ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

М. А. БУРЫШКИН

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП К ЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Учет симметрии механических систем в разнообразных расчетах связан с применением методов теории представлений групп [3—6]. С практической точки зрения весьма важен такой подход к исследованию симметричных инженерных конструкций, в котором бы эти методы — специфичные и зачастую громоздкие — непосредственно не участвовали. В работе [6] приведена методика статических расчетов пластин с циклической симметрией, отвечающая указанному условию. В данной работе эта методика распространяется на разнообразные линейные задачи механики консервативных систем, обладающих произвольной группой симметрии.

1. Группы симметрии реальных механических систем относятся к следующим двенадцати типам точечных групп: C_n, D_n, T, O, S_{2n}, C_{nh}, C_{nv}, D_{nh}, D_{nd}, T_d, T_h и O_h (описание этих групп приведено, например, в [1]), причем $C_{nh} = C_n \times \sigma_h$, $D_{nh} = D_n \times C_{oh}$, $D_{2n+1, d} = D_{2n+1} \times I$, $T_h = T \times I$ и $O_h = O \times I$ [1]. Последние равенства в общем виде записываются как $G'' = G' \times E_2$, где G'' — любая из групп C_{nh}, D_{nh}, $D_{2n+1, d}$, T_h и O_h; G' и E_2 — соответствующие G'' группы с порядками, равными m' и двум. В дальнейшем через m обозначается порядок группы G; l и m_γ — число различных неприводимых представлений τ_γ и их размерность; l' — число неприводимых представлений группы G', а $q_j(G)$ и просто q_j — j-ый элемент группы G.

Каждая точечная группа характеризуется своей системой простых и зеркальных осей (здесь отражение рассматривается как зеркальный поворот на 360°). Оси нумеруются, начиная с осей высшего порядка. Обозначения отражений, а также нумерация осей в пределах одного порядка совпадают с принятыми в [1], причем ось $C_4^{(2)}$ группы O направляется вертикально вверх. Если множества простых поворотов вокруг осей некоторой группы первого рода расположить в соответствии с нумерацией осей, причем в каждом таком множестве повороты, отсчитываемые в направлении против часовой стрелки, располагать в порядке увеличения их углов, то элементы групп 1-го рода упорядочиваются и нумеруются, начиная с единичного. Неприводимые представления групп 1-го рода пронумерованы в [1].

Замечание 1. Если некоторое представление τ_γ группы G — комплексно, то с теми же оговорками, что и в [6], вместо τ_γ и $\bar{\tau}_\gamma$ рассматривается уже приводимое представление, индуцируемое регулярным представлением группы G на объединение подпространств $R_{\nu}^{(k)}$ и $\overline{R}_{\nu}^{(k)}$ преобразующихся соответственно по τ_{ν} и $\overline{\tau}_{\nu}$. Указанному представлению приписывается наименьший из номеров представлений τ_{ν} и $\overline{\tau}_{\nu}$. Таково, например, второе представление группы T.

Упорядочивание множества зеркальных поворотов групп C_{nv}, S_{2n}, D_{2nd} и T_d аналогично множеству простых поворотов и подчинение первого множества второму определяет способ нумерации элементов этих групп. Удобно считать, что номера одинаковых неприводимых представлений изоморфных групп совпадают.

Теперь естественно нумеровать элементы и неприводимые представления групп C_{nh}, D_{nh}, $D_{2n+1,\, d}$, T_h и O_h по следующему принципу: $g_j(G'') = g_j(G')$, $g_{j+m'}(G'') = g_2(E_2)\, g_j(G')$, $(j = 1, 2, \ldots, m')$ и $\tau_{\nu}'' = \tau_{\nu}' \times \theta_1$; $\tau_{\nu+l'}'' = \tau_{\nu}' \times \theta_2$, $(\nu = 1, 2, \ldots, l')$, где τ_{ν}'' и τ_{ν}' — ν-ые неприводимые представления групп G'' и G', а θ_1 и θ_2 — неприводимые представления группы E_2, причем θ_1 — единичное представление.

Пусть область Ω трехмерного пространства обладает точечной группой G симметрии, $x \in \Omega$ — произвольная точка этой области, а p и $p(x)$ — определенная в Ω вектор-функция и ее значение в точке x. Действуя элементом симметрии $g_j \in G (j = 1, 2, \ldots, m)$ на точку x и вектор-функцию p, получим соответственно точку $g_j x$ и функцию p_j, которая точке x ставит в соответствие вектор $g_j\, p(g_j^{-1} x)$. Согласно [2] справедливы разложения

$$p = \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{m_{\nu}} p_{\nu\mu}^{(\nu)}; \qquad p_{\nu\mu}^{(k)} = \sum_{j=1}^{m} c_{\nu\mu j}^{(k)} p_j \;\; (\nu = 1, 2, \ldots l; \;\; \mu, k = 1, 2, \ldots, m_{\nu}) \tag{1}$$

Коэффициенты $c_{\nu\mu j}^{(k)}$ и матрицы $\hat{\tau}_{\nu}(g_j)$ представлений τ_{ν} для групп C_n и C_{nv} приведены в [6]. Для групп T и O эти коэффициенты и μk-е элементы $\hat{\tau}_{\nu\mu k}(g_j) (\nu = 1, 2, \ldots, l; \;\; j = 1, 2, \ldots, m; k, \mu = 1, 2, \ldots, m_{\nu})$ указанных матриц даны в табл. 1. В случае одномерных представлений матрицы $\hat{\tau}_{\nu}(g_j)$ вырождаются в скаляры, являющиеся значениями характеров этих представлений. Для групп D_n, S_{2n}, D_{2nd} и T_d соответственно имеющимся изоморфизмам попросту переставляются коэффициенты и матрицы групп C_{nv}, C_{2n}, D_{4n} и O.

Замечание 2. Приведем необходимые соответствия между номерами элементов изоморфных групп: $g_j(S_{2n}) \leftrightarrow g_{2j-1}(C_{2n})$, $g_{j+n}(S_{2n}) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow g_{2j}(C_{2n})$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $g_j(D_{2nd}) \leftrightarrow g_{2j-1}(D_{4n})$, $g_{2n+j}(D_{2nd}) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow g_{4n+2j-2}(D_{4n})$, $g_{4n+j}(D_{2nd}) \leftrightarrow g_{2j}(D_{4n})$, $g_{6n+j}(D_{2nd}) \leftrightarrow g_{4n+2j}(D_{4n})$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$; $g_j(D_n) \leftrightarrow g_j(C_{nv})$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$; $T_d \leftrightarrow O$: $1 \leftrightarrow 1$; $2 \leftrightarrow 17$; $3 \leftrightarrow 18$; $4 \leftrightarrow 16$; $5 \leftrightarrow 15$; $6 \leftrightarrow 13$; $7 \leftrightarrow 14$; $8 \leftrightarrow 12$; $9 \leftrightarrow 11$; $10 \leftrightarrow 3$; $11 \leftrightarrow 6$; $12 \leftrightarrow 9$; $13 \leftrightarrow 2$; $14 \leftrightarrow 4$; $15 \leftrightarrow 5$; $16 \leftrightarrow 7$; $17 \leftrightarrow 10$; $18 \leftrightarrow 8$; $19 \leftrightarrow 21$; $20 \leftrightarrow 20$; $21 \leftrightarrow 22$; $22 \leftrightarrow 23$; $23 \leftrightarrow 19$; $24 \leftrightarrow 24$.

Таблица 1

Коэффициенты $c^{(\varkappa)}_{\nu\mu j}$ и матричные элементы $\hat{\tau}_{\nu\mu\kappa}(\bar{g}_j)$																													
Группа	Индексы			Коэффициенты		Значения $\hat{\tau}_{\nu\mu\kappa}(\bar{g}_j)/b$ и $c^{(\varkappa)}_{\nu\mu j}\cdot d$																							
	ν	μ	κ	b	d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
O	1	1	1	1	24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	1	1	24	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	3	1	1	1/2	12	2	-2	2	-2	1	2	1	1	2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-2	-2	1	1
		2		$\sqrt{3}/2$	12	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0	0	1	1
		1	2	$\sqrt{3}/2$	12	0	0	0	0	1	0	1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	0	1	1
		2		1/2	12	2	2	2	2	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	-1	-1
	4	1	1	1	8	1	1	1	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
		2		1	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	-1	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0	0	0
		3		1	8	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1
		1	2	1	8	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
		2		1	8	1	0	-1	0	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
		3		1	8	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	1	0	0
		1	3	1	8	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1	1
		2		1	8	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	-1	1	0	0
		3		1	8	1	0	-1	0	0	-1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
	5	1	1	1	8	1	-1	1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		2		1	8	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	0	-1	1	0	-1	1	0	0	0	0
		3		1	8	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1
		1	2	1	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	1	-1	1	0	0	0	0
		2		1	8	1	0	-1	0	-1	1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
		3		1	8	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	1	-1	0	0
		1	3	1	8	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	1	-1
		2		1	8	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	0	0
		3		1	8	1	0	-1	0	0	-1	0	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\bar{T}$	1	1	1	1	12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	2	1	1	1/2	6	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		$\sqrt{3}/2$	6	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	2	$\sqrt{3}/2$	0	0	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1/2	0	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2	2	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	3	1	1	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	0	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	2	1	4	0	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	-1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		1	3	1	4	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		2		1	4	0	0	-1	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
		3		1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Наконец, коэффициенты $c^{(k)}_{\nu\mu j}$ и матрицы $\hat{\tau}_\nu(g_j)$ для любой группы $G'' = G' \times E_2$ определяются из раненств: $c^{(k)}_{\nu\mu j}(G'') = c^{(k)}_{\nu\mu, j+m'}(G'') =$
$= c^{(k)}_{\nu+l', \mu, j}(G'') = -c^{(k)}_{\nu+l', \mu, j+m'}(G'') = \dfrac{1}{2} c^{(k)}_{\nu\mu j}(G'); \hat{\tau}_\nu[g_j(G'')] = \hat{\tau}_\nu[g_{m'+j}(G'')] =$
$= \hat{\tau}_{\nu+l'}[g_j(G'')] = -\hat{\tau}_{\nu+l'}[g_{m'+j}(G'')] = \tau_\nu[g_j)(G')]; \nu = 1, 2, \ldots, l'; j = 1, 2, \ldots, m;$
$k, \mu = 1, 2, \ldots, m_\nu$.

Через Ω_1 обозначается элементарная ячейка области Ω. Положим для конкретности, что в зависимости от типа группы G ячейка Ω_1 ограничивается следующими плоскостями: C_n — $\Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$; D_n — $\Pi(C_n, C_2^{(1)})$, $\Pi(C_n, C_2^{(3)})$, $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(3)})$; T — $\Pi(C_3^{(4)}, C_3^{(1)})$, $\Pi(C_3^{(4)}, C_3^{(2)})$, $\Pi(C_2^{(1)}, C_3^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(1)}, C_3^{(2)})$; O — $\Pi(C_4^{(1)}, C_3^{(1)})$, $\Pi(C_4^{(1)}, C_3^{(4)})$, $\Pi(C_2^{(4)}, C_3^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(4)}, C_3^{(4)})$; S_{2n} — $\Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$; C_{nh} — $\Pi(e)$, $\Pi(C_n)$ и $\Pi(\sigma)$; C_{nv} — $\Pi(\sigma_1)$ и $\Pi(\sigma_2)$; D_{nh} — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$ и $\Pi(\sigma)$; D_{nd} — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_2)$, $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_2^{(2)}, C_2^{(3)})$; T_d — $\Pi(\sigma_{23})$, $\Pi(\sigma_{13})$ и $\Pi(\sigma_{12})$; T_h — $\Pi(\sigma_{14})$, $\Pi(C_3^{(1)}, C_2^{(1)})$ и $\Pi(C_3^{(1)}, C_2^{(2)})$; O_h — $\Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_{12})$ и $\Pi(\sigma_{11})$. Здесь $\Pi(e)$ — произвольная полуплоскость, проходящая через ось C_n; $\Pi(C_n)$ и $\Pi(S_{2n})$ — полуплоскости, полученные из $\Pi(e)$ воздействием элементов C_n и S_{2n}; $\Pi(C_n^{(i)}, C_n^{(j)})$ — полуплоскость, проходящая через оси $C_n^{(j)}$, $C_n^{(i)}$ и ограниченная последней, $\Pi(\sigma_i)$ — плоскость отражения σ_i.

2. Пусть упругая механическая система S занимает область Ω. Тогда в подобласти Ω_1 располагается элементарная ячейка S_1 системы S [4]. Введем в Ω_1 координатную систему u_1, v_1, z_1. Действуя на Ω_1 элементом симметрии $g_j \in G$, получим новую подобласть Ω_j с координатной системой u_j, v_j, z_j. Вектор-функция p, заданная на Ω, определена и в Ω_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, где может быть выражена как вектор-функция $p(u_j, v_j, z_j)$ соответствующих координат. Если r, q и J — перемещения, внешние и инерционные силы в точках системы S, то из принципа виртуальных перемещений следует такое уравнение движения:

$$\delta V = \int_\Omega (q + J)\, \delta r \tag{2}$$

где V — потенциальная энергия системы S.

Следствием симметрии является тот факт, что перемещения точек системы S под нагрузкой p_j определяются вектор-функцией r_j. Тогда в силу разложения (1) и линейности задачи нагрузке $q^{(k)}_{\nu k}$ отвечает вектор-функция $r^{(k)}_{\nu k}$ перемещений системы S. В связи с этим при нагрузке типа $q^{(k)}_{\nu k}$, используя выражение

$$\int_\Omega p^{(k)}_{\nu\mu} f^{(k')}_{\nu'\mu'} d\Omega = \delta_{\nu\nu'} \delta_{\mu\mu'} \frac{m}{m_\nu} \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \int_{\Omega_1} p^{(k)}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1) f^{(k')}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1)\, d\Omega_1 \tag{3}$$

в котором под f, как и под p, понимается произвольная вектор-функция, заданная на Ω, а $\delta_{\nu\nu'}$ и $\delta_{\mu\mu'}$ — символы Кронекера, и которое является естественным обобщением аналогичного равенства из [6], можно показать тем же путем, что и в [6], справедливость записи уравнения (2) в следующей форме:

$$\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \delta V_1^{(\nu\mu k)} = \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \int_{\Omega_1} (q_{\nu\mu}^{(k)} + f_{\nu\mu}^{(k)}) (\delta r)_{\nu\mu}^{(k)} d\Omega_1 \tag{4}$$

где $V_1^{(\nu\mu k)}$ — потенциальная энергия ячейки S_1 в случае, когда перемещения системы S имеют вид $r_{\nu\mu}^{(k)}$. Соответственно [6] выражение (4) трактуется как уравнение движения (в частном случае — равновесия системы S_ν, состоящей из m_ν элементарных ячеек $S_{\nu\mu}$, совпадающих с S_1 и загруженных внешними силами по схеме $q_\nu^{(k)}$, при которой на ячейку $S_{\nu\mu}$ действует нагрузка $q_{\nu\mu}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$.

Нетрудно получить такие соотношения

$$p_{\nu\mu}^{(k)}(u_j, v_j, z_j) = q_j \sum_{\mu'=1}^{m_\nu} \hat{\varepsilon}_{\nu\mu'\mu}(q_j^{-1})\, p_{\nu\mu'}^{(k)}(u_1, v_1, z_1) \tag{5}$$

Из (5) видно, что деформативное, а следовательно, и напряженное состояние S_ν, загруженной по схеме $q_\nu^{(k)}$, полностью характеризуют соответствующие состояния всей системы S. Поэтому в случае линейной механической задачи оказывается возможным вместо непосредственного нахождения составляющих $w_{\nu k}^{(k)}$ искомой функции w определять порождающие их функции $w_{\nu\mu}^{(k)}(u_1, v_1, z_1)$, которые для ячеек $S_{\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, .., m_\nu$) системы S_ν имеют тот же физический смысл, что и функция w для системы S.

Плоскости, ограничивающие Ω_1, разбиваются на три категории: а) плоскости типа $\Pi(\sigma_i)$, б) пары плоскостей $\Pi(C_n^{(i)}, C_l^{(s)})$ и $\Pi(C_n^{(i)}, C_l^{(s')})$, для которых элемент $C_n^{(i)}$ переводит первую плоскость пары во вторую (частным случаем является пара $\Pi(e)$ и $\Pi(C_n)$), в) пары плоскостей $\Pi(e)$ и $\Pi(S_{2n})$.

Пусть $x(C_n^{(i)}, C_l^{(s)}) \in \Pi(C_n^{(i)}, C_l^{(s)})$, $x(e) \in \Pi(e)$, $x(S_{2n}) \in \Pi(S_{2n})$, $x(C_n) \in \Pi(C_n)$, $x(\sigma_i) \in \Pi(\sigma_i)$, причем $C_n^{(i)} x(C_n^{(i)}, C_l^{(s)}) = x(C_n^{(i)}, C_l^{(s')})$; $S_{2n}\, x(e) = x(S_{2n})$; $C_n x(e) = x(C_n)$. Тогда из (5) следует

$$p_{\nu\mu}^{(k)}[x(C_n^{(i)}, C_l^{(s')})] = C_n^{(i)} \sum_{\mu'=1}^{m_\nu} \hat{\varepsilon}_{\nu\mu'\mu}[(C_n^{(i)})^{-1}]\, p_{\nu\mu'}^{(k)}[x(C_n^{(i)}, C_l^{(s)})] \tag{6}$$

$$p_{\nu\mu}^{(k)}[x(C_n)] = C_n \sum_{\mu'=1}^{m_\nu} \hat{\varepsilon}_{\nu\mu'\mu}(C_n^{-1})\, p_{\nu\mu'}^{(k)}[x(e)] \tag{7}$$

$$p^{(k)}_{\nu\mu}[x(S_{2n})] = S_{2n} \sum_{\mu'=1}^{m_\nu} \overset{*}{\tau}_{\nu\mu'\mu}(S_{2n}^{-1})\, p^{(k)}_{\nu\mu'}[x(e)] \tag{8}$$

$$p^{(k)}_{\nu\mu}[x(\sigma_i)] = \sigma_i \sum_{\mu'=1}^{m_\nu} \overset{*}{\tau}_{\nu\mu'\mu}(\sigma_i)\, p^{(k)}_{\nu\mu'}[x(\sigma_i)] \tag{9}$$

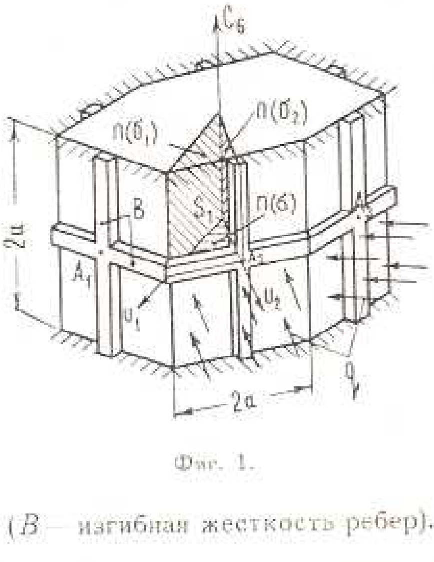
Весь порядок методики из [6] переносится таким образом на рассматриваемые в данной работе задачи. Функции нагрузки $q^{(k)}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1)$ ячеек $S_{\nu\mu}$ имеют вид (при $q_j = q_j^{-1}$):

$$q^{(k)}_{\nu\mu}(u_1, v_1, z_1) = \sum_{j=1}^{m} c^{(k)}_{\nu\mu j}\, q_j\, q(u_j, v_j, z_j) \tag{10}$$

а их граничные условия определяются выражениями (6), (7), (8) и (9).

Изложенный подход может быть применен в статических и динамических расчетах симметричных пластинчатых систем (с упругим основанием и без него) и оболочек при наличии ребер жесткости, сосредоточенных масс и нагрузок, в симметричных задачах теории упругости и т. д.

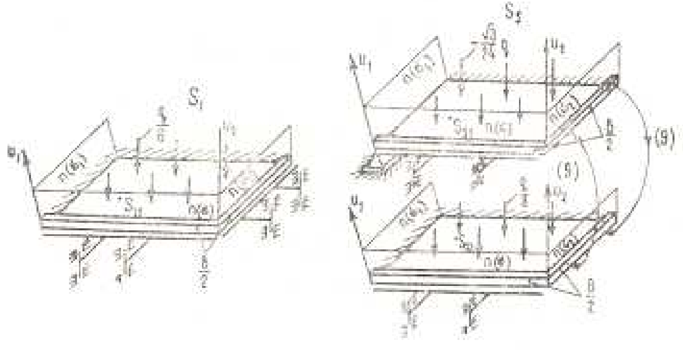
Пример. Система из шести пластин, подкрепленных ребрами жесткости, вместе с внешней нагрузкой изображена на фиг. 1. Элементы симметрии образуют группу $D_{6h} = D_6 \times C_{sh}$. Искомыми являются прогибы пластин в точках A_2 и A_1. Перемещениями пластин в своей плоскости будем пренебрегать. Предположим также, что силовые факторы в плоскостях пластин малы по сравнению с критическими.



Фиг. 1.

Примем $\dfrac{B}{Da} = 0.25$ (B — изгибная жесткость ребер). Для группы D_{6h}:

$m = 24$, $l = 12$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = 1$, $m_5 = m_6 = m_{11} = m_{12} = 2$. Строя системы S_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 12$) и загружая их по схемам $q_s^{(k)}$ $(k=1, 2,..., m_s)$, убеждаемся, что ненулевые прогибы в точке A_2 имеют место только для S_1, S_5 и S_6. Системы S_1 и S_5, загруженные соответственно по схемам $q_1^{(1)}$ и $q_5^{(2)}$, приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Используя формулу (10), находим $q_{11}^{(1)}=\frac{1}{6}q$; $q_{51}^{(1)}=\frac{1}{8}q$; $q_{52}^{(1)}=-\frac{\sqrt{3}}{8}q$; $q_{51}^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{52}^{(2)}=\frac{1}{8}q$; $q_{61}^{(1)}=\frac{1}{8}q$; $q_{62}^{(1)}=-\frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{61}^{(2)}=\frac{\sqrt{3}}{24}q$; $q_{62}^{(2)}=-\frac{1}{24}q$. Определяя прогибы w систем S_1, S_5 и S_6, например, методом сеток, получаем

$$w_{11}^{(1)}(A_2)=0.00305\frac{qa^4}{D};\quad w_{51}^{(1)}(A_2)=0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(1)}(A_2)=-0.0044\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{51}^{(2)}(A_2)=-0.0015\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(2)}(A_2)=0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{61}^{(1)}(A_2)=0.0032\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{62}^{(1)}(A_2)=-0.0018\frac{qa^4}{D};\ w_{61}^{(2)}(A_2)=0.0018\frac{qa^4}{D};\ w_{62}^{(2)}(A_2)=-0.0011\frac{qa^4}{D}.$$

Используя соотношение (5), находим

$$w_{11}^{(1)}(A_1)=0.00305\frac{qa^4}{D};\ w_{51}^{(1)}(A_1)=-0.0025\frac{qa^4}{D};\ w_{52}^{(2)}(A_1)=0.0025\frac{qa^4}{D};$$

$$w_{61}^{(1)}(A_1)=-0.0032\frac{qa^4}{D};\ w_{62}^{(2)}(A_1)=-0.0011\frac{qa^4}{D}$$

Тогда из разложения (1) окончательно следует, что

$$w(A_1)=-0.00125\frac{qa^4}{D};\quad w(A_2)=0.0103\frac{qa^4}{D}.$$

С помощью соотношения (5) нетрудно, между прочим, проверить, что имеет место равенство $w(A_2)=w(A_3)$, обусловленное симметрией нагрузки.

В заключение заметим, что точность проведенного расчета связана исключительно с решением систем S_1, S_5 и S_6.

Одесский
инженерно-строительный институт

Поступила 10 III 1972

Մ. Լ. ԲՈՒՐԻՇԿԻՆ

ԿՈՆՍԵՐՎԱՏԻՎ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԽՄԲԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հեղինակի նախորդ հոդվածներից մեկում [6] ցիկլիկ սիմետրիայով սալերի ստատիկական հաշվարկների համար առաջարկվել է եղանակ։ Ներկա աշխատանքում այդ եղանակը կիրառվել է կոնսերվատիվ սիստեմների մեխանիկայի տարբեր գծային խնդիրների լուծման համար։

Դիտարկվում է սիմետրիայի կետային խումբ տիրապետող գծային կոնսերվատիվ սիստեմ։ Ցույց է տրվում, որ եթե արտաքին բեռը ձևափոխվում է ըստ սիմետրիայի խմբի չբերվող ներկայացման, այդ դեպքում սկզբնական սիստեմի փոխարեն կարելի է ուսումնասիրել ավելի պարզ սիստեմ, ընդհանրապես ասած, մի քանի պարզ բջիջներից բաղկացած. որոնց վրա կիրառված են որոշակի կապեր։

THE APPLICATION OF GROUP REPRESENTATION THEORY TO LINEAR PROBLEMS OF THE CONSERVATIVE SYSTEM MECHANICS

M. L. BURYSHKIN

Summary

The simplification of linear conservative system calculations is investigated for the systems possessing a point group of symmetry. The technique of control for similar simplifications has been suggested, which is based on the mechanical treatment of „elementary cell" method and is independent on that of conservative system calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. ГИФМА, М., 1958.
2. *Каплан И. Г.* Симметрия многоэлектронных систем. Наука, М., 1969.
3. *Удилов В. В., Ковбаса Г. Т.* Исследование собственных колебаний стержневых систем с групповой симметрией. Сб. „Кибернетика и вычислительная техника", в. 1. „Наукова думка", Киев, 1969.
4. *Фомин В. М.* О методике элементарной ячейки при расчете колебаний симметричных стержневых систем. Сб. „Техническая кибернетика", в. 1. „Наукова думка", Киев, 1970.
5. *Бурышкин М. Л.* О свободных колебаниях регулярных цепных систем. ПМ, Киев, 1971.
6. *Бурышкин М. Л., Семенов В. А.* О равновесии симметричных пластин. Докл. АН Арм. ССР, т. XV, №3, 1972.