ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 2, 1975 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящей работе на основе гипотез магнитоупругости тонких тел, предложенных в работах [1, 2], рассматривается задача параметрических колебаний проводящих пластин в поперечном магнитном поле. Получена формула для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуются влияния проводимости материала пластинки и интенсивности заданного магнитного поля на области динамической устойчивости. Определено предельное значение напряженности магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

1. Изотропная тонкая упругая пластинка постоянной толщины $2h$ помещена в поперечное магнитное поле. Упругие и электрические свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитные и диэлектрические проницаемости пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице. Токи смещения в пластинке пренебрегаются по сравнению с токами проводимости.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пусть в плоскости (xy) пластинка подвергается действию равномерно распределенных по сторонам, параллельным оси oy, сжимающих усилий интенсивности $p(t)=p_0+p_1\cos\theta t$. До возникновения возмущений в пластинке вследствие сжимающих усилий индуцируется электромагнитное поле и поле упругих перемещений.

Оставаясь в пределах точности теории тонких пластинок, будем предполагать, что все величины, характеризующие невозмущенное состояние, не зависят от координаты z. Тогда компоненты невозмущенных полей определяются из следующих уравнений электродинамики движущейся среды и теории упругости проводящего тела:

$$\frac{\partial h_{0z}}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{0y}-\frac{H_3+h_{0z}}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t}\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial e_{0y}}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial h_{0z}}{\partial t}=0, \qquad \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 u_{0x}}{\partial x^2}-\frac{H_3+h_{0z}}{4\pi}\frac{\partial h_{0z}}{\partial x}=0$$

Здесь $h_0(0,\ 0,\ h_{0z})$, $e_0(0,\ e_{0y},0)$ — соответственно векторы индуцированного магнитного и электрического полей; $U_0(u_{0x},\ 0,0)$ — вектор упругих перемещений частиц пластинки; $H(0,\ 0,H_3)$ — вектор напряжен-

Согласно этим гипотезам

$$u_x = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t)$$
$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t) \tag{2.1}$$

Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — искомые перемещения срединной плоскости пластинки; φ, ψ — искомые тангенциальные компоненты вектора напряженности индуцированного электрического поля $e(e_x, e_y, e_z)$; f — искомая нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля $h(h_x, h_y, h_z)$.

Используя гипотезы (2.1) так, как это делается в работах [1,2], получим следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости пластинки:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi - \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t}f\right] = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi + \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma(H_3 + h_{0z})}{c}\left[\psi - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{c}\frac{\partial u_{0x}}{\partial t}f - \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma(H_3 + h_{0z})}{c}\left[\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{H_3 + h_{0z}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (p_0 + p_1\cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\sigma h^3}{3c^2}(H_3 + h_{0z})^2\frac{\partial \Delta w}{\partial t}$$

где индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $z = h$ и $z = -h$, $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$.

Для полного определения перемещений и электромагнитного поля в пластинке, как видно из (2.2), необходимо иметь значения компонент индуцированного электромагнитного поля на поверхностях $z = \pm h$. Поэтому уравнения (2.2) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. Сюда должны быть присоединены также условия закрепления краев пластинки и условия затухания электромагнитных возмущений на бесконечности.

Однако, если ограничиться рассмотрением лишь задачи динамической устойчивости пластинки, то, как видно из (2.2), она приводится к решению пятого уравнения системы (2.2) с обычными условиями закрепления краев пластинки. Отсюда вытекает также, что индуцированное электромагнитное поле в пределах справедливости гипотез магнитоупругости тонких тел не оказывает влияния на критические частоты и области динамической неустойчивости пластинки.

3. Пусть прямоугольная ($a \times b$) пластинка—шарнирно опертая по всему контуру. Принимая $[(1-\nu^2)\,p_1/(2Eh)]^2 \ll 1$, с учетом (1.3) и (2.2) задачу параметрических колебаний пластинки приводим к решению уравнения

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h^3}{3c^2}\left[1 - \frac{(1-\nu^2)p_1}{Eh}(1-\cos\theta t)\right]H_1^2\frac{\partial \Delta w}{\partial t} +$$

$$+ (p_0 - p_1\cos\theta t)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{3.1}$$

Представляя решение уравнения (3.1) в виде

$$w = f_{nm}(t)\sin\lambda_n x \sin\nu_m y$$

где $\lambda_n = n\pi/a$, $\nu_m = m\pi/b$, удовлетворим условиям шарнирного опирания краев, а для определения $f_{nm}(t)$ из (3.1) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f_{nm}}{dt^2} + \varepsilon_{nm}(1 + 2\delta\cos\theta t)\frac{df_{nm}}{dt} + \Omega^2_{nm}(1 - 2\mu_{nm}\cos\theta t)\,f_{nm} = 0 \tag{3.2}$$

где

$$\Omega^2_{nm} = \omega^2_{nm}\left(1 - \frac{p_0}{p^*_{nm}}\right), \qquad \omega^2_{nm} = \frac{D}{2\rho h}(\lambda_n^2 + \nu_m^2)^2$$

$$p^*_{nm} = \frac{D}{\lambda_n^2}(\lambda_n^2 + \nu_m^2), \qquad \mu_{nm} = \frac{p_1}{2(p^*_{nm} - p_0)}$$

$$\varepsilon_{nm} = \frac{\sigma H_1^2 h^2}{3\rho c^2}(1-\varepsilon)(\lambda_n^2 + \nu_m^2), \qquad \varepsilon = \frac{1-\nu^2}{Eh}p_1, \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \tag{3.3}$$

В (3.3) ω_{nm} — частота собственных колебаний пластинки в отсутствие магнитного поля, δ и μ_{nm} — коэффициенты возбуждения, p^*_{nm} — значения критической силы при статической устойчивости пластинки, ε_{nm} — параметр, характеризующий напряженность заданного магнитного поля и проводимость материала пластинки.

Уравнение (3.2) имеет периодические коэффициенты, и, как известно [3,4], при некоторых соотношениях между коэффициентами имеет неограниченно возрастающие решения. Границы области главного параметрического резонанса определим, используя метод гармонического баланса [3].

Согласно сказанному, решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$f_{nm}(t) = A\sin\frac{\theta t}{2} + B\cos\frac{\theta t}{2} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2) и приравнивая определитель нулю, для определения критических частот главного параметрического резонанса получим формулу

$$\theta_*^2 = 4\Omega_{nm}^2\left[1 - \gamma_{nm} \pm \sqrt{\mu_{nm}^2 - 2\gamma_{nm} + \gamma_{nm}^2}\,\right]$$

$$\gamma_{nm} = \frac{\varepsilon_{nm}^2}{2\Omega_{nm}^2}(1-\delta^2) \tag{3.5}$$

Из (3.5) видно, что необходимым условием существования параметрического резонанса является

$$\mu_{nm}^2 - 2\gamma_{nm} + \gamma_{nm}^2 \geqslant 0$$

что имеет место, если величина γ_{nm} не принадлежит промежутку $(1-\sqrt{1-\mu_{nm}^2},\ 1+\sqrt{1-\mu_{nm}^2})$. С другой стороны, если $\gamma_{nm} \in (1 + \sqrt{1-\mu_{nm}^2},\ +\infty)$, то выражение в квадратных скобках формулы (3.5) становится отрицательным, исключая возможность появления параметрического резонанса.

Таким образом, пока $0 < \gamma_{nm} < 1 - \sqrt{1-\mu_{nm}^2}$, формула (3.5) дает для критической частоты два вещественных значения, соответствующих двум границам главной области неустойчивости. Предельный случай, когда

$$\varepsilon_{nm}^2 = \frac{2\Omega_{nm}^2}{1-\delta^2}\left[1 - \sqrt{1-\mu_{nm}^2}\,\right] \tag{3.6}$$

определяет минимальное значение напряженности заданного магнитного поля

$$\left(\frac{H_3^2}{E}\right)_{\text{пр}} = \frac{\sqrt{3}\,c^2}{\sigma h a_0(1+\nu)}\left|\left(1 - \frac{p_0}{p_{nm}^*}\right)\frac{1-\sqrt{1-\mu_{nm}^2}}{(1-\nu)(1-2\varepsilon)}\right|^{1/2} \tag{3.7}$$

при котором еще возможно возникновение незатухающих колебаний.

В (3.7) $a_0^2 = E/2\rho(1+\nu)$ — скорость поперечной упругой волны.

В табл. приведены значения $H_{\text{пр}}$ для некоторых проводников при $h = 2\,см$, $p_0 = 0$.

Формула (3.6) показывает, что чем больше проводимость материала пластинки и интенсивность заданного магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость пластинки.

Из (3.5) видно, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и исчезает при $H_3 = H_{пр}$.

Вещество	E, 10^{11} *дин/см*^{2}	ρ, *г/см*^{3}	σ, 10^{17} 1/*сек*	$H_{пр}$, 10^3 *эрстед*	
				$\mu_{nm} = 0.01$	$\mu_{nm} = 0.001$
Алюминий	7.00	2.70	3.2	7.11	2.23
Медь	11.00	8.89	5.3	8.32	2.62
Латунь	9.00	8.50	2.0	12.67	4.02
Цинк	8.00	7.10	1.5	13.57	4.28

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 IX 1974

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ելնելով բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգական վարկածներից, դիտարկվում է վերջավոր սալի դինամիկ կայունության խնդիրը լայնական մագնիսական դաշտում։ Ստացված է բանաձև գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականության հաշվման համար։

Ուսումնասիրվում է սալի նյութի էլեկտրահաղորդականության և տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության տիրույթների վրա։ Որոշված է արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության սահմանային արժեքը, որի դեպքում բացառվում է պարամետրական ռեզոնանսի հնարավորությունը։

ON DYNAMIC STABILITY OF CONDUCTING PLATES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

Summary

The problem of parametric vibration of conducting plates in the presence of a transverse magnetic field is considered in terms of the magnetoelastic hypotheses suggested in [1,2]. The formula to determine critical major parametric resonance frequencies is derived.

In the region of dynamic stability the influence of conductivity of plate material and of intensity of a given magnetic field is examined. A limiting value of the magnetic field the excess of which eliminates the possibility of occurrence of parametric resonance is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, в. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, в. 1, 1973.
3. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. Изд. „Наука", М., 1967.