

А. О. ВАТУЛЯН, Т. В. КОРЕНЕВА, М. Г. СЕЛЕЗНЕВ

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ШТАМПОМ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ

В условиях плоской деформации рассматривается вибрация трансверсально-изотропного слоя толщиной  $2h$  под действием вибрирующих штампов. В слое плоскость  $y=0$  является изотропной.

Штампы ширины  $2a$  приложены к слою симметрично относительно срединной поверхности. Предполагается, что в области контакта трение отсутствует, а штампы совершают либо встречные колебания (сжатие), либо односторонние (изгиб). В работе на основании решений интегральных уравнений, к которым сводятся краевые задачи, построены приближенные формулы, описывающие контактные напряжения под штампами и поведение поверхности слоя вне штампов.

### § 1. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Свойства ядер интегральных уравнений

Уравнениями краевых задач являются известные уравнения движения Коши с определяющими уравнениями вида (1.1) [1].

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y &= c_{12}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= c_{33}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $c_{ij}$  — упругие постоянные.

Граничные условия смешанных задач представимы в случаях сжатия и изгиба соответственно в форме

$$\sigma_y|_{y=\pm h} = \begin{cases} T(x) e^{-i\omega t} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0$$

$$\sigma_y|_{y=\pm h} = \begin{cases} \pm T(x) e^{-i\omega t} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=\pm h} = 0$$

где  $\omega$  — частота колебаний штампа.

Так как изучается установившийся режим, то есть во всех точках деформация протекает одинаково во времени, перемещения представимы в виде

$$u = e^{-i\omega t} u_0(x, y), \quad v = e^{-i\omega t} v_0(x, y)$$

Применением обобщенного интегрального преобразования Фурье к уравнениям движения сплошной среды каждая краевая задача приводится к интегральному уравнению с разностным ядром относительно контактных давлений вида

$$\int_{-a}^a k(x-\xi) q(\xi) d\xi = 2\pi f(x) \quad |x| < a \quad (1.4)$$

Функция  $f(x)$  характеризует форму штампа. Ядро интегрального уравнения представимо в форме

$$k(x) = \int_{\frac{1}{2}}^1 K(u) e^{iux} du \quad (1.5)$$

Здесь в случае изгиба

$$K(u) = \frac{(l_1^2 - l_2^2)(a_3 u^2 - k)(a_1 + a_2)}{T_1 - T_2} \quad (1.6)$$

причем

$$T_1 = l_1^2 \operatorname{th} l_1 [l_1^2 a_1 + k + u^2 (a_2^2 + a_1 a_2 - a_3)] (l_1^2 a_2 - k + a_3 u^2)$$

а  $T_2$  получается из  $T_1$  заменой  $l_1$  на  $l_2$

$$l_i = i_i h_i, \quad k = \frac{\rho \omega^2 h^2}{c_{22}}, \quad a_1 = \frac{c_{33}}{c_{22}}, \quad a_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}, \quad a_3 = \frac{c_{11}}{c_{22}}, \quad \gamma = kc_{22} \cdot 10^{-6}$$

$i_i$  — положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 s_1 + s_2 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda^2 s_3 + s_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

$$s_1 = \frac{c_{33}}{iu(c_{12} + c_{33})}, \quad s_2 = \frac{\rho \omega^2 - c_{11} u^2}{iu(c_{12} + c_{33})}, \quad s_3 = \frac{c_{22}}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

$$s_4 = \frac{c_{11} \omega^2 - c_{33} u^2}{iu(c_{12} + c_{33})}$$

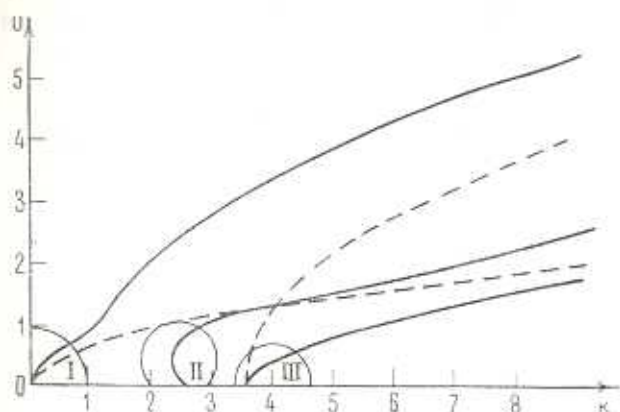
В случае сжатия  $K(u)$  получается из (1.6) заменой  $\operatorname{th} u$  на  $\operatorname{cth} u$ .

Свойства ядра определяются функцией  $K(u)$ , которая является мероморфной и при  $u \rightarrow \infty$  убывает как  $|u|^{-1}$ . Ядро уравнения при  $x \rightarrow \infty$  представимо в виде

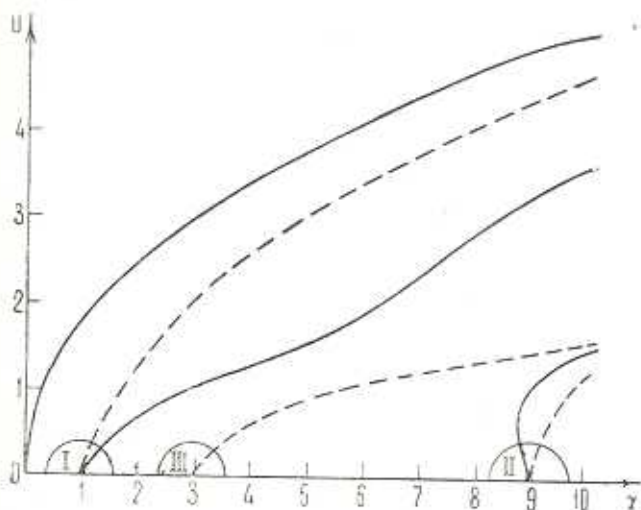
$$\star \quad k(x) = \sum_{k=1}^p A_k e^{i^k x} + O(e^{-x}) \quad (1.8)$$

где  $i_k > 0$  ( $k=1, \dots, p$ ,  $\varepsilon > 0$ ) — полюса  $K(u)$ , а в нуле имеет логарифмическую особенность. Осциллирующая ядра затрудняет применение известных методов, которые обычно используются для решения сингулярных инте-

гральных уравнений. Исследование настоящего интегрального уравнения невозможно без детального изучения кривых нулей и полюсов функции  $K(u)$ , зависящей от  $k$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{33}$ . В настоящей работе они изучаются по следующей схеме: фиксируются  $c_{ij}$  и изменяется  $k$ . Построение нулей и полюсов (нейтральных кривых) как функций  $k$  было осуществлено с помощью ЭВМ «Одра-1204» методом половинного деления. Для следующих значений параметров в случае сжатия  $c_{11} = 2.69 \cdot 10^6$ ;  $c_{22} = 1.1 \cdot 10^6$ ;  $c_{33} = 0.4 \cdot 10^6$ ;  $c_{12} = 0.92 \cdot 10^6$  и в случае изгиба  $c_{11} = 2.96 \cdot 10^6$ ;  $c_{22} = 1.2 \cdot 10^6$ ;  $c_{33} = 0.4 \cdot 10^6$ ;  $c_{12} = 0.92 \cdot 10^6$  они приводятся на фиг. 1, 2 соответственно, где сплошной линией обозначены линии полюсов, а прерывистой — нулей.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Несложный анализ функции  $K(u)$  позволяет установить, что она имеет счетное множество нулей и полюсов, сгущающихся лишь на бесконечности.

С увеличением частоты число нулей и полюсов, лежащих на вещественной оси, как правило, растет. Известно, что нейтральные кривые пересекают ось  $k$  под прямым углом, но ведут себя по-разному в окрестности точек пересечения. В зонах I и III кривые подходят к оси  $k$  с положительной производной и имеет место чередование нулей и полюсов. В зоне II кривая полюсов имеет отрицательную производную и нарушается чередование нулей и полюсов; более того, с ростом  $k$  в этой зоне число полюсов уменьшается на 1.

Представленные на графиках нейтральные кривые позволяют правильно распорядиться контуром  $\sigma$ , расположение которого обеспечивает выполнение условий изучения. Именно, контур  $\sigma$  должен огибать в зонах I, III положительные полюсы снизу, а отрицательные — сверху. В зоне II расположение таково: наименьший по модулю полюс огибается противоположным образом. Вышеперечисленные условия позволяют сделать вывод об однозначной разрешимости интегрального уравнения [2, 3].

### § 2. Построение приближенного решения интегрального уравнения с помощью приближенной факторизации

Интегральное уравнение вида (1.4) с помощью интегрального преобразования Фурье приводится к системе двух интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно функций  $X^\pm$  (здесь и далее сохранены обозначения работы [4])

$$X^\pm = G^\pm X^\pm + A^\pm \quad (2.1)$$

где операторы  $G$  и  $A$  имеют вид

$$G^\pm f = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{K_-(\zeta) e^{-2a\zeta}}{K_+(\zeta)(\zeta + u)} f d\zeta \quad (2.2)$$

$$A^\pm = \int_{\gamma} \left[ \frac{e^{-ia\zeta}}{K_+(\zeta)(\zeta + u)} \pm \frac{e^{ia\zeta}}{K_-(\zeta)(\zeta - u)} \right] F(\zeta) d\zeta \quad (2.3)$$

$$F(\zeta) = \int_{-u}^u e^{ia\zeta} f(u) du \quad (2.4)$$

Контур  $\gamma$  делит комплексную плоскость на 2 части: верхнюю  $E_+$  и нижнюю  $E_-$ ;  $K_+(u)$  и  $K_-(u)$  — функции, регулярные и не имеющие корней в  $E_+$  и  $E_-$  соответственно

$$\star K_+(u) = K_-(u) K_-(u); \quad K_+(-u) = K_-(u)$$

Деформируя контур интегрирования  $\sigma$  в  $\Gamma$ , лежащий строго в нижней полуплоскости, сводим решение системы (2.1) к решению конечной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X^\pm(-z_k)$  ( $k=1, \dots, n$ ;  $z_k$  — положительные нули  $K(u)$ ), разрешив которую, при-



ходим к системе вида (2.1), но с другим выражением для  $A$ . Последняя система может быть решена методом последовательных приближений.

Приведенные в [4] формулы предполагают умение факторизовать  $K(u)$  относительно  $\sigma$ . Однако, достаточно [5] провести приближенную факторизацию для каждого фиксированного  $k$ .

Строится функция, которая в отличие от  $K(u)$  регулярна и не имеет нулей на вещественной оси

$$f(u) = K(u) \sqrt{u^2 + B^2} \prod_{i=1}^p (u^2 - \zeta_i^2) \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2)^{-1} \begin{cases} 1 & p = n \\ \prod_{k=1}^{p-n} (u^2 + \zeta_k^2) & p > n \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\zeta_i$  и  $z_k$  — соответственно положительные полюсы и нули  $K(u)$ ,  $f(u)$  — непрерывная на  $[0, \infty)$  функция, не имеющая нулей на вещественной оси и ограниченная на бесконечности. Она с любой степенью точности может быть приближена полиномами Бернштейна [6], отображенными на всю вещественную полуось заменой  $x = u^2 (u^2 + c^2)^{-1}$ . После такой аппроксимации функция  $K(u)$  уже легко факторизуется и можно строить приближенное решение.

В качестве примера была рассмотрена простейшая аппроксимация  $K(u)$  функциями

$$K^*(u) = A (u^2 - z_1^2) (u^2 - \zeta_1^2)^{-1} (u^2 + B^2)^{-1/2} \quad (2.6)$$

$$K^*(u) = A (u^2 - z_1^2) (u^2 + z_2^2) (u^2 - \zeta_1^2)^{-1} (u^2 - \zeta_2^2)^{-1} (u^2 + B^2)^{-1/2} \quad (2.7)$$

в случае сжатия и изгиба соответственно.

Параметры  $A$ ,  $B$ ,  $z_2$  находились из условий совпадения  $K^*(u)$  и  $K(u)$  в нуле и на  $\infty$ .

Для плоского штампа и аппроксимации вида (2.6), (2.7) были получены приближенные формулы для функций  $\varphi_{\pm}(x)$ , описывающих поведение поверхности слоя вне области контакта

$$\frac{\varphi_{\pm}(x)}{\delta} = \frac{i}{2} [X^-(\zeta_1) + X^-(\zeta_1)] \frac{\sqrt{A} (\zeta_1 - z_1)}{\sqrt{B + i\zeta_1}} e^{-i\zeta_1(\sigma \mp x)} \quad (\text{сжатие}) \quad (2.8)$$

$$\frac{\varphi_{\pm}(x)}{\delta} = \frac{i\sqrt{A}}{2(\zeta_2 - \zeta_1)} \left\{ [X^+(\zeta_1) + X^-(\zeta_1)] \frac{(-\zeta_1 + z_1)(-\zeta_1 + iz_2)}{\sqrt{B + i\zeta_1}} e^{-i\zeta_1(\sigma \mp x)} - [X^+(\zeta_2) + X^-(\zeta_2)] \frac{(-\zeta_2 + z_1)(-\zeta_2 + iz_2)}{\sqrt{B + i\zeta_2}} e^{-i\zeta_2(\sigma \mp x)} \right\} \quad (\text{изгиб}) \quad (2.9)$$

и для напряжений в области контакта

$$\frac{q(x)}{c_{22}\delta} = K^{\sigma-1}(0) + \left[ \frac{z_1^2 - \zeta_1^2}{Az_1^2} \sqrt{B^2 + z_1^2} + \frac{X^+(-z_1) + X^-(-z_1)}{\sqrt{A}} (z_1 - \zeta_1) \sqrt{B + iz_1} \right] \cos z_1 x \quad (\text{сжатие}) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{q(x)}{c_{22}\delta} = & K^{k-1}(0) + \left[ \frac{(z_1^2 - \zeta_1^2)(z_1^2 - \zeta_2^2)}{Az_1^2(z_1^2 + z_2^2)} \sqrt{B^2 + z_1^2} + \right. \\
& + i \frac{X^+(-z_1) + X^-(-z_1)}{(z_1 - iz_2)\sqrt{A}} (z_1 - \zeta_1)(z_1 - \zeta_2) \sqrt{B + iz_1} \left. \right] e^{i\pi\alpha} \cos z_2 x + \\
& + \left[ \frac{(z_2^2 + \zeta_1^2)(z_2^2 + \zeta_2^2)}{Az_2^2(z_1^2 + z_2^2)} \sqrt{B^2 + z_2^2} + \right. \\
& + i \frac{X^+(-iz_2) + X^-(-iz_2)}{(iz_2 - z_1)\sqrt{A}} (iz_2 - \zeta_1)(iz_2 - \zeta_2) \sqrt{B - z_2} \left. \right] e^{-i\pi\alpha} \operatorname{ch} z_2 x
\end{aligned} \quad (\text{изгиб}) \quad (2.11)$$

причем при  $x \rightarrow \pm a$   $q(x)$  выражается следующим образом:

$$\frac{q(x)}{c_{22}\delta} = -\frac{r_1}{r + \frac{r_1}{2z_1}} x^i (-z_1) \frac{1+i}{\sqrt{8\pi A}} \left( \frac{1}{\sqrt{a-x}} + \frac{1}{\sqrt{a+x}} \right) \quad (2.12)$$

здесь  $\delta$  — глубина внедрения штампа.

### § 3. Численный пример

Были проведены численные расчеты в случае сжатия и изгиба с аппроксимацией указанного вида при  $k=2$  для  $a=1, 2, 10$

$$A = -2.032, \quad B = 0.535, \quad z_1 = 0.9035, \quad \zeta_1 = 2.019 \quad (\text{сжатие})$$

$$A = 1.877, \quad B = 10, \quad z_1 = 1.403, \quad z_2 = 1.311, \quad \zeta_1 = 0.684, \quad \zeta_2 = 2.47 \quad (\text{изгиб})$$

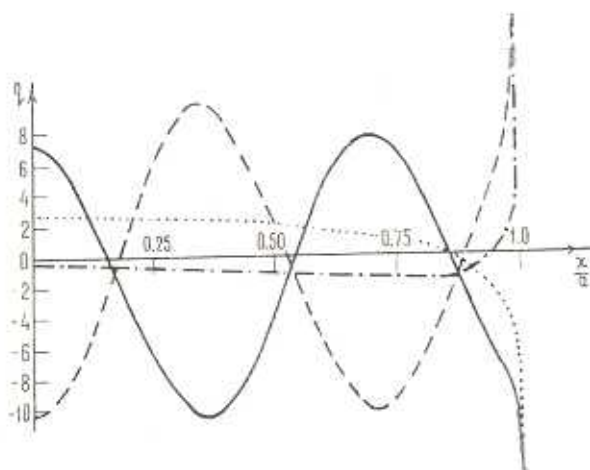
$$\frac{q(x)}{c_{22}\delta} = d_1 + d_2 \cos z_2 x + d_3 \operatorname{ch} z_2 x \quad (3.1)$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\delta} = b_1 e^{-i\pi(a-x)} + b_2 e^{-i\pi(a+x)} \quad (3.2)$$

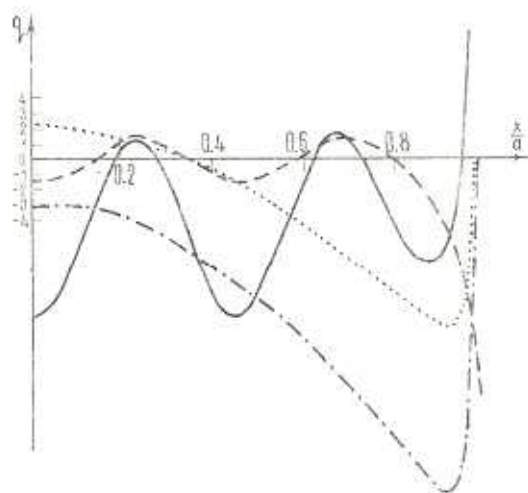
Результаты расчетов приведены в таблицах и на графиках (строки 1, 2, 5 и фиг. 3 — сжатие, 3, 4, 6 и фиг. 4 — изгиб). На фиг. 3—4 обозначено сплошной линией  $\operatorname{Re} \frac{q(x)}{c_{22}\delta} (a=10)$ , пунктирной —  $\operatorname{Im} \frac{q(x)}{c_{22}\delta} (a=10)$ , штрихпунктирной —  $\operatorname{Re} \frac{q(x)}{c_{22}\delta} (a=2)$ .

Получаем, что от штампа удаляются в разные стороны упругие волны с неубывающей амплитудой, причем число волн равно числу полюсов  $K(u)$  (в случае сжатия — 1 волна, в случае изгиба — 2 волны). Скорость, ампли-

туда и сдвиг фазы каждой волны могут быть легко определены из приведенных формул.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Таблица

$N$	$\alpha$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$b_1$	$b_2$
1	1	-1.316	$1.313 + 1.259i$	0	$-1.176 + 0.142i$	0
2	2	-1.316	$1.256 + 3.009i$	0	$-1.672 - 0.981i$	0
3	1	-4.493	$-2.937 - 0.26i$	$-2.536 - 0.702i$	$-2.614 + 0.035i$	$-2.813 - 0.559i$
4	2	-4.493	$4.178 + 3.846i$	$-2.793 - 1.615i$	$-3.0 - 0.791i$	$-2.00 - 1.02i$
5	10	-1.316	$8.855 - 10.049i$	0		
6	10	-4.493	$-5.896 - 1.448i$	$(10.115 - 0.066i) \times 10^{-3}$		

Замечание 1. Приведенные формулы справедливы для достаточно больших  $a$  (в случае малых  $a$  можно применить метод «больших  $\lambda$ » [7]).

Замечание 2. В настоящей работе изучены лишь динамические составляющие механической задачи о вибрации штампа. Полное решение механической задачи представляет сумму статической и динамической задач. Решение статической задачи можно получить известными методами, изложенными в различных обзорах (напр., [8]).

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Бабешко за руководство работой.

НИИ механики и прикладной математики  
Ростовского государственного университета

Поступила 11 XI 1974

Ա. Օ. ՎԱՏՈՒԼՅԱՆ, Տ. Վ. ԿՈՐԵՆԵՎԱ, Մ. Գ. ՍԵԼԵԶՆԵՎ

ՏՄՏԱՆՎԱԳ ԳՐՈՇՄՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏՈՒՄ ԱՐՔՆԵՐԻ ԱՌԱՋԱՅՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ս լ մ

Ուսումնասիրվում է տրանսվերսալ իզոտրոպ շերտի եզրի վրա կոշտ դրոշմի թրթռման հարթ խնդիրը: Քննարկվել են սիմետրիկ և շեղ սիմետրիկ դեպքերը:

Ուսումնասիրվել է այն ինտեգրալ հավասարումը, որին հանդեպում են դիտարկված եզրային խնդիրները: Գիտարկված դեպքերի համար կառուցվել են ինտեգրալ հավասարման մոտավոր լուծումները: Բերվում է ստացված արդյունքների թվային վերլուծությունը:

## WAVES EXCITATION BY A VIBRATING PUNCH IN AN ANISOTROPIC LAYER

A. O. VATULIAN, T. V. KORENEVA, M. T. SELEZNEV

### S u m m a r y

A plane problem of vibration of rigid punches on the surface of a transversal isotropic layer is studied; a symmetric and an asymmetric cases are examined.

An integral equation to which boundary value problems are reduce is considered; the approximate solutions are obtained and a numerical analysis of the results obtained is given.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. ГИТТЛ, М., 1950.
2. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 210, № 6, 1973.



3. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, т. 213, № 3, 1973.
4. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 201, № 1, 1971.
5. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, т. 217, № 4, 1974.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. «Наука», М., 1966.
7. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
8. Абрамян Б. А. Обзор результатов, полученных по контактным задачам в АН Арм ССР. Контактные задачи и их инженерные приложения. НИИМАШ, М., 1969 (доклады конференции).