ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

СЛАБЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о сходящейся слабой ударной волне в реагирующей смеси, изменение состава которой определяется протеканием химической реакции. Уравнения, описывающие распространение слабых ударных волн в химически активных средах, рассмотрены в работах [1,2]. Для сходящихся волн произвольной интенсивности в химически инертных газах рассматриваемая задача изучалась в работах, обзор которых дается в [3].

В настоящей работе методом сращиваемых разложений [4], примененным для соответствующей газодинамической задачи, определяется аналитическое решение при разных значениях числа g, определяющего отношение нелинейного и релаксационного эффектов. Приведены данные по физико-химическим формулам, позволяющие оценить влияние релаксационных эффектов на распределение параметров движения, причем, для рассмотренной реакции диссоциации четырехокиси азота, релаксационные эффекты намного превосходят эффекты вязкости.

1. Предполагается, что в n-компонентной химически активной смеси вязкого газа, в которой происходит только одна химическая реакция, вне бесконечного цилиндрического объема радиуса R_0 происходит взрыв, то есть в результате внезапного избыточного давления образуется ударная волна. В предположении, что скорости всех компонентов смеси в каждой точке пространства и любой момент времени одинаковы, изменение состава смеси будет характеризоваться параметром q, называемым полнотой (степенью развития) химической реакции. Уравнения движения смеси возьмем в виде [5]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho v)+\frac{\rho v}{r}=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right) \tag{1.2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+v\,\frac{\partial s}{\partial r}\right)+Q\left(\frac{\partial q}{\partial t}+v\,\frac{\partial q}{\partial r}\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{v}{r}\right)^2-\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right]+3\lambda_2\,\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{\tau} H_1 Q \qquad (1.4)$$

$$p = p(\rho, q, s) \text{ или } p = p(\rho, Q, s) \qquad (1.5)$$

$$Q = Q(p, \rho, q), \qquad Q = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \mu_k \qquad (1.6)$$

Здесь t — время, ρ — плотность, p — давление, s — энтропия, T — температура, v — скорость, Q — сродство химической реакции, μ_k — химический потенциал k-го компонента смеси, λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты вязкости, ν_k/M_k пропорционально стехиометрическому коэффициенту k-го компонента в уравнении химической реакции, τ — время протекания химической реакции, коэффициент $H_1 > 0$ ввиду того, что в необратимых процессах энтропия смеси может только увеличиваться.

Предполагается, что разность возмущенных и невозмущенных параметров смеси в каждой точке пространства и в любой момент времени мала

$$p = p_0 + \varepsilon p', \ \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho', \ s = s_0 + \varepsilon s', \ T = T_0 + \varepsilon T' \qquad (1.7)$$
$$q = q_0 + \varepsilon q', \ Q = \varepsilon Q', \ v = \varepsilon v'$$

Здесь невозмущенные величины обозначены нулевым индексом, ε — малый параметр.

Для возмущений примем следующие начальные значения:

$$p' = \rho' = s' = Q' = v' = 0 \quad \text{при } r < R_0, \ t \leqslant 0$$
$$p' = \Delta, \ \rho' = \Delta/a_{e0}^2, \ q' = \Delta\left(\frac{\partial q}{\partial p_0}\right)_{Q,\, s} \qquad (1.8)$$
$$s' = Q' = v' = 0 \quad \text{при } r > R_0, \ t \leqslant 0$$

где $a_{e0} = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)^{1/2}$ — равновесная скорость звука в состоянии полного термодинамического равновесия. Условия (1.8) совместно с требованием непрерывности v', p' на линии $r = R_0$ при $t > 0$, как будет показано, определяют решение системы (1.1)—(1.6).

В дальнейшем, при линеаризации и последующем упрощении уравнений, штрихи над возмущенными параметрами опускаются.

Производя посредством (1.7) линеаризацию системы (1.1)—(1.6) и применяя преобразование Лапласа по t к получаемой системе линеаризованных уравнений, для возмущения скорости v можно получить

$$d_1 \bar{v}'' + \frac{1}{r} d_1 \bar{v}' - \left(d_2 + \frac{1}{r^2} d_1\right)\bar{v} = 0 \qquad (1.9)$$

где $\overline{v}$ — обращение по Лапласу, $d_1 = \left(\frac{4}{3}\,\nu_1 + \nu_2\right)\omega^2 +$

$$+\left[\frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{4}{3}\,\nu_1 + \nu_2\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s} + \rho_0 a_{f0}^2\right]\omega + \frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}\rho_0 a_{e0}^2$$

$$d_2 = \rho_0\omega^3 + \frac{H_{10}}{\tau}\rho_0\left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}\omega^2$$

ω — параметр преобразования Лапласа.

Для малых значений t после взрыва, поскольку течение не сразу достигает оси симметрии, где имеется особенность, его можно считать локально плоским, поэтому в начальной области можно пренебречь радиальными членами в (1.9). Общее решение получаемого уравнения запишется в виде

$$\overline{v}(\omega,\ x) = D_1(\omega)e^{-kx} + D_2(\omega)e^{kx}$$

где $x = R_0 - r$, $k = (d_2/d_1)^{1/2}$

Полученное решение содержит в себе два вида волн: сходящуюся и расходящуюся

$$\overline{v}(\omega,\ x) = D_1(\omega)e^{-kx} \quad \text{при } x > 0 \quad (r < R_0)$$

$$\overline{v}(\omega,\ x) = D_2(\omega)\,e^{kx} \quad \text{при } x < 0 \quad (r > R_0)$$

Функции D_1, D_2 определяются из условия непрерывности v, p, а следовательно, и $\overline{v}$, $\overline{p}$ на линии $x = 0$ $(r = R_0)$, так что для сходящейся волны находим

$$D_1(\omega) = -\frac{\Delta}{2\rho_0 a_{f0}^2 k}\left(1 - \frac{H_{10}b_0 b_1}{\omega\tau + H_{10}b_0}\right)$$

где

$$b_0 = \left(\frac{\partial Q}{\partial q_0}\right)_{p,s}, \quad b_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial q_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial q}{\partial p_0}\right)_{Q,s} = 1 - \frac{a_{f0}^2}{a_{e0}^2}$$

$a_f = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{q,s}^{1/2}$ — замороженная скорость звука.

Для малых $\omega\tau$, которым соответствует квазиравновесный процесс распространения возмущений, получаем

$$\overline{v}(\omega,\ x) = -\frac{\Delta}{2\rho_0 a_{e0}\omega}\,e^{-\frac{x}{a_{e0}}\omega - \frac{1}{2}x\eta_1\omega^2} \tag{1.10}$$

где

$$\eta_1 = \frac{1}{\rho_0 a_{e0}^3}\left(\frac{4}{3}\,\nu_1 + \nu_2\right) - \frac{\tau}{H_{10}a_{e0}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{p,s}\left(\frac{a_{f0}^2}{a_{e0}^2} - 1\right)$$

Разложение (1.10) справедливо лишь в узкой волновой области и при отсутствии химической реакции совпадает с [4].

Применяя к (1.10) обратное преобразование Лапласа [6] и заменяя переменную интегрирования, для возмущения скорости можно получить

$$v(x,\, t) = -\frac{\Delta}{4\rho_0 a_{e0}}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t - \dfrac{x}{a_{e0}}}{\sqrt{2\varkappa\tau_1}}\right)\right],\quad x = R_0 - r \qquad (1.11)$$

Отсюда видно, что позади (впереди) фронта волны скорости частиц химически активной среды по абсолютной величине меньше (больше) соответствующих скоростей частиц в смеси инертных газов.

Для квазиравновесного процесса распространения возмущений, аналогично [1,2], можно преобразовать уравнение энергии (1.3) к альтернативной форме

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v - a_e)\frac{\partial p}{\partial r} - \rho a_e\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v - a_e)\frac{\partial v}{\partial r} - a_e\frac{v}{r}\right] = L_{1e} - L_{2e} + L_{3e} \qquad (1.12)$$

где

$$L_{1e} = -a_e\left(\frac{4}{3}\eta_1 + \eta_2\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right)$$

$$L_{2e} = \frac{1}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho,Q}\left\{\frac{4}{3}\eta_1\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 - \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right] + \right.$$

$$\left. + \eta_2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)^2 + 2\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right]\right\}$$

$$L_{3e} = -\frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho,Q}\left\{\frac{\partial q}{\partial t} + v\frac{\partial q}{\partial r} + \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + v\frac{\partial Q}{\partial r}\right)\right\}$$

В соотношениях (1.7) был введен малый параметр ε. Примем

$$\varepsilon = \Delta/2\rho_0 a_{e0}^2$$

Предполагается, что рассматриваемое течение релаксирующей смеси представляет собой короткую волну с узкой возмущенной зоной, движущейся с равновесной скоростью звука a_{e0}. Дальнейшие исследования проводятся методами, развитыми в [1, 2, 4].

2. Предположим, что эффекты диссипации по порядку величин много больше интенсивности волны, то есть

$$\varepsilon \ll \frac{a_{e0}}{\sqrt{R_0}}\sqrt{\tau_1} \qquad (2.1)$$

Из (1.11) видно, что линейное решение зависит лишь от

$\left(t-\frac{R_0-r}{a_{e0}}\right)\Big/\sqrt{2\gamma_1(R_0-r)}$. Поэтому при немалых r вводятся новые переменные

$$\zeta=\frac{\left(t-\frac{R_0-r}{a_{e0}}\right)\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\gamma_1}},\quad r=r \tag{2.2}$$

Применяя преобразования (1.7) и (2.2) к уравнениям (1.1), (1.2) и удерживая лишь главные члены, получим

$$\rho=-\frac{\rho_0}{a_{e0}}v=\frac{1}{a_{e0}^2}p \tag{2.3}$$

Аналогично [1, 2, 7], можно показать, что

$$s=Q=0 \tag{2.4}$$

то есть в принятом приближении в квазиравновесном процессе распространения возмущений сжатие газа происходит обратимо при постоянном сродстве химической реакции. В рассматриваемом приближении

$$a_e=-(\alpha_e^0-1)v,\quad \alpha_e^0=\frac{1}{a_{e0}}\left|\frac{\partial}{\partial\rho_0}(\rho a_e)\right|_{Q,s}$$

$$q=-\left(\frac{\partial q}{\partial\rho_0}\right)_{Q,s}\frac{\rho_0}{a_{e0}}v \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial q}{\partial\zeta}=-N_e H_{10}\frac{a_{e0}^2}{R_0^{3/2}}\gamma_1^{1/2}Q,\quad N_e=\frac{R_0}{a_{e0}\tau}$$

Из (2.4) и последнего соотношения (2.5) видно, что $N_e\gg 1$, то есть время протекания химической реакции τ много меньше макроскопического времени R_0/a_{e0}.

Применяя преобразования (1.7), (2.2) к альтернативной форме (1.12), учитывая затем соотношения (2.3) — (2.5) и оставляя лишь главные члены, получим

$$2\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{R_0}{a_{e0}^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2}=0 \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) допускает решение

$$v(\zeta,r)=-\frac{a_{e0}\sqrt{R_0}}{2\sqrt{r}}\left\{1-\operatorname{erf}\left[\frac{a_{e0}\zeta}{\sqrt{2R_0(R_0-r)}}\right]\right\} \tag{2.7}$$

которое сращивается с (1.11) при $r\to R_0$.

Когда r становится малым, приближение (2.7) становится неверным из-за взаимодействия волны с осью симметрии. Поэтому обратимся к уравнению (1.9), которое после известного преобрзования приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2\bar{v}}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\bar{v}}{dz} - \left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\bar{v} = 0, \quad z = \left(-\frac{d_2}{d_1}\right)^{1/2} r$$

общее решение которого есть

$$\bar{v}(z) = D_2 I_1(z) + D_1 K_1(z)$$

где I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя первого порядка. Выделяя из общего решения сходящуюся и расходящуюся волны, находим

$$\bar{v}(z) = D_2(\omega) I_1(z) \quad \text{при } r < R_0$$

$$\bar{v}(z) = D_1(\omega) K_1(z) \quad \text{при } r > R_0$$

Функции D_2, D_1 определяются из условия непрерывности $\bar{v}$, $\bar{p}$ на линии $r = R_0$. После несложных вычислений можно найти решение, соответствующее сходящейся цилиндрической волне. При этом, для малых $\omega\tau$, соответствующих квазиравновесному процессу распространения возмущений,

$$\bar{v}(z) = -\frac{\Delta(1 - b_1)R_0 K_1\left(\frac{R_0}{a_{e0}}\omega - \frac{R_0}{2}\gamma_i\omega^2\right)}{\rho_0 a_{e0}^2} I_1(z) \tag{2.8}$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением функции K_1, заменяя I_1 через функцию Бесселя первого рода первого порядка $J_1(z)$, затем совершая обратное преобразование Лапласа и вводя вместо ω новый параметр τ

$$-\omega = \frac{i\tau}{\sqrt{R_0\gamma_i}}$$

из (2.8) можко получить решение в виде

$$v(\xi, \zeta) = -\sqrt{\frac{4R_0 a_{e0}^2}{\pi^2\gamma_i}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}} J_1\left(\frac{\tau\xi}{R_0}\right)\cos\left(\frac{a_{e0}\zeta}{R_0}\tau + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{2.9}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\gamma_i}}\, r, \qquad \zeta = \frac{\left(t - \frac{R_0}{a_{e0}}\right)\sqrt{R_0}}{a_{e0}\sqrt{\gamma_i}} \tag{2.10}$$

Из решения (2.9) видно, что при $r \to 0$, то есть на оси симметрии, скорость частицы смеси конечна. Полученное решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - a_{e0}^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v}{\xi^2} \right) = 0 \qquad (2.11)$$

что можно проверить подстановкой и заменой $v(\xi, \zeta)$ в (2.9) его асимптотическим выражением. Заметим, что уравнение (2.11) можно получить также из альтернативной формы (1.12) методом, примененным при выводе (2.6), причем за новые независимые переменные берутся (2.10).

Решение (2.9) верно для малых r, то есть вблизи оси симметрии. Для сращивания (2.9) с решением (2.7) удобнее всего взять в (2.8) асимптотические выражения для K_1 и I_1 для больших r и затем совершить обратное преобразование Лапласа.

Итак, при получении уравнений (2.6), (2.11) были пренебрежены нелинейные члены в (1.12) в силу требования (2.1).

3. Если же условие (2.1) не выполняется, то тогда при упрощении альтернативной формы (1.12) следует оставлять конвективные слагаемые. Пусть теперь

$$\varepsilon \gg \frac{a_{e0}}{\sqrt{R_0}} \sqrt{\gamma} \qquad (3.1)$$

За независимые переменные принимаются

$$\zeta = \frac{\left(t - \dfrac{R_0 - r}{a_{e0}} \right) R_0 \varepsilon}{a_{e0}^2 \gamma}, \qquad \xi = \frac{(R_0 - r) R_0 \varepsilon^2}{a_{e0}^2 \gamma} \qquad (3.2)$$

Применение преобразований (1.7) и (3.2) к системе (1.1) — (1.6) приводит к соотношениям, подобным (2.3) — (2.5). Аналогичные выкладки над альтернативной формой (1.12) дают в основном порядке уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{2\alpha_e^0}{a_{e0}^2} v \frac{\partial v}{\partial \zeta} = \frac{R_0}{2a_{e0}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \qquad (3.3)$$

которые можно записать в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} \qquad \left(\beta = \frac{R_0}{2a_{e0}^2}, \quad v = -\frac{2\beta a_{e0}^2}{\alpha_e^0} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \qquad (3.4)$$

Граничные условия для уравнения (3.3) берутся в виде

$$v(\zeta, 0) = \begin{cases} -a_{e0} & \text{при} \quad r = R_0, \quad \zeta > 0 \\ 0 & \text{при} \quad r = R_0, \quad \zeta \leqslant 0 \end{cases} \qquad (3.5)$$

то есть решение уравнения Бюргерса, описывающее окрестность волны, сращивается с асимптотикой линейного решения на волне. В соответствии с (3.5) граничные условия для (3.4) преобразуются к виду

$$\theta(\zeta,0)=\begin{cases} e^{\frac{\alpha a_{e0}}{2\beta}\zeta} & \text{при } \zeta>0 \\ 1 & \text{при } \zeta\leqslant 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Аналогично [7, 8], решение (3.4) при условии (3.6) после перехода к скорости v можно записать в виде

$$v(\zeta,\xi)=-a_{e0}\frac{B}{A+B} \tag{3.7}$$

где

$$A=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\psi_2}e^{-\lambda^2}d\lambda\right]e^{-\frac{\alpha^2a_{e0}^2\xi}{4\beta}-\frac{\alpha a_{e0}\zeta}{2\beta}}, \qquad \alpha=\frac{\alpha_e^0}{a_{e0}^2}$$

$$B=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\psi_1}e^{-\lambda^2}d\lambda, \qquad \psi_1=\frac{\zeta+\alpha a_{e0}\xi}{\sqrt{4\beta\xi}}, \qquad \psi_2=\frac{\zeta}{\sqrt{4\beta\xi}}$$

Решение (3.7) есть точное решение уравнения (3.3), сращиваемое в пределе $(r\to R_0)$ с (1.11). При этом в решении (3.7) предполагается, что $|\psi_1|\gg 1$, $|\psi_2|\gg 1$, причем $\psi_1>0$, $\psi_2<0$, так что, используя асимптотику интегралов ошибок для больших ξ, можно найти приближенное значение

$$v(\zeta,\xi)=-a_{e0}\left(1+e^{-\frac{\alpha^2a_{e0}^2\xi}{4\beta}-\frac{\alpha a_{e0}\zeta}{2\beta}}\right)^{-1} \tag{3.8}$$

Видно, что решение зависит лишь от $(\alpha^2a_{e0}^2\xi-2\alpha a_{e0}\zeta)$, поэтому, переходя по (3.2) к переменным r, t, можно показать, что линия

$$\zeta-\frac{\alpha a_{e0}}{2}\xi=0$$

есть приближенное отображение физической линии

$$r=-a_{e0}\left(1+\varepsilon\frac{\alpha_e^0}{2}\right)t$$

которая представляет собой траекторию слабой плоской ударной волны. Очевидно, что скорость частиц на волне не зависит от физических переменных r и t, то есть волна принимает форму установившегося профиля, который возмущается только таким внешним воздействием, как эффект радиальной симметрии.

Предположим теперь, что ни радиальная координата r, ни расстояние от границы $R_0 - r$ не малы. За независимые переменные принимаются

$$\zeta = \frac{\left[t - \dfrac{R_0 - r}{a_{e0}} + \dfrac{\varepsilon L(r)}{a_{e0}} \right] R_0 \varepsilon}{a_{e0}^2 \eta}, \quad r = r \tag{3.9}$$

где функция $L(r)$ определяется ниже. В данном случае снова имеют место соотношения, подобные (2.3) — (2.5), которые используются при упрощении альтернативной формы (1.12), дающей в основном порядке уравнение Тейлора

$$2\alpha_e^0 v \frac{\partial v}{\partial \zeta} - 2a_{e0} \frac{dL}{dr} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \tag{3.10}$$

Интегрирование (3.10) приводит к решению

$$v(\zeta, r) = 2a_{e0} \frac{dL}{dr} \left[\alpha_e^0 \left(1 + e^{\frac{2a_{e0}}{R_0} \frac{dL}{dr} \zeta} \right) \right]^{-1} \tag{3.11}$$

Линия

$$t - \frac{R_0 - r}{a_{e0}} + \frac{\varepsilon L(r)}{a_{e0}} = 0$$

есть траектория слабой ударной волны. Отсюда легко найти скорость распространения ударной волны, которая, с другой стороны, равна среднему арифметическому из скоростей распространения возмущений впереди и позади ударной волны, то есть

$$\frac{dL}{dr} = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{\alpha_e^0}{2a_{e0}} v(\zeta, r)$$

причем условие $\zeta \to \infty$ соответствует переходу к линейному решению. Из граничного условия (3.5) видно, что при $r = R_0$

$$\left. \frac{dL}{dr} \right|_{r=R_0} = -\frac{\alpha_e^0}{2} \tag{3.12}$$

С учетом (3.12) решение (3.11) при $r \to R_0$ переходит в (3.8), когда последнее выражается в терминах (3.9).

Для завершения решения остается определить $L(r)$. Течение вдали от волны и не вблизи оси симметрии можно считать, в основном, недиссипативным. Тогда, определяя возмущение скорости v из линеаризованной посредством (1.7) и (2.2) системы уравнений, находим

$$\frac{dL}{dr} = -\frac{\alpha_\varepsilon^0}{2}\sqrt{\frac{R_0}{r}} \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получим решение

$$v(\zeta, r) = \frac{a_{\varepsilon 0}\sqrt{R_0}}{\sqrt{r}}\left(1 + e^{\frac{\alpha_\varepsilon^0 a_{\varepsilon 0}}{\sqrt{R_0 r}}\zeta}\right)^{-1} \tag{3.14}$$

которое при $r \to R_0$ сращивается с (3.8). Решение (3.14) описывает только изменение толщины ударной волны.

4. Пусть теперь эффекты диссипации и нелинейности имеют одинаковый порядок, то есть

$$\frac{\varepsilon\sqrt{R_0}}{a_{\varepsilon 0}\sqrt{\tau_i}} = g \sim o(1)$$

что представляет собой промежуточный случай между существованием и отсутствием слабых ударных волн.

В области, где r и $(R_0 - r)$ не малы, вводятся переменные (2.2), с помощью которых, аналогично выводу (2.6), производится упрощение альтернативной формы (1.12), после чего получается уравнение Бюргерса радиального течения

$$2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{R_0}{a_{\varepsilon 0}^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} = 2g\frac{\alpha_\varepsilon^0}{a_{\varepsilon 0}^2}v\frac{\partial v}{\partial \zeta} \tag{4.1}$$

Введем новые переменные

$$\xi = \zeta + \frac{\sqrt{R_0}\varepsilon w(\zeta, r)}{a_{\varepsilon 0}\sqrt{\tau_i}}, \quad r = r \tag{4.2}$$

где функция $w(\zeta, r)$ имеет порядок $o(1)$ и, по идее метода коротких волн, ее производная по направлению ξ — величина более низкого порядка малости, чем сама функция. Преобразуя посредством (4.2) уравнение (4.1), можно записать его в виде

$$2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{R_0}{a_{\varepsilon 0}^2}\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\right] =$$

$$g\left(1 - g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\left[2\frac{\alpha_\varepsilon^0}{a_{\varepsilon 0}^2}v\frac{\partial v}{\partial \xi} - 2\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] \tag{4.3}$$

Если теперь выбрать функцию $w = w(\xi, r)$ таким образом, чтобы

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\alpha_\varepsilon^0}{a_{\varepsilon 0}^2}v \tag{4.4}$$

то уравнение (4.3) примет вид

$$2\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}+\frac{R_0}{a_{e0}^2}\left(1-g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial v}{\partial \xi}\left(1-g\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-1}\right]=0 \qquad (4.5)$$

В работе [4] принимается, что $\frac{\partial w}{\partial \xi}\sim o(\varepsilon)$, поэтому вместо уравнения (4.5) получается линейное уравнение типа (2.6), выраженное в переменных (4.2), но, как было сказано выше, $\frac{\partial w}{\partial \xi}\sim\frac{1}{\varepsilon}$, так что метод, предложенный в [4], можно рассматривать лишь как первое приближение при итерационном процессе.

Рассмотрим случай отсутствия эффектов диссипации. Тогда в уравнении (4.5) третий член исчезает, так что решение линейного уравнения можно записать в виде

$$v=\varphi(\xi)/\sqrt{r}$$

Подставляя данное решение в (4.4), находим

$$w=-\frac{\alpha_e^0}{2a_{e0}^2}\varphi(\xi)\sqrt{r}+f(\xi) \qquad (4.6)$$

С другой стороны, из чисто нелинейного уравнения, получаемого из (4.1) при отсутствии диссипативных эффектов, можно получить

$$\zeta=-g\frac{\alpha_e^0}{2a_{e0}^2}\varphi(\xi)\sqrt{r}+\xi$$

что, согласно (4.2), совпадает с (4.6) при $f(\xi)=0$.

Таким образом, в нелинейной задаче указанный подход приводит к точному решению, в то время как при учете диссипативных эффектов получается гораздо более сложное уравнение (4.5).

5. В качестве примера рассмотрим реакцию диссоциации четырехокиси азота: $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2$.

Для вычисления коэффициента η в формулах (1.11), (2.7) использованы работы [10, 11, 12, 13, 14]. Значения a_{e0} для различных давлений и температур были заимствованы из [10], а a_{f0} и комбинация $\frac{\tau}{H_{10}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{p,s}$ вычислены по формулам, данным в [11, 12]. В работах [13, 14] даны критические параметры соответственно для N_2O_4 и NO_2, с помощью которых были рассчитаны по формуле Бромлея-Уилка [14] вязкости отдельных компонент. Вязкость газовой смеси была вычислена по формуле Уилка [14]. Время после взрыва считалось равным $t=0.0009$ *сек*. Численные значения некоторых характерных параметров течения приведены в табл. 1, где обозначения те же, что были приняты выше, а v_φ — скорость частиц смеси без учета химической реакции. Здесь же приведены значения скоростей частиц смеси v и отношения v/v_*, вычисленные в трех точках позади фронта волны для различных случаев. Эти точки выбраны так, чтобы они находились в каждом случае на расстоянии 0.003 *м*, 0.002 *м* и 0.001 *м* от фронта волны. В таблице эти точки расположены в одинаковых столбцах сверху вниз. Видно, что при приближении к фронту волны при фиксированных p и T скорости v и отношения v/v_* уменьшаются. При данной температуре с увеличением давления скорости v и отношения v/v_* уже увеличиваются. При данном давлении с увеличением температуры скорости v увеличиваются, а отношения v/v_* меняются незначительно.

Таблица 1

T°C	20°			50°	
p(*атм*)	0.036	0.11	0.36	0.036	0.11
a_{e0} *м/сек*	230	210	190	250	245
a_{f0} *м/сек*	244	220	198	265	260
μ_1 *Нсек/м*^{2}	$0.3801\cdot10^{-4}$	$0.2973\cdot10^{-4}$	$0.2686\cdot10^{-4}$	$0.5178\cdot10^{-4}$	$0.4417\cdot10^{-4}$
η *сек*^{2}/*м*	$0.5062\cdot10^{-8}$	$0.7207\cdot10^{-9}$	$0.2809\cdot10^{-9}$	$0.3973\cdot10^{-8}$	$0.9107\cdot10^{-9}$
x *м*	0.204	0.186	0.168	0.222	0.2175
v *м/сек*	151	187	188	164	198
v/v_*	0.6576	0.8912	0.9892	0.6565	0.8078
x *м*	0.205	0.187	0.169	0.223	0.2185
v *м/сек*	139	166	175	151	176
v/v_*	0.6065	0.794	0.923	0.606	0.7185
x *м*	0.206	0.188	0.170	0.224	0.2195
v *м/сек*	127	138	147	138	150
v/v_*	0.5534	0.6586	0.7765	0.5534	0.6136

Автор выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные указания.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 X 1974

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԹՈՒՅԼ ՊԼԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՔԻՄԻԱՊԵՍ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է խնդիր սեղմման թույլ հարվածային ալիքի վերաբերյալ քիմիապես ակտիվ գազային խառնուրդում, որում տեղի է ունենում միայն մեկ ռեակցիա։

Կարճ ալիքների և կարգոց վերլուծությունների մեթոդներով կառուցվում է անալիտիկ լուծում որոշ ոչ գծային և ռելաքսացիոն էֆեկտների հարաբերությունը բնութագրող g պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում։ Բերված են թվային տվյալներ, որոնք թույլ են տալիս գնահատելու շարժման պարամետրերի բաշխման վրա ռելաքսացիոն էֆեկտների ազդեցությունը։ Ցույց է տրված, որ քառօքսիդ ազոտի դիսոցիացիայի ռեակցիայի համար ռելաքսացիոն էֆեկտները բավականաչափ գերազանցում են մածուցիկության էֆեկտներին։

WEAK CYLINDRICAL WAVES IN CHEMICALLY ACTIVE MEDIUM

G. G. OHANIAN

S u m m a r y

The problem of a converging shock wave in a reacting multicomponent mixture of viscous gas with one chemical reaction is considered.

The method of matched asymptotic expansions is used to find an analytic solution with different values of number g characterizing the ratio between non-linear and relaxation effects. The data allowing to estimate the influence of relaxation effects on the distribution of motion parameters are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, т. 35, № 6, 1971.
2. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, т. 11, № 5, 1971.
3. *Забабахин Е. И.* Явления неограниченной кумуляции. В сб. „Механика в СССР за 50 лет", т. 2, „Наука", М., 1970.
4. *Chapman P. B.* Weak cylindrical implosions. J. Inst. Maths. and applics, №1, 1965.
5. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. „Мир", М., 1964.
6. *Лаврентьев М. А.* и *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. „Наука", М., 1965.
7. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, № 6, 1973.
8. *Анисимов В. В., Хохлов Р. В.* Об ударных волнах, образующихся при обтекании тонких профилей вязким газом. ПММ, т. 28, № 3, 1964.
9. *Whitham G. B.* Some comments on wave propagation and shock wave strukture with application to magnetohydrodinamics. Comm. on pure and applied mathematics, vol. XII, № 1, 1959.
10. *Sessler G.* Schallausbreitung in teilweise dissoziiertem gasformigem Distickstoftetryd. Acustica, vol. 10, №1, 1960.
11. *Бауэр Г.* Феноменологическая теория релаксационных явлений в газах. Сб. „Физическая акустика под ред. У. Мэзона, т. II, ч. А. „Мир", М., 1968.
12. *Кнезер Г.* Релаксационные процессы в газах. Сб. „Физическая акустика" под ред. У. Мэзона, т. II, ч. А. „Мир", М., 1968.
13. *Перри Дж. Г.* Справочник инженера-химика, т. I. „Химия", Л., 1966.
14. *Бретшнайдер С.* Свойства газов и жидкостей. „Химия", М.—Л., 1966.