha_0^2 \rho_0 \left[\frac{dv_{kny}^*}{dz} + i \xi_k v_{kny}^* + i \gamma_n v_{kny}^* \right] = 0 \\
 & \frac{d^2 h_{kny}^{(2)*}}{dz^2} - \gamma_{kn}^2(s) h_{kny}^{(2)*} = 0, \quad \frac{d^2 e_{kny}^{(2)*}}{dz^2} - \gamma_{kn}^2(s) e_{kny}^{(2)*} = 0 \\
 & \frac{d^2 e_{kny}^{(2)*}}{dz^2} - \gamma_{kn}^2(s) e_{kny}^{(2)*} = 0, \quad i \gamma_n h_{kny}^{(2)*} - \frac{dh_{kny}^{(2)*}}{dz} = \frac{s}{c} e_{kny}^{(2)*} \\
 & \frac{dh_{kny}^{(2)*}}{dz} - i \xi_k h_{kny}^{(2)*} = \frac{s}{c} e_{kny}^{(2)*}, \quad i \xi_k h_{kny}^{(2)*} - i \gamma_n h_{kny}^{(2)*} = \frac{s}{c} e_{kny}^{(2)*}
 \end{aligned}$$

В (2.2), (2.3) $\Omega_{kn} = (\varepsilon_k^2 + \gamma_n^2) \sqrt{D/2\rho h}$ — частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

$$a_{kn} = \frac{w_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x, y) \exp[-i(\xi_k x + \gamma_n y)] dx dy$$

$$b_{kn} = \frac{w_1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(x, y) \exp[-i(\xi_k x + \gamma_n y)] dx dy$$

$$F_{kn}^*(z, s) = \int_0^{\infty} F_{kn}(z, t) \exp(-st) dt$$

$$R_{kn}^*(s) = \int_0^{\infty} R_{kn}(t) \exp(-st) dt$$

$$\beta_0 = \frac{h^2 \alpha H_0^2}{3c^2 \sqrt{2D_0} h}, \quad \gamma_k(s) = s + i\xi_k U, \quad m = \frac{\tau_0 H_0^2}{\rho_0 a_0^2 c^2}$$

$$\gamma_{ikn}^2(s) = \xi_k^2 + \gamma_n^2 + \frac{s^2}{c^2}$$

Соответствующие граничные условия (1.6) и (1.7), с учетом (2.1), после преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} v_{knz}^* &= (s + i\xi_k U) w_{kn}^* - a_{kn}, & h_{knz}^{(1)*} &= f_{kn}^* \quad \text{при } z = h \\ h_{knz}^{(2)*} &= f_{kn}^*, & e_{knz}^{(2)*} &= \varphi_{kn}^*, & e_{kny}^{(2)*} &= \psi_{kn}^* \quad \text{при } z = -h \end{aligned} \quad (2.4)$$

Найдя общее решение системы (2.2), (2.3), удовлетворяя граничным условиям (2.4) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим постоянные интегрирования и, следовательно, преобразованное электромагнитное, магнитогазодинамическое поле и преобразованный прогиб пластинки:

при действии поперечного магнитного поля

$$\begin{aligned} w_{kn}^* &= \frac{\Delta_{kn}^0(s)}{\Delta_{0kn}(s)}, & v_{knz}^* &= \bar{w}_{kn}^* \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ v_{knz}^* &= \frac{\xi_k \gamma_{0kn}(s) \bar{w}_{kn}^*}{\gamma_{kn}^2(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ v_{kny}^* &= \frac{\gamma_n \gamma_{0kn}(s) \bar{w}_{kn}^*}{\gamma_{kn}^2(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \\ p_{kn}^* &= \frac{\alpha_0 \rho_0 \bar{w}_{kn}^*}{\gamma_n \gamma_{0kn}(s)} \exp[-i\gamma_{0kn}(s)(z-h)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

при действии продольного магнитного поля

$$\begin{aligned}
 w_{kn}^* &= \frac{\Delta_{kn}^1(s)}{\Delta_{1kn}(s)}, & f_{kn}^* &= \frac{ic}{s} (\gamma_{in} \varphi_{kn}^* - \tilde{\varepsilon}_k \psi_{kn}^*) \\
 \varphi_{kn}^* &= - \frac{\tilde{\varepsilon}_k \gamma_{in} C_{kn}(s)}{D_{kn}(s)} \{A_{kn}(s) \varepsilon_{1kn}(s) D_{kn}(s) + i \gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + \\
 &\quad + i [\gamma_{1kn}(s) - i \nu_{0kn}] [\nu_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]\} \\
 \psi_{kn}^* &= - \frac{C_{kn}(s)}{D_{kn}(s)} [\varepsilon_{1kn}(s) D_{kn}(s) [\gamma_{in}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] - \\
 &\quad - i \tilde{\varepsilon}_k^2 \gamma_{1kn}(s) B_{kn}(s) + i \gamma_{in}^2 [\gamma_{1kn}(s) - i \nu_{0kn}] [\nu_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]] \\
 h_{kxz}^{(1)*} &= - \frac{i \tilde{\varepsilon}_k}{\gamma_{0kn}} [f_{kn}^* - i \tilde{\varepsilon}_k G_{kn}(s)] \exp[-\nu_{0kn}(z-h)] + \\
 &\quad + \frac{i G_{kn}(s)}{\nu_{0kn}^2 \gamma_{1kn}(s)} \{ \tilde{\varepsilon}_k^2 \gamma_{1kn}^2(s) - \gamma_{in}^2 [\gamma_{1kn}^2(s) + \nu_{0kn}^2] \} \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{kny}^{(1)*} &= - \frac{i \gamma_{in}}{\nu_{0kn}} [f_{kn}^* - i \tilde{\varepsilon}_k \tilde{G}_{kn}(s)] \exp[-\nu_{0kn}(z-h)] + \\
 &\quad + \frac{i \tilde{\varepsilon}_k \gamma_{in} \tilde{G}_{kn}(s)}{\nu_{0kn}^2 \gamma_{1kn}(s)} [2 \nu_{1kn}^2(s) + \nu_{0kn}^2] \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \quad (2.6) \\
 h_{kxz}^{(1)*} &= [f_{kn}^* - i \tilde{\varepsilon}_k G_{kn}(s)] \exp[\nu_{0kn}(z-h)] + i \tilde{\varepsilon}_k G_{kn}(s) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 v_{kxz}^* &= \frac{\tilde{\varepsilon}_k \bar{w}_{kn}}{\gamma_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i \bar{m}}{\theta_0} \right) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 v_{kny}^* &= \frac{\gamma_{in} \bar{w}_{kn}}{\gamma_{1kn}(s)} \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 p_{kn}^* &= \frac{a_0 \beta_0 \theta_0 \bar{w}_{kn}}{i \nu_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i \bar{m}}{\theta_0} \right) \exp[-i \gamma_{1kn}(s)(z-h)] \\
 h_{kxz}^{(2)*} &= f_{kn}^* \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)], & e_{kxz}^{(2)*} &= \varphi_{kn}^* \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)] \\
 e_{kny}^{(2)*} &= \psi_{kn}^* \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)] \\
 e_{kxz}^{(2)*} &= - \frac{i}{\nu_{1kn}(s)} (\tilde{\varepsilon}_k \varphi_{kn}^* + \gamma_{in} \psi_{kn}^*) \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)] \\
 h_{kxz}^{(2)*} &= \frac{1}{\gamma_{1kn}(s)} \left(\tilde{\varepsilon}_k f_{kn}^* + \frac{s}{c} \psi_{kn}^* \right) \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)] \\
 h_{kny}^{(2)*} &= \frac{1}{\gamma_{1kn}(s)} \left(i \gamma_{in} f_{kn}^* - \frac{s}{c} \varphi_{kn}^* \right) \exp[\nu_{1kn}(s)(z+h)]
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{0kn}(s) = \Omega_{kn}^2 + s^2 + s(\varepsilon + 2\beta_0^2 \Omega_{kn}) + \frac{i a_0^2 \beta_0^2}{2\varphi h^2 \gamma_{0kn}(s)}$$

$$\Delta_{kn}^0(s) = b_{kn} + a_{kn} \left[\varepsilon + s + 2\beta_0^2 \Omega_{kn} + \frac{a_0 \beta_0^2}{2\varphi h^2 \gamma_{0kn}(s)} \right]$$

$$\Delta_{1kn}(s) = \Omega_{kn}^2 + s^2 + s \delta_{0kn}(s) + \frac{i a_0 \beta_0}{k_x} \gamma_{1kn}(s)$$

$$\Delta_{kn}^1(s) = b_{kn} + a_{kn} [\delta_{0kn}(s) + \gamma_{1kn}(s)]$$

$$\delta_{0kn}(s) = \varepsilon + \frac{\varepsilon H_{0r}^2}{\rho c^2} \left(1 - \frac{h^2 \gamma_{in}^2}{3} \right) - \frac{\varepsilon A_0 [\gamma_{in}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]}{B_{kn}(s) [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]}$$

$$\delta_{1kn}(s) = \frac{a_0 \beta_0^2}{2\varphi h^2 \gamma_{1kn}(s)} \left(1 - \frac{i\bar{m}}{\beta_0} \right) + \frac{\varepsilon A_0 h^2 \gamma_{in}^2}{3} \left[1 + \frac{i\varepsilon_0}{2h\varepsilon \gamma_{1kn}(s)} \right] +$$

$$+ \frac{i\varepsilon_0 A_0}{B_{kn}(s) D_{kn}(s) [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]} [\varepsilon_k^2 B_{kn}(s) \gamma_{1kn}(s) -$$

$$- \gamma_{in}^2 [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)] [\gamma_{1kn}(s) - i\nu_{0kn}]] \quad (2.7)$$

$$A_{kn}(s) = 1 + \frac{\nu_{0kn} + \nu_{1kn}(s)}{2h\nu_{0kn} \nu_{1kn}(s)}, \quad B_{kn}(s) = \frac{4\pi\varepsilon s}{c^2} + \frac{s^2}{2h\nu_{1kn}(s)}$$

$$C_{kn}(s) = \frac{4\pi\varepsilon_0 s H_{0r} \bar{w}_{kn}}{c^3 B_{kn}(s) [\gamma_{0kn}^2 A_{kn}(s) + B_{kn}(s)]}, \quad \varepsilon_{1kn}(s) = \frac{\varepsilon w_{kn}^2}{\varepsilon_0 w_{kn}}$$

$$D_{kn}(s) = 2h\nu_{0kn}^2 \nu_{1kn}(s) [\gamma_{1kn}(s) - i\nu_{0kn}], \quad A_0 = \frac{4\pi\varepsilon s H_{0r}^2}{\rho c^4}$$

$$G_{kn}(s) = \frac{4\pi\varepsilon_0 H_{0r} \bar{w}_{kn}}{c^2 [\nu_{1kn}^2(s) + \nu_{0kn}^2]}, \quad \nu_{0kn}^2 = \varepsilon_k^2 + \gamma_{in}^2$$

$$\bar{w}_{kn} = i\bar{v}_k(s) w_{kn} - a_{kn}, \quad w_{kn} = s w_{kn} - a_{kn}$$

$$\nu_{kn}^2(s) = \left(\frac{k\pi}{k_x} \right)^2 \left[1 + i\varepsilon_{xy}^2 - \frac{\beta_0^2 - i\bar{m}\beta_0}{(k\pi)^2} \right], \quad \varepsilon_{xy} = \frac{n\lambda_x}{k\lambda_y}$$

$$\gamma_{0kn}^2(s) = \frac{\beta_0^2}{i_x^2} \left[1 - \frac{(k\pi)^2 (1 + i\varepsilon_{xy}^2)}{\beta_0^2 + \bar{m}^2} - i \frac{(k\pi)^2 (1 + i\varepsilon_{xy}^2) \beta_0 \bar{m}}{\beta_0^2 + \bar{m}^2 \beta_0^2} \right]$$

$$\gamma_{1kn}^2(s) = \frac{\beta_0^2}{i_x^2} \left[\left(1 - \frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2} \right) \left(1 - \frac{i\bar{m}}{\beta_0} \right) - \frac{(k\pi)^2 i\varepsilon_{xy}^2}{\beta_0^2} \right]$$

$$\theta_0 = M \left(k\pi - \frac{i s \lambda_x}{U} \right), \quad M = \frac{U}{a_0}, \quad \bar{m} = R_m \frac{\nu_A^2}{a_0^2}$$

$$R_m = \frac{4\pi\sigma_0 \lambda_x a_0}{c^2}, \quad v_A^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\gamma_0}$$

Здесь M — число Маха, R_m — магнитное число Рейнольдса, v_A — скорость распространения электромагнитных волн Альфвена.

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной s и используя основную теорему вычетов, из (2.5) и (2.6) найдем выражения, определяющие прогиб пластинки. В результате получим:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{p_0} \frac{\Delta_{kn}^0(s_p)}{\Delta_{0kn}(s_p)} \exp[s_p t + i(\xi_k x + \gamma_n y)] \quad (2.8)$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$w = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{r_0} \frac{\Delta_{kn}^1(s_r)}{\Delta_{1kn}(s_r)} \exp[s_r t + i(\xi_k x + \gamma_n y)] \quad (2.9)$$

где s_p и s_r — соответственно корни следующих алгебраических уравнений:

$$\Delta_{0kn}(s) = 0 \quad (2.10)$$

$$\Delta_{1kn}(s) = 0 \quad (2.11)$$

p_0 и r_0 — числа корней уравнений (2.10), (2.11), штрих означает производную по переменной s .

Для любых заданных значений параметров, входящих в уравнения (2.10) и (2.11), можно определить s . Если ее действительная часть отрицательна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие же корней с положительной действительной частью означает неустойчивость.

3. Исследование уравнений (2.10) и (2.11) приводится в частном случае, когда форма колебания пластинки — цилиндрическая поверхность ($\gamma_n = 0$).

Принимается также, что

$$\left| \frac{s}{n^2 \xi_k} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{M \left(1 - \frac{is \xi_k}{U} \right)} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\bar{m}}{\gamma_0} \right| \ll 1 \quad (3.1)$$

После этих предположений уравнения (2.10) и (2.11) существенным образом упрощаются и принимают следующий вид:

при действии поперечного магнитного поля

$$\begin{aligned} & s_0^4 + 2U_0 s_0^3 - (1 - U_0^2) s_0^2 - U_0^2 + \frac{\gamma_0 \bar{m} a_0^2}{\lambda_x \Omega_k V^2} - \\ & - i[(\varepsilon_0 + \gamma_0 + 2\beta_0) s_0^3 + U_0(2\varepsilon_0 + 4\beta_0 + 3\gamma_0) s_0^2 + \\ & + U_0^2(\varepsilon_0 + 2\beta_0 + 3\gamma_0) s_0 + \gamma_0 U_0^3] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

при действии продольного магнитного поля

$$(1 + i\varepsilon_0) s_0^2 - \gamma_0 U_0 \lambda s_0 - m_0 + \\ + i \{ \lambda s_0^3 - s_0 [\varepsilon_0 + i\beta(1 - i_0) + \lambda m_0] - \gamma_0 U_0 \} = 0 \quad (3.3)$$

где

$$\lambda = \frac{4\pi\sigma\Omega_k h}{\xi_k (1 + \xi_k h) c^2}, \quad i_0 = \frac{2\pi\sigma_0 a_0}{\xi_k (1 + \xi_k h) c^2}, \quad \beta = \frac{\xi_k (1 + \xi_k h) H_0^2}{4\pi\sigma h \Omega_k^2} \\ \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon + \gamma}{\Omega_k}, \quad \gamma = \frac{\alpha_0 \rho_0}{2\rho h}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma}{\Omega_k}, \quad U_0 = \frac{U}{V} \quad (3.4) \\ V = \frac{\Omega_k}{\xi_k}, \quad m_0 = 1 + \frac{\gamma_0 m a_0^2}{2i_x \Omega_k}, \quad s_0 = -\frac{is}{\Omega_k}$$

Здесь безразмерные параметры λ_0 , λ и β характеризуют электропроводность газа, материал пластинки, напряженность внешнего поперечного или продольного магнитного поля, соответственно, V — фазовая скорость распространения упругой волны в пластинке.

Уравнения (3.2) и (3.3) представляют собой алгебраические уравнения относительно s_0 с комплексными коэффициентами. Условия отсутствия у этих уравнений корней с отрицательными мнимыми частями могут быть представлены в форме, аналогичной общеизвестным критериям Рауса-Гурвица [5]. Из этих условий получим следующие оценки для критической скорости флаттера:

в случае действия поперечного магнитного поля

$$\frac{U_{кр}}{U_{кр}^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{g_0 \lambda_0^3}{\varepsilon_0} \right) \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4i_0 \beta^2 \gamma}{(g + g_0 \lambda_0^3)^2}}} \quad (3.5)$$

в случае действия продольного магнитного поля

$$\frac{U_{кр}}{U_{кр}^0} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} i_0 \beta \right) \left[1 + \frac{2\alpha_0 \lambda_0^3 (1 - i_0)}{\alpha \varepsilon_0^2} \right]} \quad (3.6)$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha_0 = (1 + i\varepsilon_0)^2 [2\varepsilon_0 + i\varepsilon_0^2 + i\beta(1 - i_0)] + i^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0 \beta \right) (2 + i\varepsilon_0)$$

$$\alpha = \sqrt{\left[\alpha_1 + \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0 \beta \right) \lambda^4 \varepsilon_0^2 \right]^2 + 4i^4 \alpha_2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0 \beta \right) + \lambda^4 \varepsilon_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0 \beta \right) - \alpha_1}$$

$$\alpha_1 = \beta^2 (1 - i_0) \left[(1 + i\varepsilon_0)^2 - i^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0 \beta \right) \right] -$$

$$- \left| 1 + \lambda \varepsilon_p + \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \beta \right) \right|^2$$

$$a_2 = \left\{ (1 + \lambda \varepsilon_0) [\varepsilon_0 + \lambda_0^2 (1 - \lambda_0)] + \lambda^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \beta \right) \right\}^2$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\alpha_0 \rho h^2 \gamma_0^3}{Q \rho_0}, \quad U_{кр}^0 = V \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \right), \quad g = \frac{\varepsilon}{Q_k}, \quad g_0 = \frac{\varepsilon^2 h^2}{3}$$

где $U_{кр}^0$ — критическая скорость флаттера при отсутствии магнитного поля.

Отметим, что в (3.5) последнее подкоренное выражение, в силу предположений (3.1), всегда неотрицательно.

На основании проведенного анализа формулы (3.5) сделаны следующие выводы.

Влияние проводимости газа приводит к уменьшению критической скорости флаттера.

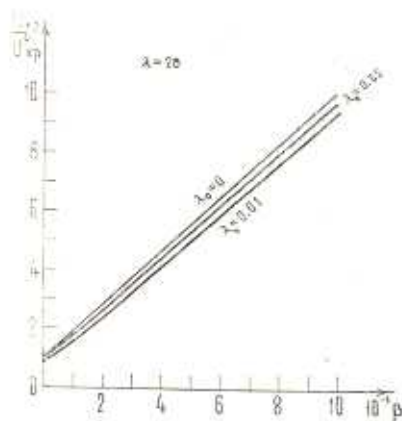
С возрастанием напряженности поперечного магнитного поля критическая скорость флаттера увеличивается.

С увеличением проводимости материала пластинки увеличивается критическая скорость флаттера.

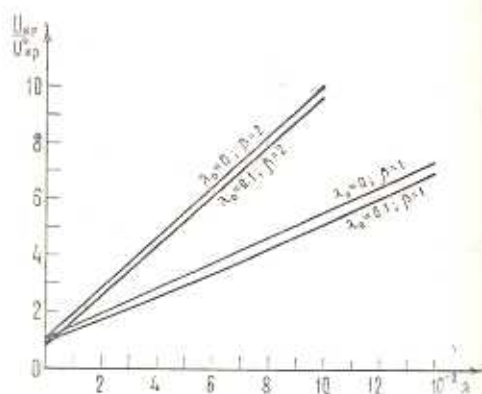
Графики изменения критической скорости в зависимости от параметров β и λ показаны на фиг. 1 и 2. Для вычисления были взяты значения:

$$E/1 - \nu^2 = 0.732 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2, \quad \rho = 2.822 \cdot 10^{-6} \text{ кг/сек}^2/\text{см}^4,$$

$$\rho_0 = 1.324 \cdot 10^{-9} \text{ кг/сек}^2/\text{см}^4, \quad \alpha_0 = 3 \cdot 10^4 \text{ см/сек}, \quad g = 0.05, \quad h/\mu_s = 0.01.$$



Фиг. 1.

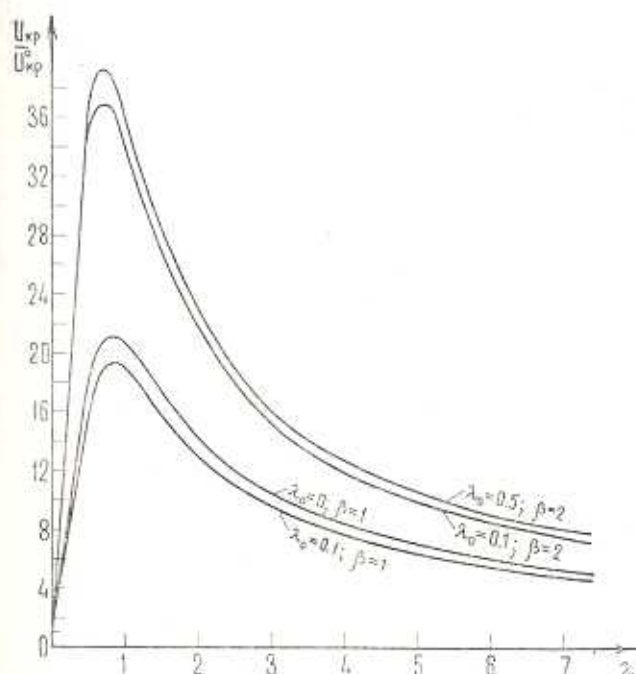


Фиг. 2.

В отличие от случая действия поперечного магнитного поля, при действии продольного магнитного поля из (3.6) вытекает, что влияние проводимости газа приводит к увеличению критической скорости флаттера, когда материал пластинки представляет собой диэлектрик, и к уменьшению критической скорости, когда пластинка является проводником.

На основании (3.6) проведен численный анализ зависимости критической скорости от напряженности продольного магнитного поля и проводимости материала пластинки. При расчетах влияние демпфирования не учитывается ($\varepsilon=0$) и принято $\gamma_0=0.025$.

На фиг. 3 приведены графики зависимости критической скорости флаттера от проводимости материала пластинки при некоторых фиксированных значениях напряженности внешнего магнитного поля и проводимости газа. Все кривые, каждая из которых соответствует фиксированным значениям параметров λ_0 , β , имеют одинаковый характер, а именно: с увеличением λ критическая скорость флаттера вначале увеличивается, достигая максимума для определенного λ , а затем убывает.



Фиг. 3.

Таким образом, обнаруживается экстремальный характер влияния проводимости материала пластинки.

На фиг. 4 приведены графики, показывающие зависимость критической скорости от напряженности магнитного поля для различных фиксированных значений параметров λ и λ_0 .

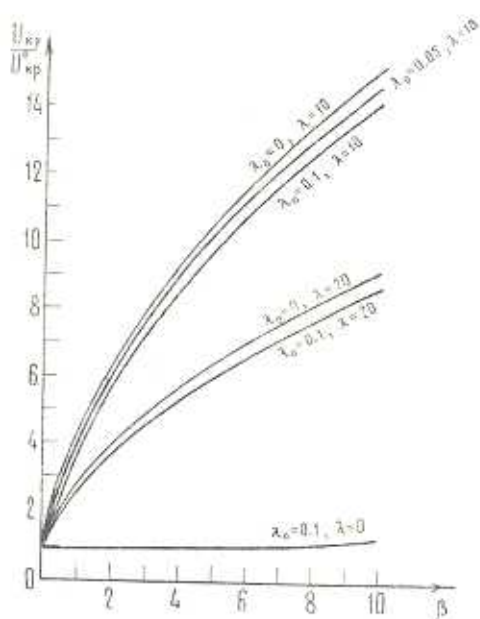
Из фиг. 4 видно, что во всех случаях критическая скорость флаттера увеличивается с возрастанием напряженности внешнего магнитного поля.

Отметим, что в случае действия поперечного магнитного поля из (3.5) видно, что критическая скорость флаттера — монотонная функция относительно λ_0 . По этой причине исследование проводилось при $k=1$, что соответствует минимальной критической скорости флаттера.

В случае действия продольного магнитного поля, исследование формулы (3.6) показывает, что определение минимума критической скорости по ξ_k в общем случае весьма затруднительно. Минимум критической скорости определен в случае, когда материал пластинки является диэлектриком ($\lambda=0$). При этом получим окончательную формулу

$$U_{кр} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) \sqrt{2\chi_0\sigma_1 \frac{v_A}{c}}$$

где $\chi_0^2 = D/2\rho h$, $\sigma_1^2 = \pi\varepsilon_0\alpha_0\varepsilon_0'/\rho h$.



Фиг. 4.

Автор благодарит участников семинара «Электродинамика деформируемых сплошных сред» Института механики АН Армянской ССР за обсуждение работы.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 20 XII 1974

Պ. Հ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՀԱՂՈՐԳԻԶ ԵՎ Ի ՖԼԱՏԵՐԻ ԹՈՒՅԼ ՀԱՂՈՐԳԻԶ ԳԱԶԻ ՀՈՍԱՆՔՈՒՄ
ԵՎ ԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱԶԳԻՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. Վ. մ.

Ուսումնասիրվում է հաղորդիչ սալի կայունության ինդիքը, երբ այն շրջնաձևում է թույլ հաղորդիչ ու մածուցիկ սեղմելի իոնիզացված գազի գերձայնային հոսանքով ինչպես ուղղահայաց, այնպես էլ երկայնական մագնիսական դաշտի ազդեցության դեպքում:

Մագնիսատառածգականության և մագնիսադադադինամիկայի հավասարումների հիման վրա ստացվել են անալիտիկ արտահայտություններ ֆլատտերի կրիտիկական արագությունների համար:

Հետազոտվում է մագնիսական դաշտի ինտենսիվության, ինչպես նաև գազի և սալի հաղորդականության ազդեցությունը ֆլատտերի կրիտիկական արագության վրա:

Կատարվել է թվային անալիզ և կառուցվել են ֆլատտերի կրիտիկական արագության համար արտաբերել մագնիսական դաշտի լարվածությունից և սալի նյութի հաղորդականությունից նրա կախվածությունն արտահայտող գծադրերը:

FLUTTER OF A CONDUCTING PLATE IN A FLOW OF
POORLY-CONDUCTING GAS UNDER THE EFFECT
OF A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem of stability of a conducting plate flown-past by a supersonic flow of poorly-conducting compressible ionised non-viscous gas under the effect of both transversal and longitudinal magnetic fields is considered.

In terms of magnetoelastic and magnetoaerodynamic equations the analytical expressions for critical velocities of flutter are derived.

The effect of the strength of a given magnetic field as well as of the gas and plate material conductivity on the critical velocity of flutter are analysed.

A numerical analysis is presented and graphs of dependence on external magnetic field and plate material conductivity are plotted for critical velocity of flutter.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. Селазов И. Т., Селазова А. В. Обтекание колеблющейся границы ионизированным газом при действии магнитного поля. Магнитная гидродинамика, № 1, 1967.
4. Володар А. С., Селазова А. В. Поведение упругой цилиндрической панели в потоке проводящего газа при действии магнитного поля. ПМ, т. 7, вып. 5, 1971.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
6. Дель Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд. «Наука», М., 1965.