ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 3, 1975 Механика

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. Н. ЛОЖКИН

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ПЬЕЗО- И ПИРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

1. Рассмотрим сплошное тело, упругие свойства которого неотделимы от электрических и тепловых (явление пьезо- и пироэлектричества). Пусть в недеформированном и ненапряженном состоянии, а также при отсутствии электромагнитного поля тело имеет температуру T_0.

Предположим, что объемные силы, объемные электрические заряды и внутренние тепловые источники в теле отсутствуют. Вследствие действия поверхностных сил, нагрева или охлаждения поверхности тела, наличия поверхностных электрических зарядов, а также при задании на поверхности потенциала электрического поля в теле возникнут поля перемещений, характеризуемые вектором $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, деформаций r_{ij} и напряжений t_{ij}. При этом приращение температуры составит $\Theta = T - T_0$, где T — абсолютная температура тела.

Допустим, что намагничиванием тела можно пренебречь. Тогда возникаемое в нем электромагнитное поле характеризуется векторами $\vec{E}(E_1, E_2, E_3)$ напряженности электрического поля, $\vec{D}(D_1, D_2, D_3)$ электрической индукции и $\vec{H}(H_1, H_2, H_3)$ напряженности магнитного поля.

Все введенные величины рассматриваются в некоторой прямолинейной ортогональной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$.

При сделанных предположениях электрическое поле будет потенциальным, то есть

$$E_m = \frac{\partial v}{\partial x_m} \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Одна из форм термодинамических соотношений, связывающих линейной зависимостью механические, электрические и тепловые величины, такова [1]

$$t_{ij} = c^E_{ijkl}\, r_{kl} - e_{mij} E_m - \gamma^E_{ij}\Theta$$

$$D_m = 4\pi e_{mij}\, r_{ij} + \varepsilon^r_{mn} E_n + 4\pi p^r_m \Theta \qquad (i, j, m = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Здесь c^E_{ijkl} и γ^E_{ij} — соответственно модули упругости и температурные коэффициенты маханических напряжений, измеренные при постоянной напряженности электрического поля; ε^{r}_{mn} и p^{r}_{m} — постоянные диэлектрической проницаемости и пироэлектрические коэффициенты, измеренные при постоянных деформациях; e_{mij} — пьезоэлектрические модули.

Для деформаций и перемещений имеют место равенства

$$r_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad r_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i\neq j) \tag{1.3}$$

Система уравнений движения рассматриваемого тела состоит из уравнений движения классической теории упругости

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.4}$$

уравнений Максвелла для электромагнитного поля [2], которые с учетом равенств (1.1) принимают вид

$$\operatorname{div}\vec{D}=0\,, \qquad \operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{1.5}$$

и уравнения теплопроводности. При этом ρ — удельная плотность материала тела, c — скорость света в пустоте.

Уравнение теплопроводности получим из закона сохранения энергии, являющегося локальной формулировкой второго закона термодинамики [3]. При отсутствии внутренних тепловых источников имеем

$$T\frac{dS}{dt}=-\operatorname{div}\vec{q} \tag{1.6}$$

Здесь S — энтропия рассматриваемого материала тела, $\vec{q}$ — вектор теплового потока. Исходя из феноменологического закона Фурье для анизотропного тела [3]

$$q_i=-k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7}$$

где k_{ij} — коэффициенты теплопроводности, уравнение (1.6) можно записать так

$$T\frac{dS}{dt}=k_{ij}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_j} \tag{1.8}$$

Термодинамическое соотношение для энтропии S имеет вид [1]

$$S=\gamma^{E}_{ij}\vec{r}_{ij}+p^{r}_{m}E_m+c^{rE}\,T_0^{-1}\Theta \tag{1.9}$$

При этом c^{rE} — удельная теплоемкость тела, измеренная при постоянных деформациях и напряженности электрического поля. Подставив последнее равенство в выражение (1.8) и учитывая малость изменения температуры, получим линейное уравнение теплопроводности в виде

$$k_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_i\partial x_j} - c^{rE}\frac{\partial\Theta}{\partial t} - T_0\gamma^E_{ij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial t} - T_0 p^r_m\frac{\partial E_m}{\partial x_m} = 0 \tag{1.10}$$

Таким образом, с учетом соотношений (1.2)—(1.5) и (1.10) система уравнений движения тела получается такой

$$c^E_{ijkl}\frac{\partial r_{kl}}{\partial x_j} - e_{mij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_m} - \gamma^E_{ij}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$T_0\gamma^E_{ij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial t} + T_0 p^r_m\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x_m} - k_{ij}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i\partial x_j} + c^{rE}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = 0$$

$$4\pi e_{mij}\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_m} + \varepsilon^r_{mn}\frac{\partial^2 v}{\partial x_m\partial x_n} + 4\pi p^r_m\frac{\partial\Theta}{\partial x_m} = 0 \tag{1.11}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Пять первых уравнений системы (1.11) можно рассматривать независимо, а последнее — векторное уравнение использовать для определения магнитной напряженности $\vec{H}$.

Будем считать, что на поверхности тела заданы механические (поверхностные силы или перемещения) [4], тепловые (температура, тепловой поток или конвективный теплообмен) [5], а также распределение поверхностного электрического заряда или потенциал электрического поля [2] и соответствующие начальные условия.

2. Рассмотрим квазистатическую задачу термоупругости для кристаллического слоя постоянной толщины $2h$ ($-h \leqslant x_1 \leqslant h$). Будем считать, что физические условия позволяют рассматривать задачу одномерной, то есть

$$u_1 = u(x,\ t),\quad u_2 = u_3 \equiv 0,\ v = v(x,\ t),\ \Theta = \Theta(x, t) \tag{2.1}$$

Переходя от тензорной записи к матричной [6], соотношения (1.2) можно записать так

$$t_i = c^E_{1i}\frac{\partial u}{\partial x} - e_{1i}\frac{\partial v}{\partial x} - \gamma^E_i\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0 \qquad (i = \overline{1,6})$$

$$D_m = 4\pi e_{m1}\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^r_{m1}\frac{\partial v}{\partial x} + 4\pi p^r_m\frac{\partial\Theta}{\partial x} \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Дифференциальные уравнения движения (1.11) (первое, четвертое и пятое) примут вид

$$c^E_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma^E_{11}\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$$

$$T_0\gamma_1^E \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + T_0 p_1^r \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - k_{11}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + c^{rE}\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \qquad (2.3)$$

$$4\pi e_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_{11}^r \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\pi p_1^r \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

Два оставшихся уравнения механического движения используем для вывода условий одномерности рассматриваемой задачи. В данном случае получим

$$c_{15}^E = c_{16}^E = e_{15} = e_{16} = \gamma_5^E = \gamma_6^E = 0 \qquad (2.4)$$

Такими свойствами обладают, например, X- и Y-срезы кварца [6].

Будем считать, что в начальный момент времени слой не подвержен внешним воздействиям, а именно

$$u|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \Theta|_{t=0} = 0 \qquad (2.5)$$

а при $t > 0$ на его плоских гранях заданы потенциал электрического поля при отсутствии механических воздействий и изменения температуры, то есть

$$t_1\Big|_{x=\pm h} = 0, \quad v\Big|_{x=\pm h} = \pm v_0(t), \quad \Theta\Big|_{x=\pm h} = 0 \qquad (2.6)$$

где $v_0(t)$ — известная функция, медленно изменяющаяся во времени.

Применяя к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа и разрешая полученную систему относительно функций-изображений, будем иметь

$$\bar u(x,p) = (b_1 b_2 \sqrt{p}\lambda x \operatorname{ch}\sqrt{p}\lambda h + T_0 b_3 b_4 \operatorname{sh}\sqrt{p}\lambda x)\,\bar v_0(p) w^{-1}(p)$$

$$\bar v(x,p) = (b_2 b_5 \sqrt{p}\lambda x \operatorname{ch}\sqrt{p}\lambda h - 4\pi T_0 b_3^2 \operatorname{sh}\sqrt{p}\lambda x)\,\bar v_0(p)\, w^{-1}(p) \qquad (2.7)$$

$$\bar\Theta(x,p) = T_0 b_2 b_5 \lambda (\operatorname{ch}\sqrt{p}\lambda h - \operatorname{ch}\sqrt{p}\lambda x)\,\bar v_0(p) w^{-1}(p)$$

Здесь

$$w(p) = b_2 b_5 \sqrt{p}\lambda h \operatorname{ch}\sqrt{p}\lambda h - 4\pi T_0 b_3^2 \operatorname{sh}\sqrt{p}\lambda h \qquad (2.8)$$

Постоянные, входящие в соотношения (2.7) и (2.8), принимают такие значения

$$b_1 = c^{rE} c_{11}^E - T_0 p_1^r \gamma_1^E, \qquad b_2 = c_{11}^E \varepsilon_{11}^r + 4\pi e_{11}^2$$

$$b_3 = c_{11}^E p_1^r + e_{11}\gamma_1^E, \qquad b_4 = \gamma_1^E \varepsilon_{11}^r - 4\pi e_{11} p_1^r \qquad (2.9)$$

$$b_5 = c^{rE} c_{11}^E + T_0 \gamma_1^{E^2}$$

$$\lambda = [k_{11}^{-1}(c^{rE} + T_0 \gamma_1^E b_2^{-1})]^{\frac{1}{2}}$$

Нули p_m функции $w(p^2)$ лежат на мнимой оси: $p_m = i\lambda^{-1}h^{-1}\delta_m$.

Используя обобщенную теорему умножения и вторую теорему разложения [7], для функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $\Theta(x, t)$ получим следующие выражения:

$$u(x, t) = \frac{e_{11}}{c_{11}^E} v_0(t) \frac{x}{h} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(b_1 b_2 \delta_m \frac{x}{h} \cos \delta_m + T_0 b_3 b_1 \sin \delta_m \frac{x}{h}\right) v_m(t)$$

$$v(x, t) = v_0(t) \frac{x}{h} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(b_2 b_5 \delta_m \frac{x}{h} \cos \delta_m - 4\pi T_0 b_3^2 \sin \delta_m \frac{x}{h} \right) v_m(t) \quad (2.10)$$

$$\Theta(x, t) = 2h^{-1} T_0 b_2 b_5 \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m a_m \left(\cos \delta_m - \cos \delta_m \frac{x}{h} \right) v_m(t)$$

Здесь

$$v_m(t) = \exp\left(-\frac{\delta_m^2}{\lambda^2 h^2} t \right) \int_0^t \exp\left(\frac{\delta_m^2}{\lambda^2 h^2} \tau \right) v_0'(\tau) d\tau$$

$$a_m = \delta_m^{-1} [b_2 b_5 \delta_m \sin \delta_m - (b_2 b_5 - 4\pi T_0 b_3^2) \cos \delta_m]^{-1} \quad (2.11)$$

Характеристики термоэлектроупругого состояния рассматриваемого слоя можно получить, подставив функцию (2.10) в соотношения (2.2).

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 20 V 1974

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Վ. Ն. ԼՈԺԿԻՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐ ՊՅԵԶՈ ԵՎ ՊԻՐՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԷՖԵԿՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բյուրեղային շերտի համար, որի առաձգական հատկությունները անբաժանելի են ջերմային և էլեկտրական հատկություններից (պյեզո և պիրոէլեկտրական երևույթ) տրվում է քվազիստատիկ խնդրի լուծումը։

A QUASI-STATIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR ANISOTROPIC LAYER WITH PIEZO- AND PYROELECTRIC EFFECTS

A. S. KOSMODAMIANSKY, V. N. LOZHKIN

Summary

The solution to a quasi-static problem of thermoelasticity is given for a crystal layer whose elastic properties are inseparable from electric and thermal ones (piezo- and pyroelectric effects).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. ИЛ, М., 1952.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. I. Изд-во „Наука", М., 1970.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. Изд-во „Наука", М., 1970.
6. *Желудев И. С.* Физика кристаллических диэлектриков. Изд-во „Наука", М., 1968.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.