

М. Г. МЕЛКОНЯН, А. М. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Рассматривается плоская задача теории упругости для двух прямоугольников из различных материалов, которые прижимаются друг к другу вдоль одной стороны при отсутствии сцепления. Действия прижимающих сил, приложенных на сторонах прямоугольников, параллельных линии прижатия, передаются к прямоугольникам либо через жесткие гладкие штампы, либо непосредственно. Зона контакта двух прямоугольников считается неизвестной и определяется в дальнейшем.

Некоторые граничные задачи плоской теории упругости для прямоугольных областей рассматривались в работах [1—4], где основное внимание уделено определению полей напряжений и перемещений. В некоторых из них дополнительно изучен характер распределения контактных напряжений под жесткими штампами [2—4].

Во всех отмеченных задачах область контакта считалась известной. Задачи с определением области контакта для случаев, когда одно из контактирующих тел имеет неограниченный размер, были рассмотрены в работах [5—10].

Определению области контакта между двумя конечными контактирующими телами из различных материалов посвящено исследование [11].

Следует отметить, что в работе [11] использованы такие граничные условия, которые допускают отрыв прижатых друг к другу двух прямоугольников только в средней части линии прижатия.

Основной целью настоящей работы является определение размера контактной области — зоны активной передачи нормальной нагрузки от одного прямоугольника к другому.

1. Пусть прямоугольники $ABDC$ и $C'D'FE$ с модулями Юнга E_1 , E_2 и коэффициентами Пуассона ν_1 , ν_2 соответственно прижимаются друг к другу без сцепления вдоль оси Ox по сторонам CD и $C'D'$ (фиг. 1). По сторонам AB и EF прямоугольников действуют жесткие гладкие штампы, симметрично расположенные относительно оси y , а вне штампов действуют заданные нормальные нагрузки.

Для простоты принимается, что остальные части границ прямоугольников свободны от внешних нагрузок.

Из симметрии следует, что область контакта будет симметричной относительно оси Oy . Длина участка контакта $2l_3$ пока неизвестна и подлежит определению в дальнейшем.

Выбирая координатные оси, как показано на фиг. 1, рассматриваем только правую половину основной области, удовлетворяя при этом следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)}(x, h_1) = \tau_{xy}^{(2)}(x, -h_2) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad v_1(x, h_1) = \psi_1(x) \quad (0 \leq x < l_1) \\ \tau_{xy}^{(1)}(\pi, y) = \tau_x^{(1)}(\pi, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq h_1), \quad \tau_y^{(1)}(x, h_1) = f_1(x) \quad (l_1 < x \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

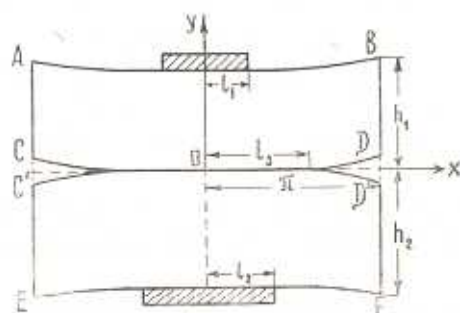
$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(2)}(\pi, y) = \tau_x^{(2)}(\pi, y) = 0 \quad (-h_2 \leq y \leq 0), \quad v_2(x, -h_2) = \psi_2(x) \quad (0 \leq x < l_2) \\ \tau_y^{(2)}(x, -h_2) = f_2(x) \quad (l_2 < x \leq \pi) \end{aligned}$$

условиям симметрии

$$\tau_{xy}^{(1)}(0, y) = u_1(0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq h_1), \quad \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = u_2(0, y) = 0 \quad (-h_2 \leq y \leq 0) \quad (1.2)$$

и условиям контакта двух прямоугольников

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0) \quad (0 \leq x \leq \pi) \\ v_1(x, 0) = v_2(x, 0) \quad (0 \leq x \leq l_3), \quad \tau_y^{(1)}(x, 0) = \tau_y^{(2)}(x, 0) \quad (l_3 < x \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1.

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эри известными соотношениями [3]

$$\begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \tau_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \partial x - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + EU_0 \\ Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + EV_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & \text{в области } ABDC \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } C'D'FE \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, y) = & P_i x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} ky}{k^2 \operatorname{sh} kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[1 + \frac{kh_i}{\operatorname{th} kh_i} - \frac{ky}{\operatorname{cth} ky} \right] - \right. \\ & \left. - Y_k^{(i)} \left[\frac{kh_i}{\operatorname{sh} kh_i} + \frac{\operatorname{ch}(h_i + (-1)^i y)}{\operatorname{ch} ky} - ky \frac{\operatorname{sh} k(h_i + (-1)^i y)}{(-1)^i \operatorname{ch} ky} \right] \right\} \cos kx - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k^{(i)} x}{\beta_k^{(i)2} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \left[1 + \frac{\beta_k^{(i)} \pi}{\operatorname{th} \beta_k^{(i)} \pi} - \frac{\beta_k^{(i)} x}{\operatorname{cth} \beta_k^{(i)} x} \right] \cos \beta_k^{(i)} y; \beta_k^{(i)} = \frac{k\pi}{h_i} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

При выборе функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) в виде (1.5) условия равенства нулю касательных напряжений по всему контуру прямоугольника, а также на линиях контакта $y = 0$ и симметрии $x = 0$ удовлетворяются тождественно. Из условий $u_1(0, y) = u_2(0, y) = 0$ получаем $U_0^{(1)} = U_0^{(2)} = 0$.

Удовлетворив остальным граничным условиям, после ряда выкладок для определения неизвестных коэффициентов $X_k^{(i)}, Y_k^{(i)}, Z_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$) получим следующие бесконечные системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)} = & \frac{4(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_p^{(1)} Z_p^{(1)}}{(\beta_p^{(1)2} + k^2)^2} - \frac{\beta_p^{(2)} Z_p^{(2)}}{(\beta_p^{(2)2} + k^2)^2} \right] + U_k^{(1)} + U_k^{(2)} \\ Z_k^{(i)} = & \frac{4(-1)^k \beta_k^{(i)2}}{h_i \Delta_k^{(i)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-i} p}{(\beta_k^{(i)2} + p^2)^2} \left[X_p^{(i)} - (-1)^k Y_p^{(i)} \right] \quad (i = 1, 2) \\ & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.6)$$

и парные ряды-уравнения

$$2(-1)^{i-1} P_i h_i + E_i V_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k^{(i)} \cos kx = E_i \psi_i(x) \quad (0 \leq x < l_i) \quad (1.7)$$

$$2P_i - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + M_k^{(i)}) X_k^{(i)} - N_k^{(i)} Y_k^{(i)}] \cos kx = f_i(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k Z_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}(x) \quad (l_i < x \leq \pi)$$

$$V_0^{(1)} - V_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} (E_1^{-1} Y_k^{(1)} - E_2^{-1} Y_k^{(2)}) \cos kx = 0 \quad (0 \leq x < l_2)$$

$$\begin{aligned} 2(E_1 + E_2) P_1 - \sum_{k=1}^{\infty} (E_2 Y_k^{(1)} - E_1 Y_k^{(2)}) \cos kx = & \sum_{k=1}^{\infty} (E_1 U_k^{(2)} - E_2 U_k^{(1)}) \cos kx - \\ - E_2 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(1)} \varphi_k^{(1)}(x) - E_1 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(2)} \varphi_k^{(2)}(x) \quad (l_2 < x \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.8)$$

В (1.6)–(1.8) введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(i)}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \left[\operatorname{ch} \beta_k^{(i)} x - \frac{\beta_k^{(i)} \pi}{\operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \operatorname{ch} \beta_k^{(i)} (\pi - x) - \beta_k^{(i)} (\pi - x) \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} x \right] \\ U_k^{(i)} &= N_k^{(i)} X_k^{(i)} - M_k^{(i)} Y_k^{(i)}, \quad \Delta_k^{(i)} = \operatorname{cth} \beta_k^{(i)} \pi + \beta_k^{(i)} \pi / \operatorname{sh}^2 \beta_k^{(i)} \pi \quad (1.9) \\ M_k^{(i)} &= \frac{e^{-kh_i}}{\operatorname{sh} kh_i} + \frac{kh_i}{\operatorname{sh}^2 kh_i}, \quad N_k^{(i)} = \frac{1 + \operatorname{cth} kh_i}{\operatorname{sh} kh_i} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Уравнения (1.6) представляют собой бесконечные системы алгебраических уравнений для определения $Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}, Y_k^{(1)} + Y_k^{(2)}$ через $X_k^{(i)}, Y_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$). А соотношения (1.7)–(1.8) представляют собой тригонометрические парные ряды-уравнения, которые намного сложнее обычных уравнений такого типа тем, что в их правых частях фигурируют слагаемые в виде рядов, содержащих неизвестные коэффициенты и комбинации гиперболических функций $\varphi_k^{(i)}(x)$.

2. Рассматривая парные уравнения (1.7) относительно неизвестных коэффициентов $X_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$) соответственно, а (1.8) относительно комбинаций $E_1^{-1} Y_k^{(1)} - E_2^{-1} Y_k^{(2)}$ и применяя известные методы решения таких уравнений [12], приведем их к бесконечным системам алгебраических уравнений

$$X_k^{(i)} = \sum_{p=1}^{\infty} [a_{pk}^{(i)} X_p^{(i)} + b_{pk}^{(i)} Y_p^{(i)} + c_{pk}^{(i)} Z_p^{(i)}] + \varphi_k^{(i)} \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} E_2 Y_k^{(1)} - E_1 Y_k^{(2)} &= \frac{k}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}] J_{pk}(l_3) - \sum_{p=1}^{\infty} E_2 Z_p^{(1)} K_{pk}^{(1)}(l_3) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=1}^{\infty} E_1 Z_p^{(2)} K_{pk}^{(2)}(l_3) - 4(E_1 + E_2) P_1 \int_{l_i}^{\pi} Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

и к уравнениям для определения постоянных $P_1, V_0^{(1)}, V_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 2(-1)^i P_1 \left(h_i - 4 \ln \sin \frac{l_i}{2} \right) - E_i [V_0^{(i)} - \varphi_i(0)] &= \int_0^{l_i} G_i(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \\ - (-1)^i \int_{l_i}^{\pi} F_i(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} [M_p^{(i)} X_p^{(i)} - N_p^{(i)} Y_p^{(i)}] y_p(\cos l_i) - \\ - (-1)^i \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p^{(i)} \int_{l_i}^{\pi} L_p^{(i)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (i=1, 2) \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$E_1 E_2 \left[V_0^{(1)} - V_0^{(2)} + 8P_1 \ln \sin \frac{l_1}{2} \right] = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} [E_1 U_p^{(2)} - E_2 U_p^{(1)}] y_p(\cos l_1) + \\ + E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} \int_{l_2}^{\pi} L_p^{(1)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + E_1 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)} \int_{l_1}^{\pi} L_p^{(2)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

В (2.1)–(2.3) введены обозначения

$$a_{pk}^{(i)} = -\frac{k}{2} M_p^{(i)} J_{pk}(l_i), \quad b_{pk}^{(i)} = \frac{k}{2} N_p^{(i)} J_{pk}(l_i), \quad c_{pk}^{(i)} = -\frac{k}{2} (-1)^{p+i} K_{pk}^{(i)}(l_i) \\ \gamma_k^{(i)} = \frac{k}{2} \left| \int_0^{l_i} G_i(\theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - 4(-1)^i P_1 \int_{l_i}^{\pi} z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \right. \\ \left. - (-1)^i \int_{l_i}^{\pi} F_i(\theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right| \\ J_{nk}(l_i) = \int_{l_i}^{\pi} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \\ = (n^2 - k^2)^{-1} [k z_k(\cos l_i) y_n(\cos l_i) - n z_n(\cos l_i) y_k(\cos l_i)] \quad (n \neq k)$$

$$J_{kk}(l_i) = (2k)^{-1} \left\{ 4 \sum_{m=1}^{k-1} P_m(\cos l_i) [P_m(\cos l_i) \cos l_i - P_{m-1}(\cos l_i)] + 2 + \right. \\ \left. + 4 \cos l_i + P_k^2(\cos l_i) - P_{k-1}^2(\cos l_i) - 2 P_{k-1}(\cos l_i) P_k(\cos l_i) \right\} \quad (i=1, 2)$$

$$F_i(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f_i(x) \sin x/2}{(\cos \theta - \cos x)^{1/2}} dx, \quad G_i(\theta) = -\frac{E_1 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{g_i(x) \sin x/2}{(\cos x - \cos \theta)^{1/2}} dx$$

Через $K_{pk}^{(i)}(l_i)$ обозначены интегралы

$$K_{pk}^{(i)}(l_i) = \int_{l_i}^{\pi} L_p^{(i)}(\cos \theta) z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (i=1, 2) \quad (2.5)$$

Функции $L_p^{(i)}(\cos \theta)$ связаны с $\varphi_p^{(i)}(x)$ формулой

$$L_p^{(i)}(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_p^{(i)}(x) \sin x/2}{(\cos \theta - \cos x)^{1/2}} dx \quad (i=1, 2) \quad (2.6)$$

Здесь $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, а $y_k(x)$ и $z_k(x)$ имеют вид

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad (|x| < 1) \quad (2.7)$$

Интегралы (2.5) легко вычисляются, если рассматривать их как интегралы типа Ломмеля [3] для функций $L_p(\cos\theta)$, $M_p(\cos\theta)$, $K_p(\cos\theta)$, $R_p(\cos\theta)$, где

$$M_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\pi \left[\operatorname{sh} p\varphi + \frac{p\pi \operatorname{sh} p(\pi-\varphi)}{\operatorname{sh} p\pi} - p(\pi-\varphi) \operatorname{ch} p\varphi \right] \frac{\cos \varphi/2 d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}} \quad (2.8)$$

$$K_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sh} p\varphi \cos \varphi/2 d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}, \quad R_p(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch} p\varphi \sin \varphi/2 d\varphi}{(\cos\theta - \cos\varphi)^{1/2}}$$

При больших значениях индекса „ p “ для этих функций имеют место асимптотические оценки

$$\begin{aligned} L_p(x) &= O(p^{-3}), \quad M_p(x) = O(p^{-2}) \\ K_p(x) &= O(p^{-2}), \quad R_p(x) = O(p^{-1}) \end{aligned} \quad (|x| < 1 - \delta) \quad (2.9)$$

и на концах интервала ($0 \leq \theta \leq \pi$) эти функции принимают значения

$$L_k(1) = M_k(-1) = K_k(-1) = 0$$

$$L_k(-1) = 2 \left(\operatorname{cth} k\pi - \frac{k\pi}{\operatorname{sh}^2 k\pi} \right), \quad R_k(1) = \frac{2}{k\pi}$$

$$R_k(-1) = 2 \operatorname{cth} k\pi, \quad K_k(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{(\infty)} \frac{(-1)^{p+1} p}{p^2 + k^2} \quad (2.10)$$

$$M_k(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p(p^2 - k^2)}{(p^2 + k^2)^2}$$

Решая совместно третье уравнение из (1.6) и уравнение (2.2) относительно „главных“ частей, содержащих $Y_k^{(1)}$ и $Y_k^{(2)}$, предварительно исключив неизвестные $Z_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$) при помощи (1.6), получим

$$\begin{aligned} Y_k^{(i)} &= (-1)^i \frac{k}{2} \left\{ 4P_1 \int_{l_1}^\pi z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}}{E_1 + E_2} J_{pk}(l_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_2 Z_p^{(1)} K_{pk}^{(1)}(l_2) + E_1 Z_p^{(2)} K_{pk}^{(2)}(l_2)}{E_1 + E_2} \right\} + \frac{E_i}{E_1 + E_2} (U_k^{(1)} + U_k^{(2)}) \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{16 E_i (-1)^k k^2}{\pi (E_1 + E_2)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n X_n^{(1)} \sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^\rho a_{\rho k n}^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n^{(1)} \sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho k n}^{(1)} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n X_n^{(2)} \sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^\rho a_{\rho k n}^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n Y_n^{(2)} \sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho k n}^{(2)} \right\} \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned}$$

где

$$a_{\rho k n}^{(i)} = \frac{\beta_p^{(i)3}}{h_i \Delta_p^{(i)} (\beta_p^{(i)2} + k^2)^2 (\beta_p^{(i)2} + n^2)^2}$$

Таким образом, вместо бесконечных систем (1.6), (2.1) и (2.2) можно рассматривать эквивалентные им системы (2.1) и (2.11).

Докажем, что эти последние системы квази-вполне регулярны. Для этого оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных.

На основе (2.1) и из оценок, полученных в работе [11], следует, что

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} |a_{\rho k}^{(i)}| < \frac{A_i}{V k}, \quad \sum_{\rho=1}^{\infty} |b_{\rho k}^{(i)}| < \frac{B_i}{V k}, \quad (i = 1, 2) \quad (2.12)$$

а на основе (2.9) и (2.3), с использованием значений функций $K_{\rho k}^{(i)}(x)$ [3], получим

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} |c_{\rho k}^{(i)}| < \frac{C_i}{V k} \quad (i = 1, 2) \quad (2.13)$$

Так как $\Delta_k^{(i)} > 1$ и $a_{\rho k n}^{(i)} > 0$ для любых значений индексов, то

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho k n}^{(i)} < \frac{1}{\pi} \left| \frac{k^2 + n^2}{(k^2 - n^2)^2} \ln \frac{k}{n} - \frac{1}{(k^2 - n^2)^2} \right| \quad (i = 1, 2)$$

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^\rho a_{\rho k n}^{(i)} < \frac{2\pi^2 h_i^4}{(\pi^2 + k^2 h_i^2)^2 (\pi^2 + n^2 h_i^2)^2}$$

и для сумм модулей коэффициентов при неизвестных системы (2.11) будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \frac{16 E_i k^2}{\pi (E_1 + E_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n \sum_{\rho=1}^{\infty} (-1)^\rho a_{\rho k n}^{(i)} \right| < \\
 & < \frac{32\pi^2 E_i h_i^4 k^2}{(E_1 + E_2) (\pi^2 + h_i^2 k^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi^2 + n^2 h_i^2)^2} \rightarrow O(k^{-2}) \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\frac{16 E_i k^2}{\pi (E_1 + E_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n n \sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho k n}^{(i)} \right| < \frac{4 E_i}{\pi^2 (E_1 + E_2)} \quad (i = 1, 2)$$

Суммы модулей остальных коэффициентов при неизвестных в системе (2.11) стремятся к нулю, по крайней мере, как $O(k^{-1/2})$.

Таким образом, суммы модулей коэффициентов бесконечных систем (2.1) и (2.11) при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю или остаются меньше единицы. Следовательно, эти системы, свободные члены которых имеют порядок $O(k^{-1/2})$, квази-вполне регулярны и имеют единственное решение, которое можно определить методом последовательных приближений [13].

3. Имея решения бесконечных систем $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$), на основе (1.4) и (1.5) для определения напряжений и перемещений получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^{(i)}(x, y) = & 2P_1 - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ch} ky}{\text{sh} kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[1 + \frac{kh_i}{\text{th} kh_i} - \frac{ky}{\text{cth} ky} \right] - \right. \\ & \left. - Y_k^{(i)} \left[\frac{kh_i}{\text{sh} kh_i} - ky \frac{\text{sh} k(h_i + (-1)^i y)}{(-1)^i \text{ch} ky} + \frac{\text{ch} k(h_i + (-1)^i y)}{\text{ch} ky} \right] \right\} \cos kx + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \text{ch} \beta_k^{(i)} x}{\text{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \left[1 - \frac{\beta_k^{(i)} \pi}{\text{th} \beta_k^{(i)} \pi} + \frac{\beta_k^{(i)} x}{\text{cth} \beta_k^{(i)} x} \right] \cos \beta_k^{(i)} y \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_i v(x, y)}{1 - \nu_i} = & \frac{E_i V_0^{(i)} + 2P_1 y}{1 + \nu_i} - (-1)^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh} ky}{k \text{sh} kh_i} \left\{ X_k^{(i)} \left[\frac{2}{1 + \nu_i} + \frac{kh_i}{\text{th} kh_i} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{ky}{\text{th} ky} \right] - Y_k^{(i)} \left[\frac{kh_i}{\text{sh} kh_i} - ky \frac{\text{ch} k(h_i + (-1)^i y)}{\text{sh} ky} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2 \text{sh} k(h_i + (-1)^i y)}{(-1)^i (1 + \nu_i) \text{sh} ky} \right] \right\} \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k^{(i)} \text{ch} \beta_k^{(i)} x}{\beta_k^{(i)} \text{sh} \beta_k^{(i)} \pi} \left[\frac{1 - \nu_i}{1 + \nu_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta_k^{(i)} x}{\text{cth} \beta_k^{(i)} x} - \frac{\beta_k^{(i)} \pi}{\text{th} \beta_k^{(i)} \pi} \right] \sin \beta_k^{(i)} y \end{aligned}$$

По этим формулам можно вычислить значения основных расчетных величин в любой точке прямоугольников.

Однако, при приближении к концам штампов и области контакта, некоторые ряды расходятся или сходятся медленно.

Для улучшения сходимости этих рядов и выделения особенностей напряжений на концах штампов, преобразуем формулы для контактных напряжений и перемещений на линиях $y = h_1$, $y = 0$ и $y = -h_2$.

Подставляя значения $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ из бесконечных систем в (3.1), после ряда выкладок для контактных напряжений $\varepsilon_y^{(i)}$ и перемещений вне штампов v_i получим следующие удобные для расчета формулы:

$$\begin{aligned}
a_p^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] = & f_i(x) + \frac{R_i \sqrt{2} \cos x/2}{2\sqrt{\cos x - \cos l_i}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} \left\{ \int_x^{l_i} \frac{F_i(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} d\theta \right. \\
& + (-1)^i \int_x^{l_i} \frac{G_i(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} d\theta - (-1)^i \sum_{p=1}^{\infty} p [M_p^{(i)} X_p^{(i)} - \\
& - N_p^{(i)} Y_p^{(i)}] \int_x^{l_i} \frac{y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta/2}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} d\theta - \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \beta_p^{(i)} Z_p^{(i)} \times \\
& \times \left. \int_x^{l_i} \frac{M_p^{(i)}(\cos \theta) + K_p^{(i)}(\cos \theta)}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \right\} \quad (i=1, 2) \quad (3.2) \\
& (0 \leq x < l_i)
\end{aligned}$$

$$(E_1 + E_2) \tau_p(x, 0) = \frac{R_3 \sqrt{2} \cos x/2}{2\sqrt{\cos x - \cos l_3}} +$$

$$+ \frac{\cos x/2}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p [E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}] \int_x^{l_3} \frac{y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \theta/2}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} d\theta - \right.$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \left[E_2 \beta_p^{(1)} Z_p^{(1)} \int_x^{l_3} \frac{M_p^{(1)}(\cos \theta) + K_p^{(1)}(\cos \theta)}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta + \right.$$

$$\left. + E_1 \beta_p^{(2)} Z_p^{(2)} \int_x^{l_3} \frac{M_p^{(2)}(\cos \theta) + K_p^{(2)}(\cos \theta)}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \right\} \quad (0 \leq x < l_3) \quad (3.3)$$

$$E_i v_i[x, (-1)^{i-1} h_i] = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \left\{ (-1)^i \int_x^{l_i} \frac{F_i(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} d\theta - \right.$$

$$- \int_0^{l_i} \frac{G_i(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} d\theta + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} Z_p^{(i)} \int_{l_i}^x \frac{L_p^{(i)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} d\theta +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} [M_p^{(i)} X_p^{(i)} - N_p^{(i)} Y_p^{(i)}] \int_{l_i}^x \frac{z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}} d\theta \left. \right\} + 2 \int_0^{l_i} G_i(\theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta +$$

$$+ 4P_1 (-1)^i \sqrt{2} \ln \frac{\sin x/2 + \sqrt{\sin^2 x/2 - \sin^2 l_i/2}}{\sin l_i/2} + E_i \psi_i(0) \quad (i=1, 2) \quad (0 \leq x < l_i) \quad (3.4)$$

Здесь постоянные множители R_i ($i = 1, 2, 3$) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 4P_1 + F(l_1) + G_1(l_1) + (-1)^i \sum_{p=1}^{\infty} [M_p^{(i)} X_p^{(i)} - N_p^{(i)} Y_p] z_p(\cos l_1) + \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p^{(i)} L_p^{(i)}(\cos l_1) \quad (i = 1, 2) \\
 R_3 &= 4(E_1 + E_2) P_1 - \sum_{p=1}^{\infty} [E_2 U_p^{(1)} - E_1 U_p^{(2)}] z_p(\cos l_3) + \\
 &\quad + E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} L_p^{(1)}(\cos l_3) + E_1 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)} L_p^{(2)}(\cos l_3)
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Имея контактные напряжения (3.2), легко вычислить значения сил, действующих на штампы

$$Q_i = 2 \int_0^{l_i} \sigma_y^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] dx = 4\pi P_1 - 2 \int_{l_i}^{\pi} f_i(x) dx \quad (3.6)$$

До сих пор мы предполагали, что длина зоны контакта $2l_3$ между материалами известна. Это привело к тому, что контактное напряжение (3.3) неограниченно возрастает при приближении к концу зоны контакта ($x \rightarrow l_3$). Но из физических соображений ясно, что контактное напряжение должно быть непрерывным и ограниченным, то есть должно иметь место условие $\sigma_y(l_3, 0) = 0$, откуда и следует, что $R_3 = 0$. Это условие дает уравнение для определения размера контакта

$$\begin{aligned}
 4(E_1 + E_2) P_1 + \sum_{p=1}^{\infty} [E_1 U_p^{(2)} - E_2 U_p^{(1)}] z_p(\cos l_3) + \\
 + E_2 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} L_p^{(1)}(\cos l_3) + E_1 \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(2)} L_p^{(2)}(\cos l_3) = 0
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для получения полного решения задачи необходимо совместно решать бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (1.6), (2.1), (2.2), линейные уравнения (2.3) в трансцендентное относительно l_3 уравнение (3.7).

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу двумя жесткими плоскими штампами одинаковой длины, а контур прямоугольника вне штампов свободен от внешних нагрузок, то есть

$h_1 = h_2$, $l_1 = l_2$, $f_1(x) = f_2(x) = 0$, $\psi_1(x) = -\delta_1$, $\psi_2(x) = \delta_2$; $\delta_1, \delta_2 \sim \text{const}$.

В этом случае $X_k^{(1)} = -X_k^{(2)}$, $Y_k^{(1)} = -Y_k^{(2)}$, $Z_k^{(1)} = Z_k^{(2)}$.

Введем новых неизвестных по формулам

$$X_k^{(1)} = 2P_1 X_k, \quad Y_k^{(1)} = 2P_1 Y_k, \quad Z_k^{(1)} = 2P_1 Z_k \quad (4.1)$$

бесконечные системы (1.6), (2.1), (2.2) и трансцендентное уравнение (3.7) приводятся к виду

$$X_k = \frac{k}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (N_p Y_p - M_p X_p) J_{pk}(l) + \frac{k}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p K_{pk}(l) + y_k(\cos l)$$

$$Y_k = \frac{k}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (N_p X_p - M_p Y_p) J_{pk}(l_3) - \frac{k}{2} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p K_{pk}(l_3) - y_k(\cos l_3) \quad (4.2)$$

$$Z_k = \frac{4(-1)^k \delta_2}{h \delta_k} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} p}{(p^2 + k^2)^2} [X_p - (-1)^k Y_p]$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (M_p Y_p - N_p X_p) z_p(\cos l_3) + \sum_{p=1}^{\infty} Z_p L_p(\cos l_3) + 2 = 0$$

Система (2.3) для определения постоянных $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$ и P_1 принимает вид

$$V_0^{(2)} = \frac{\alpha \delta_2 - \delta_1}{2} - \frac{1}{\alpha} V_0^{(1)}, \quad \text{где } \alpha = \frac{E_2}{E_1}$$

$$E_1(V_0^{(1)} + \delta_1) + 2P_1 \left(h - 4 \ln \sin \frac{l}{2} \right) = \sum_{p=1}^{\infty} (N_p Y_p^{(1)} - M_p X_p^{(1)}) p^{-1} Y_p(\cos l) -$$

$$- \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p^{(1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L_p(\cos \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} d\xi \quad (4.3)$$

$$E_1 \left(V_0^{(1)} + \frac{\delta_1 - \alpha \delta_2}{1 + \alpha} \right) + 8P_1 \ln \sin \frac{l_3}{2} = \sum_{p=1}^{\infty} (M_p Y_p^{(1)} - N_p X_p^{(1)}) p^{-1} y_p(\cos l_3) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L_p(\cos \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} d\xi$$

Поскольку основная цель работы заключается в определении размера контакта l_3 , то уравнения (4.2) позволяют добиться этого без рассмотрения неизвестных, связанных с жесткими перемещениями, то есть уравнений (4.3). Отсюда следует, что если прямоугольники из

различных материалов, имеющие одинаковые размеры, прижимаются друг к другу одинаковыми, симметрично расположенными жесткими плоскими гладкими штампами, то размер области контакта не зависит от материалов составных частей и от величины осадок штампов.

б) Пусть штампы отсутствуют и по противоположным сторонам прямоугольника AB и EF действует одинаковая нормальная нагрузка, симметричная относительно оси Oy , то есть $l_1 = l_2 = 0$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$.

В этом случае бесконечные системы (1.6), (2.2) и трансцендентное уравнение (3.7) остаются без изменения, а системы (2.1) принимают вид

$$X_k^{(i)} = (-1)^i \left\{ \frac{4(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_{\rho}^{(i)} Z_{\rho}^{(i)}}{(\beta_{\rho}^{(i)2} + k^2)^2} - (-1)^i [M_k^{(i)} X_k^{(i)} - N_k^{(i)} Y_k^{(i)}] - \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx - 4P_1 \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (4.4)$$

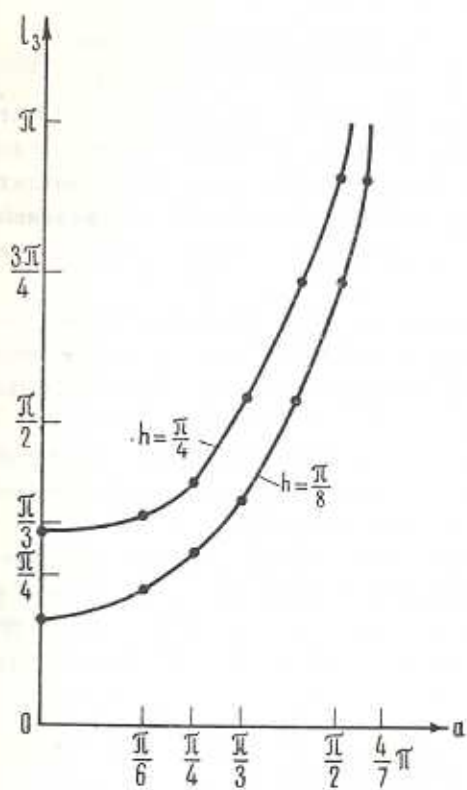
Из линейных уравнений (2.3) получается

$$\begin{aligned} E_1 E_2 (v_0^{(1)} - v_0^{(2)}) + 8(E_1 + E_2) P_1 \ln \sin \frac{l_3}{2} = \\ = \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} [E_1 U_p^{(2)} - E_2 U_p^{(1)}] y_p(\cos l_3) + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \left[E_2 Z_p^{(1)} \int_{l_3}^{\pi} L_p^{(1)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \right. \\ \left. + E_1 Z_p^{(2)} \int_{l_3}^{\pi} L_p^{(2)}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right]; \quad 2P_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (4.5) \end{aligned}$$

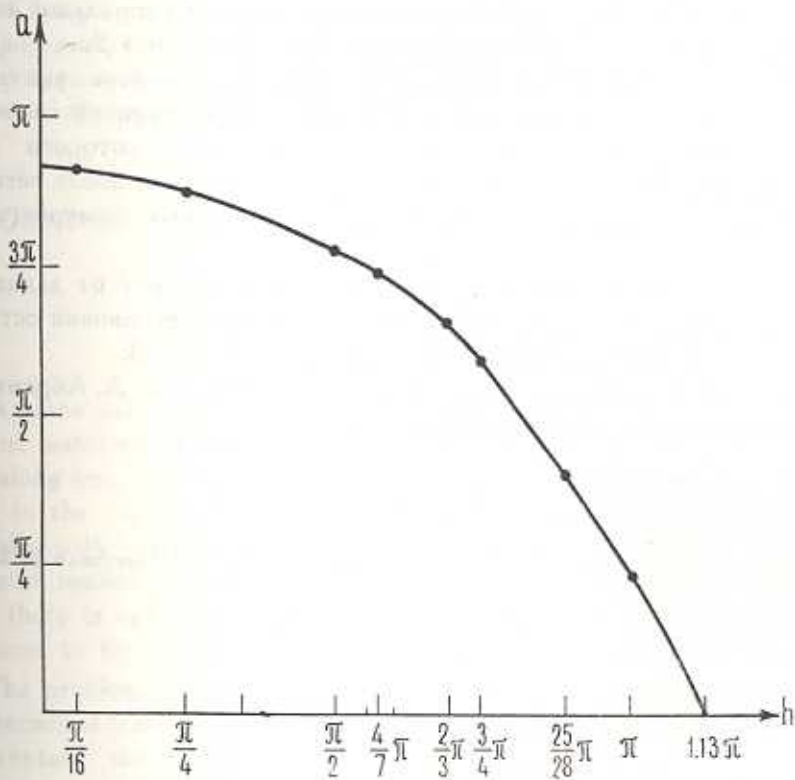
Отметим, что и в данном случае при $h_1 = h_2$, то есть когда два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу симметричными силами, размер контакта не зависит от интеграла действующих сил и от упругих характеристик материалов.

Полученный результат является следствием симметрии граничных условий и геометрии задачи, а также отсутствия касательных напряжений в зоне контакта и можно объяснить следующим образом.

В контактной задаче прямоугольника, прижатого нормальной симметричной нагрузкой к жесткому гладкому основанию, контактное напряжение не зависит от упругих постоянных материала, так как эта задача приводится к первой основной задаче для прямоугольника.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В частности, два прямоугольника из различных материалов с одинаковыми геометрией и нагружением при гладком контакте с жестким плоским основанием будут иметь одинаковые контактные напряжения. При замене действий жестких оснований нормальными контактными напряжениями соответствующие края прямоугольников останутся плоскими.

Если теперь соединим эти прямоугольники по участкам, где действуют нормальные напряжения, то напряженно-деформированные состояния отдельных частей и системы из двух прямоугольников в целом не изменятся.

Следовательно, контактное напряжение между двумя прямоугольниками с одинаковой геометрией при симметричном нагружении не зависит от материалов прямоугольников.

И так как размер зоны контакта определяется из условия, накладываемого на контактное напряжение, то и этот размер не будет зависеть от упругих постоянных материалов прямоугольников.

В качестве численного примера для этого случая примем $h_1 = h_2 = h$ и

$$f(x) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{при } -a \leq x \leq a \end{cases}$$

то есть два прямоугольника одинаковых размеров прижимаются друг к другу одинаковой, равномерно распределенной нормальной нагрузкой интенсивности p , действующей по участкам длиной $2a$.

На фиг. 2 приведены графики зависимости размера контакта l_2 от длины участка распределения нагрузки a . Из графиков видно, что с увеличением участка распределения нагрузки до некоторого значения a_0 размер контакта увеличивается почти линейно, после чего резко возрастает. Значение a_0 зависит от относительных размеров прямоугольника.

График зависимости толщины прямоугольников h от длины участка приложения нагрузки при условии, что прямоугольники остаются в контакте по всей длине ($l_2 = \pi$), приведен на фиг. 3.

Авторы выражают признательность проф. Б. А. Абрамяну за постановку задачи и ценные советы.

Институт механики АН
Армянской ССР

Ереванский политехнический
институт им. К. Марся

Получила 16 XII 1974

Մ. Գ. ՄԵԼԿՈՆԻԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը տարբեր նյութերից երկու ուղղանկյունների համար: Ուղղանկյունները իրար են սեղմվում մի կողմով կառուցման բացակայության դեպքում: Սեղմող ուժերի ազդեցությունը ուղղանկյուններին է փոխանցվում կամ կոշտ ողորկ դրոշմների միջոցով, որոնք ուղղանկյունների համաշափության ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ զասավորված են համաշափ, կամ էլ անմիջապես սեղմող ուժերի կիրառումով: Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերի ազդեցության տակ կա կոնտակտի միայն մեկ անընդհատ տիրույթ, որի շափը համարվում է անհայտ և որոշվում է տրանսցենդենտ հավասարումից:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով: Վերլուծության գործակիցները վորոշվում են գծային հավասարումների անվերջ սխտեմներից: Ապացուցվում է, որ ընդհանուր դեպքում կոնտակտի տիրույթի ցանկացած երկարության համար անվերջ սխտեմները կվազի-լիովին ռեզուլյար են:

Երկրաչափական պարամետրերի մի քանի կոնկրետ հարաբերությունների համար դիտված են թվային օրինակներ: Կառուցված են զրաֆիկներ, որոնք ցույց են տալիս բեռնվածության տեղամասի երկարությունից կոնտակտի շափի կախվածությունը և ուղղանկյունների հաստությունից բեռնվածության տեղամասի երկարության կախվածությունը այն պայմանով, որ ուղղանկյունները կոնտակտի մեջ լինեն սեղմման գծի ամբողջ երկարությամբ:

ON A CONTACT PROBLEM FOR TWO RECTANGLES

M. G. MELKONIAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem in the theory of elasticity for two rectangles of different materials is considered. The rectangles are pressed to one another along one side free from coupling. The pressing forces are imparted to the rectangles either through rigid smooth dies spaced symmetrically with respect to the vertical axis of symmetry of the rectangles or immediately. It is assumed that due to action of external forces there is only one continuous contact domain whose dimension is considered to be unknown and defined from the transcendental equation.

The problem is solved by Fourier's method. Expansion coefficients are determined from infinite systems of linear equations. Infinite systems for a contact domain of any length in the general case are proved to be quasi-quite regular.

Numerical examples are presented for some specific relations of

geometric parameters. The graphs are constructed for dependence of the contact domain upon the length of load distribution section as well as for dependence of the length of load application portion upon the thickness of the rectangles, provided the rectangles contact one another throughout the length of the compression line.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян Б. А.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
2. *Баблоян А. А., Гулакян Н. О.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 23, №5, 1970.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 24, №5, 1971.
4. *Мелконян М. Г.* Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, №1, 1972.
5. *Вейдман.* О контакте без сцепления между пластижкой и упругим полупространством. Прикл. мех., Изд. „Мир“, №2, 1969.
6. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifting of a plate from the Foundation Due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics, Proceedings of the 11th Midwestern Mechanics Conference, vol. 5, 1969.
7. *Пу С. А., Хуссейн М. А.* К вопросу о контакте без сцепления между пластижкой и упругим полупространством, Прикл. мех., № 3, 1970. Изд. „Мир“.
8. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. мех., т. 7, №11, 1971.
9. *Кир, Дандерс, Цвай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех., № 4, 1972. Изд. „Мир“.
10. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикл. мех., № 4, 1972. Изд. „Мир“.
11. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определенным областью контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 27, №5, 1974.
12. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
13. *Канторович А. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, А.-М., 1959.