ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

А. Д. ХАНЖОВ

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Получено решение плоской задачи термоупругости для полубесконечной ортотропной пластинки со смешанными температурными и механическими условиями на границе.

Используется метод интегральных преобразований Фурье, позволяющий свести задачу определения поля температур и напряжений к парным интегральным уравнениям, имеющим известное решение.

Рассмотрим теплоизолированную по боковым поверхностям тонкую пластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат x, y. На свободном от внешней нагрузки участке границы $|x| < a$ задан постоянный тепловой поток F, а на остальном закрепленном участке $|x| > a$ поддерживается нулевая температура. Касательные напряжения τ_{xy} на всей границе пластинки отсутствуют.

Полагаем, что материал пластинки однороден и ортотропен в отношении упругих и тепловых свойств; главные направления упругой и тепловой симметрии совпадают с осями координат; тепловые и механические характеристики материала от температуры не зависят.

Задача термоупругости для ортотропной пластинки сводится к решению системы уравнений [1]

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \alpha_1 T) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \alpha_2 T) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} a_{66}\tau_{xy}$$

со следующими граничными условиями:

$$-k_2 \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = F \quad (|x| < a), \quad T(x, 0) = 0 \quad (|x| > a) \tag{3}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \ \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (|x| < a), \ v(x, 0) = 0 \quad (|x| > a)$$

Здесь T — температура, k_1, k_2 и α_1, α_2 — коэффициенты теплопроводности и температурные коэффициенты линейного расширения в направлении осей x, y. Другие обозначения являются общепринятыми [2].

Применяя к уравнениям (1), (2) интегральное преобразование Фурье [3] по переменной x и предполагая, что температура, напряжения и производные от этих величин на бесконечности равны нулю, находим выражения трансформант температуры и напряжений

$$\overline{T}(\xi, y) = Ae^{-ys_1|\xi|} \tag{4}$$

$$\overline{\sigma}_y(\xi, y) = Be^{-ys_2|\xi|} + Ce^{-ys_3|\xi|} + G_1 s_1 \overline{T} \tag{5}$$

$$\overline{\tau}_{xy}(\xi, y) = \frac{1}{i\xi}\frac{d\overline{\sigma}_y(\xi, y)}{dy}, \quad \overline{\sigma}_x(\xi, y) = -\frac{1}{\xi^2}\frac{d^2\overline{\sigma}_y(\xi, y)}{dy^2} \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_1 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad s_2, s_3 = \left\{(2a_{11})^{-1}\left[(2a_{12} + a_{66}) \pm \sqrt{(2a_{12} + a_{66})^2 - 4a_{11}a_{22}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$G_n = \frac{\alpha_1 s_n^2 - \alpha_2}{a_{11}(s_j^2 - s_n^2)(s_k^2 - s_n^2)s_n}, \quad n = 1, 2, 3 \begin{cases} j = 2, \ k = 3 \text{ при } n = 1 \\ j = 3, \ k = 1 \text{ при } n = 2 \\ j = 1, \ k = 2 \text{ при } n = 3 \end{cases}$$

причем

$$(2a_{12} + a_{66})^2 > 4a_{11}a_{22}$$

Постоянные интегрирования A, B и C определяются из граничных условий.

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражению (4) и дифференцируя результат по y, удовлетворим первым двум граничным условиям (3). Таким образом, учитывая четность функции T по переменной x, приходим к парным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{d\overline{T}(\xi, 0)}{dy}\cos x\xi\, d\xi = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{F}{k_2}, \quad 0 < x < a \\ &\int_0^\infty \overline{T}(\xi, 0)\cos x\xi\, d\xi = 0, \quad x > a \end{aligned} \tag{7}$$

Если ввести новые переменные $\rho = x/a$, $z = a\xi$, то уравнения (7) с учетом соотношения

$$\cos x\xi = \sqrt{\frac{\pi x\xi}{2}}\, J_{-\frac{1}{2}}(x\xi) \tag{8}$$

можно записать в виде

$$\int_0^\infty z g(z) J_{-\frac{1}{2}}(\lambda z)\, dz = h(\lambda), \quad 0 < \lambda < 1 \tag{9}$$

$$\int_0^\infty g(z) J_{-\frac{1}{2}}(\lambda z)\, dz = 0, \quad \lambda > 1$$

где

$$g(z) = \sqrt{z}\, A, \qquad h(\lambda) = \frac{Fa^2}{k_2 s_1 \sqrt{\lambda}} \tag{10}$$

$J(\lambda z)$ — функция Бесселя первого рода.

Решением уравнений (9) является функция [3]

$$g(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \int_0^1 \eta^{\frac{3}{2}} J_0(z\eta)\, d\eta \int_0^1 h(\eta\mu)\, \mu^{\frac{1}{2}} (1-\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\mu \tag{11}$$

Возвращаясь к старым переменным, из формул (10), (11) после вычисления интегралов получим

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{Fa}{k_2 s_1 \xi} J_1(a\xi)$$

Из интегрально преобразованного граничного условия $\overline{\tau}_{xy} = 0$ и формул (5), (6) находим

$$C = -\frac{s_2}{s_3} B - G_1 \frac{s_1^{\frac{1}{2}}}{s_3} A \tag{12}$$

Для определения постоянной B воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + \alpha_1 T, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}$$

из которых после применения интегральных преобразований к ним найдем

$$\overline{v} = \frac{a_{12} + a_{66}}{\xi^2} \frac{d\overline{\sigma}_y}{dy} - \frac{a_{11}}{\xi^4} \frac{d^3\overline{\sigma}_y}{dy^3} - \frac{\alpha_1}{\xi^2} \frac{d\overline{T}}{dy} \tag{13}$$

Применяя теорему обращения для преобразования Фурье к выражениям (5), (13) и удовлетворяя последним двум граничным условиям (3), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \bar{\sigma}_y(\xi, 0)\cos x\xi d\xi = 0 \quad 0 < x < a$$

$$\int_0^\infty \bar{v}(\xi, 0)\cos x\xi d\xi = 0 \quad x > a \tag{14}$$

которые в новых переменных с учетом (8), (12) сводятся к уравнениям типа (9)

$$\int_0^\infty z f(z) J_{-\frac{1}{2}}(\lambda z)\, dz = H(\lambda), \quad 0 < \lambda < 1$$

$$\int_0^\infty f(z) J_{-\frac{1}{2}}(\lambda z)\, dz = 0, \quad \lambda > 1 \tag{15}$$

где

$$\bar{\sigma}_y(\xi, 0) = \frac{s_3 - s_2}{s_3}\left(B + G_1 s_1 \frac{s_3 - s_1}{s_3 - s_2} A \right)$$

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{a_{11}}{\xi} s_2(s_2^2 - s_3^2)\left(B - G_2 s_1 A \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}(B - G_2 s_1 A), \qquad G_2 = \frac{\sigma_1 a_{11} + G_1 s_1(s_3^2 - s_1^2)}{s_2(s_2^2 - s_3^2)} \tag{16}$$

$$H(\lambda) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(G_1 s_1 \frac{s_1 - s_3}{s_2 - s_3} + G_2 s_1 \right)\int_0^\infty A \cos \lambda z dz$$

Последнее выражение после вычисления интеграла при $0 < \lambda < 1$ и с учетом тождества

$$\sum_{n=1}^{3} G_n s_n = 0$$

принимает вид

$$H(\lambda) = \frac{Fa^2 s_1}{k_2(s_2 - s_3)}\sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\lambda}}\sum_{n=1}^{3} G_n \tag{17}$$

Используя решение уравнений (15) в форме (11), из формул (16), (17) находим

$$B=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Fa^3s_1\xi}{k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\int_0^1\eta J_0(a\xi\eta)d\eta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\gamma_n^2\mu^2}{1-\mu^2}}d\mu-G_2s_1A$$

Подставляя значения A, B и C в выражения (4), (5), (6) и пользуясь теоремой обращения для преобразования Фурье, находим распределение температур и напряжений в пластинке

$$T(x,y)=\frac{F}{k_2s_1}\left(\sqrt{r_1\rho_1}\cos\omega_1-ys_1\right)$$

$$\sigma_x(x,y)=-\frac{2Fs_2s_3}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\left[-\frac{as_2R_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\cos\Omega_2+\right.$$

$$+s_2\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\cos\omega_2+\frac{s_2\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\sin\omega_2+\frac{as_3R_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\cos\Omega_3-$$

$$\left.-s_3\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\cos\omega_3-\frac{s_3\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\sin\omega_3\right]-$$

$$-\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3}G_ns_n^2\left(\sqrt{r_n\rho_n}\cos\omega_n-ys_n\right)$$

$$\sigma_y(x,y)=\frac{2F}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\left[-\frac{as_3R_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\cos\Omega_2-\right.$$

$$+s_3\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\cos\omega_2+\frac{s_3\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\sin\omega_2+\frac{as_2R_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\cos\Omega_3-$$

$$\left.-s_2\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\cos\omega_3-\frac{s_2\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\sin\omega_3\right]+$$

$$+\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3}G_n\sqrt{r_n\rho_n}\cos\omega_n$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\frac{2Fs_2s_3}{\pi k_2(s_2-s_3)}\sum_{n=1}^{3}G_n\left[\frac{aR_2}{\sqrt{r_2\rho_2}}\sin\Omega_2-\right.$$

$$-\sqrt{r_2\rho_2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_2\right)\sin\omega_2+\frac{\sqrt{r_2\rho_2}}{2}\ln\frac{\rho_2}{r_2}\cos\omega_2-\frac{aR_3}{\sqrt{r_3\rho_3}}\sin\Omega_3+$$

$$\left.+\sqrt{r_3\rho_3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\beta_3\right)\sin\omega_3-\frac{\sqrt{r_3\rho_3}}{2}\ln\frac{\rho_3}{r_3}\cos\omega_3\right]-$$

$$-\frac{F}{k_2}\sum_{n=1}^{3} G_n s_n \sqrt{r_n \rho_n}\,\sin\omega_n$$

где

$$R_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + x^2}, \qquad r_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x-a)^2}, \qquad \rho_n = \sqrt{y^2 s_n^2 + (x+a)^2}$$

$$\Omega_n = \theta_n - \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \qquad \omega_n = \frac{1}{2}(\varphi_n + \psi_n), \qquad \beta_n = \frac{2ays_n}{a^2 - y^2 s_n^2 - x^2}$$

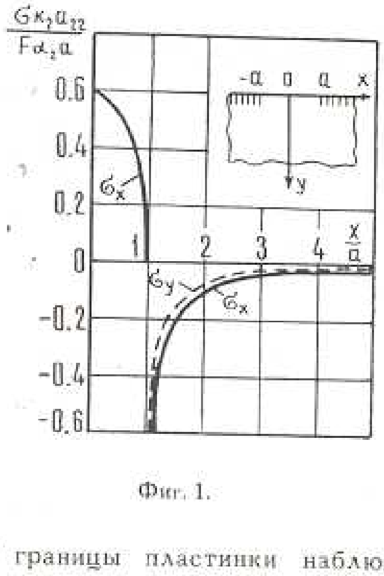
$$\cos\theta_n = \frac{ys_n}{R_n}, \qquad \cos\varphi_n = \frac{ys_n}{r_n}, \qquad \cos\psi_n = \frac{ys_n}{\rho_n}$$

$$\sin\theta_n = \frac{x}{R_n}, \qquad \sin\varphi_n = \frac{x-a}{r_n}, \qquad \sin\psi_n = \frac{x+a}{\rho_n}$$

На фиг. 1 приведены графики распределения безразмерных напряжений вдоль прямолинейной границы пластинки. Численный расчет проводился для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, для которого постоянные равны [4]

$$a_{11} = 4.69\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad a_{22} = 8.26\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad a_{12} = -0.898\cdot 10^{-11}\,м^2/н$$

$$a_{66} = 49\cdot 10^{-11}\,м^2/н, \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{5}{8}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{3}{4}$$



Фиг. 1.

В точках $|x| = l$ границы пластинки наблюдается бесконечный разрыв напряжений.

Тамбовский институт
химического машиностроения

Поступила 3 XII 1973

Ա. Դ. ԽԱՆԺՈՎ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Լուծվում է կիսաանվերջ օրթոտրոպ սալի համար ջերմաառաձգականության հարթ խնդիրը խառը եզրային պայմանների դեպքում։

Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ սալի բեռնավորումից ազատ եզրի մի մասի վրա տրված է հաստատուն ջերմային հոսք, իսկ մնացած ամրակցված մասի վրա՝ զրոյական ջերմաստիճան։

Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերվում է հայտնի լուծում ունեցող զույգ ինտեգրալ հավասարումների։

ON A MIXED PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A SEMI-INFINITE ORTHOTROPIC PLATE

A. D. KHANZHOV

Summary

A plane problem of thermoelasticity for a semi-infinite orthotropic plate is solved with mixed boundary conditions. The case is considered where a constant heat flow is given in some part free from loading on the boundary of the plate while in the rest fixed part the temperature is zero.

By means of the Fourier transformation the problem is reduced to a dual integral equation, having a known solution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ., М., 1955.
4. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд. Саратовского университета, 1967.