

В. В. МИКАЕЛЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА  
С УПРУГИМ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда две противоположные его кромки защемлены, а в средней части прямоугольник усилен упругим тонким включением, расположенным параллельно защемленным кромкам. Включение представляется в виде приваренной к прямоугольнику достаточно тонкой полосы толщиной  $h$ , которая растягивается вдоль ее оси сосредоточенной силой.

Исследованию напряженного состояния полуплоскости с упругими накладками на границе посвящены многие работы. Подробная библиография по этому вопросу приводится в работах Р. Муки и Э. Стернберга [1], Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна [2]. Некоторые задачи о растяжении упругих прямоугольников накладками рассматривались в работах [3, 4]. Во всех этих работах принимается допущение Э. Мелана [5], то есть считается, что упругая накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Решение поставленной задачи осуществляется в перемещениях, которые представляются в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Коэффициенты разложений определяются из полученных вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений. Следует отметить, что некоторые другие задачи для прямоугольника с усиленными кромками или ребрами рассматривались в работах [6—8].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника (фиг. 1), когда две кромки ( $y = 0$ ,  $y = 2b + h$ ) защемлены, а посередине прямоугольник усилен приваренным к нему упругим включением или накладкой толщиной  $h$ , которые растягиваются вдоль своей оси силой  $2P$ . Остальные кромки прямоугольника считаются свободными от нагрузок.

В силу симметрии граничных условий мы рассмотрим только половину области прямоугольника ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), для которой граничные условия можно записать в виде:

на защемленном крае

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (1.1)$$

на свободных от нагрузок кромках

$$\sigma_x(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = \tau_x(a, y) = \tau_{xy}(a, y) = 0 \quad (1.2)$$

а на линии контакта с включением или накладкой по условию симметрии имеем

$$v(x, b) = 0 \quad (1.3)$$

Из условия равновесия элемента накладки [2] на контактной линии  $y = b$  получим второе граничное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=b} = \frac{2P}{E_1 F} - \frac{2}{E_1 h} \int_x^a \tau_{xy}(t, b) dt \quad (1.4)$$

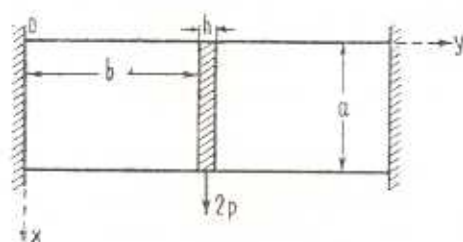
где  $E_1$  — модуль упругости материала накладки, а  $F$  — площадь поперечного сечения накладки,

При этом

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l, y=b} = 0 \quad (1.5)$$

то есть один конец накладки свободен от нагрузки.

Как известно, перемещения  $u$  и  $v$  должны удовлетворять уравнениям Ляме



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= 0 \\ \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$\lambda$  и  $\mu$  — упругие постоянные материала прямоугольника, а напряжения выражаются через перемещения формулами

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.7)$$

Решение уравнений (1.6) для перемещений  $u$  и  $v$  ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \lambda_k y + B_k \operatorname{ch} \lambda_k y + C_k \lambda_k y \operatorname{sh} \lambda_k y + D_k \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k y) \cos \lambda_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \operatorname{sh} \lambda_k x + F_k \operatorname{ch} \lambda_k x + G_k \lambda_k x \operatorname{sh} \lambda_k x + H_k \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x) \cos \lambda_k y + \\ &+ a_0 y + b_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \{ [B_k - (3-4\nu) C_k] \operatorname{sh} \lambda_k y + [A_k - (3-4\nu) D_k] \operatorname{ch} \lambda_k y +$$

$$+ D_k \lambda_k y \operatorname{sh} \lambda_k y + C_k \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k y \} \sin \lambda_k x -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \{ [E_k + (3-4\nu) H_k] \operatorname{ch} \gamma_k x + [F_k + (3-4\nu) G_k] \operatorname{sh} \gamma_k x +$$

$$+ H_k \gamma_k x \operatorname{sh} \gamma_k x + G_k \gamma_k x \operatorname{ch} \gamma_k x \} \sin \gamma_k y \quad (1.9)$$

где  $\lambda_k = k\pi/a$ ,  $\gamma_k = k\pi/b$ , а  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала прямоугольника.

Используя граничные условия (1.1) — (1.5), после некоторых преобразований получим следующие соотношения:

$$A_k = (3-4\nu) D_k, \quad E_k = -(1-2\nu) H_k$$

$$B_k + D_k \lambda_k b + C_k [\lambda_k b \operatorname{cth} \lambda_k b - (3-4\nu)] = 0$$

$$F_k + H_k \gamma_k a + G_k [\gamma_k a \operatorname{cth} \gamma_k a + (1-2\nu)] \quad (1.10)$$

и совокупность уравнений из восьми бесконечных систем линейных уравнений

$$x_k^{(1)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_{nk}^{(1)} x_n^{(1)}, \quad x_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_{nk}^{(2)} u_n^{(1)} \quad (1.11)$$

$$y_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} b_{nk}^{(1)} z_n^{(2)} + c_k^{(1)}, \quad y_k^{(2)} = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} b_{nk}^{(2)} u_n^{(2)} \quad (1.12)$$

$$z_k^{(1)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{nk}^{(1)} x_n^{(1)} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} d_{nk}^{(1)} x_n^{(2)} + D_k^{(1)} \quad (1.13)$$

$$z_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{nk}^{(2)} y_n^{(1)} + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} d_{nk}^{(2)} y_n^{(2)} + D_k^{(2)} \quad (1.14)$$

$$u_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{nk}^{(1)} x_n^{(2)} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} F_{nk}^{(1)} x_n^{(1)} + b_k^{(1)} \quad (1.15)$$

$$u_k^{(2)} = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} E_{nk}^{(2)} y_n^{(2)} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} F_{nk}^{(2)} y_n^{(1)} + b_k^{(2)} \quad (1.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_k = \frac{(-1)^k}{2\lambda_k} \left( u_k \operatorname{cth} \frac{\lambda_k b}{2} - z_k \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right), \quad D_k = \frac{(-1)^k}{2\lambda_k} (z_k - u_k) \quad (1.17)$$

$$G_k = \frac{am(-1)^k}{2b\gamma_k} \left( y_k \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} - x_k \operatorname{th} \frac{\gamma_k a}{2} \right), \quad H_k = \frac{ma(-1)^k}{2b\gamma_k} (x_k - y_k) \quad (1.18)$$

$$a_{nk}^{(i)} = \frac{8\gamma_k \operatorname{cth} \gamma_k a/2 [\nu \lambda_n^2 - (1-\nu)\gamma_k^2]}{ma \left( 1 + \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh} \gamma_k a} \right) (\gamma_k^2 + \lambda_n^2)^2} \quad (1.19)$$

$$b_{nk}^{(i)} = \frac{8\gamma_k \operatorname{th} \gamma_k a/2 [\nu \lambda_n^2 - (1-\nu)\gamma_k^2]}{ma \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh} \gamma_k a} \right) (\gamma_k^2 + \lambda_n^2)^2} \quad (1.20)$$

$$c_{nk}^{(i)} = \frac{8m\lambda_k [\operatorname{cth} \lambda_k b/2 \left( 3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right) + \alpha_k] [(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k (\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \quad (1.21)$$

$$d_{nk}^{(i)} = -\frac{8m\lambda_k \alpha_k [(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k (\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \quad (1.22)$$

$$E_{nk}^{(i)} = \frac{8m\lambda_k \left[ \operatorname{th} \lambda_k b/2 \left( 3 - 4\nu + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right) + \alpha_k \right] [(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k (\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \quad (1.23)$$

$$F_{nk}^{(i)} = -\frac{8m\lambda_k \alpha_k [(1-\nu)\gamma_n^2 - \nu\lambda_k^2]}{b\Delta_k (\gamma_n^2 + \lambda_k^2)^2} \quad (1.24)$$

$$D_k^{(i)} = \frac{mP \operatorname{cth} \lambda_k b/2 \left( 3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right)}{\lambda_k E_3 F \alpha \Delta_k} \quad (1.25)$$

$$b_k^{(i)} = \frac{mP \operatorname{th} \lambda_k b/2 \left( 3 - 4\nu + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right)}{\lambda_k E_1 F \alpha \Delta_k} \quad (1.26)$$

$$c_k^{(i)} = \frac{4Ph \operatorname{th} \frac{\gamma_k a}{2}}{mF_1 \alpha^2 \lambda_k \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{\operatorname{sh} \gamma_k a} \right)} \quad (1.27)$$

$$b_0 = 2(1-\nu) m \sum_{n=1,3,\dots}^{(i)} \frac{(-1)^n y_n^{(1)}}{\gamma_n^{(2)} b}, \quad \alpha_0 = \frac{Ph}{F_1 \alpha} \quad (1.28)$$

$$m = \sqrt{3-4\nu}, \quad \alpha_k = \frac{4\nu(1-\nu)}{E_1 h^2 k} \quad (1.29)$$

$$\Delta_k = (3-4\nu)^2 - \frac{\lambda_k^2 b^2}{\text{sh}^2 \lambda_k b} + 2\alpha_k \left[ (3-4\nu) \text{cth} \lambda_k b - \frac{\lambda_k b}{\text{sh}^2 \lambda_k b} \right] \quad (1.30)$$

В формулах (1.19) — (1.26) нечетному индексу  $k$  соответствует значение  $i=1$ , а четному —  $i=2$ .

2. При исследовании бесконечных систем (1.11) — (1.16) пользуемся неравенствами

$$|\nu a_n^2 - (1-\nu) \gamma_k^2| < \nu a_n^2 + (1-\nu) \gamma_k^2$$

$$|(1-\nu) \gamma_n^2 - \nu a_k^2| < (1-\nu) \gamma_n^2 + \nu a_k^2$$

а также суммами рядов [9]

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k^3} \text{th} \frac{\gamma_k a}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k} \text{th} \frac{\gamma_k a}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k^3} \left[ \text{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right) - \frac{4}{\gamma_k a} \right]$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + \gamma_k^2)^2} = \frac{a}{8\gamma_k} \text{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right)$$

После некоторых преобразований для суммы абсолютных значений коэффициентов систем получим следующие неравенства:

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}| < \frac{1 - (1-2\nu) \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a}}{m \left( 1 + \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right)} < \frac{1}{m} \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}| < \frac{1 + (1-2\nu) \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} - \frac{4(1-\nu)}{\gamma_k a} \text{th} \frac{\gamma_k a}{2}}{m \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{\text{sh} \gamma_k a} \right)} \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} |c_{nk}^{(i)}| + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} |d_{nk}^{(i)}| < \frac{m}{\Delta_k} \left[ \left| 1 + (1-2\nu) \frac{\lambda_k b}{\text{sh} \lambda_k b} \right| \left| 3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{\text{sh} \lambda_k b} \right| + \right.$$

$$+ 2\sigma_k \left[ \operatorname{cth} \lambda_k b - \frac{2\nu}{\lambda_k b} - (1-2\nu) \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right] \quad (2.3)$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} |F_{nk}^{(n)}| + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} |E_{nk}^{(n)}| < \frac{m}{\Delta_k} \left| 3 - 4\nu + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right| \left| 1 - (1-2\nu) \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} - \frac{4\nu}{\lambda_k b} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right| + 2\sigma_k \left[ \operatorname{cth} \lambda_k b - \frac{2\nu}{\lambda_k b} - (1-2\nu) \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right] \quad (2.4)$$

Докажем, что правая часть неравенства (2.2) меньше  $1/m$ , то есть

$$1 + (1-2\nu) \frac{x}{\operatorname{sh} x} - \frac{4(1-\nu)}{x} \operatorname{th} \frac{x}{2} < 1 - \frac{x}{\operatorname{sh} x} \quad (2.5)$$

Из разложения функции  $\operatorname{ch} x$  в ряд Тейлора легко получить неравенство

$$2(\operatorname{ch} x - 1) > x^2$$

Умножив обе части этого неравенства на  $-2(1-\nu)/x \operatorname{sh} x$  и прибавив к ним

$$1 + (1-2\nu) \frac{x}{\operatorname{sh} x}$$

получим неравенство (2.5).

Покажем, что правая часть (2.3) меньше единицы. Для этого заметим, что при  $0 < \nu < 1/4$  имеют место следующие неравенства:

$$(1-4\nu) \left( 1 - \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right) > 0$$

$$(1-4\nu) \left( \operatorname{cth} \lambda_k b + \frac{\lambda_k b}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k b} \right) + \frac{4\nu}{\lambda_k b} > 0$$

а при  $1/4 < \nu < 1/2$  следующие неравенства:

$$1 - 2\nu < \frac{1}{3-4\nu}$$

$$2\nu + \left( 1 - 2\nu - \frac{1}{3-4\nu} \right) \frac{\lambda_k^2 b^2}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k b} > 0$$

На основании этих неравенств, а также (1.29) и (1.30) легко можно убедиться, что при  $0 < \nu < 1/4$  правая часть (2.3) меньше  $m/2$ , а при  $1/4 < \nu < 1/2$  меньше  $1/m$ .

Аналогично можно доказать, что правая часть (2.4) меньше  $1/m$ . Легко видеть из (1.29), что  $1/m$  или  $m/2$  меньше единицы.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что полученные системы линейных уравнений (1.11) — (1.16) вполне регулярны.

Легко видеть также, что свободные члены этих уравнений ограничены сверху и для больших индексов „ $k$ “ имеют порядок убывания  $k^{-1}$ . Следовательно, значения неизвестных коэффициентов, а также напряжений и перемещений можно вычислить с любой степенью точности.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда накладка абсолютно жесткая, то есть  $1/E_1 = 0$ . В этом случае решение совокупности линейных уравнений, состоящих из восьми бесконечных систем уравнений, сводится к рассмотрению четырех совокупностей уравнений, в каждую из которых входят две бесконечные системы уравнений, причем три из этих совокупностей уравнений дают нулевое решение, то есть

$$x_k^{(i)} = u_k^{(i)} = y_k^{(2)} = z_k^{(1)} = 0 \quad (3.1)$$

а остальные неизвестные определяются из четвертой совокупности уравнений

$$z_k^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} c_{nk}^{(2)} y_n^{(1)} \quad y_k^{(1)} = \sum_{n=2,4,\dots}^{(\infty)} b_{nk}^{(1)} z_n^{(2)} + c_k^{(1)} \quad (3.2)$$

Для получения расчетных формул для перемещений  $u$ ,  $v$  и напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  подставим значения коэффициентов из (1.10), (1.17), (1.18) в (1.8), (1.9), используем (1.7) и произведем параллельный перенос координатных осей

$$x = x_1 + a/2 \quad y = y_1 + b/2 \quad (3.3)$$

то есть начало координатных осей  $x_1$ ,  $y_1$  будет помещено в центре левого прямоугольника.

После некоторых преобразований получим следующие формулы:

$$u(x_1, y_1) = b_0 - \frac{Phb}{2F_1\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)}}{\lambda_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \left[ \left( 3 - 4\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right) \operatorname{sh} \lambda_k y_1 + \right. \\ \left. + \lambda_k y_1 \operatorname{ch} \lambda_k y_1 \right] \left( -1 \right)^{k/2} \cos \lambda_k x_1 + \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)}}{\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k a} \left( \left( 1 - 2\nu + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \right) \operatorname{ch} \gamma_k x_1 - \gamma_k x_1 \operatorname{sh} \gamma_k x_1 \right) \left( -1 \right)^{\frac{k+1}{2}} \sin \gamma_k y_1 + \frac{p h y_1}{F_1 \alpha} \quad (3.4)$$

$$v(x_1, y_1) = -\frac{1}{2} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)} (-1)^{k/2}}{\lambda_k \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \left[ \lambda_k b \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{ch} \lambda_k y_1 - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_k y_1 \operatorname{sh} \lambda_k y_1 \left] \sin \lambda_k x_1 - \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)} (-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\gamma_k \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \left\{ \left[ 2(1-\nu) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \right] \operatorname{sh} \gamma_k x_1 + \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \right\} \cos \gamma_k y_1 \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_s(x_1, y_1) = 2\mu \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)} (-1)^{k/2}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \left[ \left( 3 - 2\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right) \operatorname{sh} \lambda_k y_1 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \lambda_k y_1 \operatorname{ch} \lambda_k y_1 \right] \sin \lambda_k x_1 + \frac{ma}{2b} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{y_k^{(1)} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \times \right. \\
 \left. \times \left[ \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{sh} \gamma_k x_1 - \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \right] \sin \gamma_k y_1 \right\} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_p(x_1, y_1) = 2\mu \left\{ \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)} (-1)^{k/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \left[ \left( 1 - 2\nu - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right) \operatorname{sh} \lambda_k y_1 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \lambda_k y_1 \operatorname{ch} \lambda_k y_1 \right] \sin \lambda_k x_1 + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ma y_k^{(1)} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2b \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \left[ \left( 2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \right) \operatorname{sh} \gamma_k x_1 + \gamma_k x_1 \operatorname{ch} \gamma_k x_1 \right] \sin \gamma_k y_1 \right\} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{xy}(x_1, y_1) = \frac{ph}{F\alpha} + 2\mu \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{z_k^{(2)} (-1)^{k/2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_k b}{2}} \left\{ \left[ 2(1-\nu) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{\lambda_k b}{2} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right] \operatorname{ch} \lambda_k y_1 + \lambda_k y_1 \operatorname{sh} \lambda_k y_1 \right\} \cos \lambda_k x_1 - \\
 - 2\mu \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ma y_k^{(1)} (-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2b \operatorname{sh} \frac{\gamma_k a}{2}} \left\{ \left( 1 - \frac{\gamma_k a}{2} \operatorname{cth} \frac{\gamma_k a}{2} \right) \operatorname{ch} \gamma_k x_1 + \right.
 \end{aligned}$$



$$+ \gamma_k x_1 \operatorname{sh} \gamma_k x_1 \left. \vphantom{\gamma_k x_1} \right\} \cos \gamma_k y_1 \quad (3.8)$$

В результате преобразования (3.3) правые части (3.4) — (3.8) оказываются четными или нечетными функциями от аргументов  $x_1$  и  $y_1$ , что позволяет вычислить их значения для области ( $0 \leq x_1 \leq a/2$ ,  $0 \leq y_1 \leq b/2$ ), а дальше, воспользовавшись ими, можно записать значения этих же функций и для остальных областей прямоугольника.

Произведен численный расчет при  $\nu = 1/3$  для нормальных и касательных напряжений на линии контакта с включением (табл. 1 и 2), а также вычислены значения нормальных перемещений в точках, лежащих на свободном от нагрузок крае (табл. 3).

Таблица 1  
 $\tau_y(x, b) Fa/ph$

$t$ $x/a$	1	2	5	10
0	-1.298	-4.572	-23.892	-88.288
0.1	-1.055	-3.963	-22.322	-85.212
0.2	-0.937	-3.672	-21.598	-83.844
0.3	-0.885	-3.417	-20.950	-82.595
0.4	-0.740	-3.213	-20.382	-81.450
0.5	0	0	0	0
0.6	0.740	3.213	20.382	81.450
0.7	0.825	3.417	20.950	82.595
0.8	0.937	3.672	21.598	83.844
0.9	1.055	3.963	22.322	85.212
1.0	1.298	4.572	23.892	88.288

Таблица 2  
 $\tau_{xy}(x, b) Fa/ph$

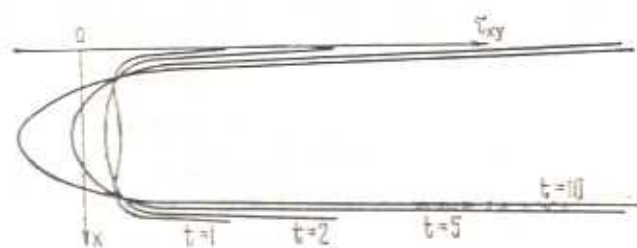
$t$ $x/a$	1	2	5	10
0	4.261	7.436	16.655	30.965
0.1	0.917	1.157	1.894	3.064
0.2	0.896	0.839	0.659	0.343
0.3	0.950	0.730	0.066	-1.051
0.4	0.995	0.692	-0.233	-1.754
0.5	1.011	0.682	-0.310	-1.971
0.6	0.995	0.692	-0.223	-1.754
0.7	0.95	0.730	0.066	-1.051
0.8	0.896	0.839	0.659	0.343
0.9	0.917	1.157	1.894	3.064
1.0	4.261	7.436	16.655	30.965

Таблица 3

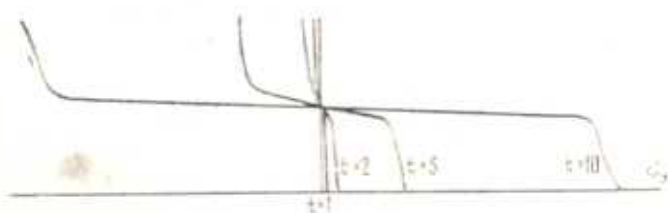
		$\alpha (0, y) F_{pa}/Phb$			
$y/b$	$t$	1	2	5	10
0.0		0	0	0	0
0.1		0.215	0.186	0.389	1.078
0.2		0.334	0.375	1.095	3.669
0.3		0.459	0.606	2.100	9.460
0.4		0.590	0.868	3.305	12.051
0.5		0.724	1.146	4.810	17.041
0.6		0.858	1.424	5.915	22.031
0.7		0.982	1.686	7.120	26.622
0.8		1.114	1.917	8.125	30.413
0.9		1.233	2.106	8.831	33.004
1.0		1.448	2.292	9.220	34.082

Из формул (3.7) и (3.8) видно, что для определения нормального напряжения на заземленном крае можно воспользоваться табл. 1, меняя только знаки, а значение касательного напряжения на этом крае дается в табл. 2.

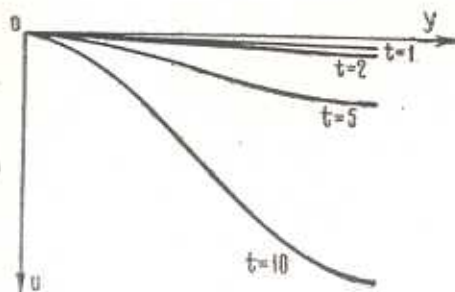
Как видно из фиг. 2, касательные напряжения на линии контакта, а также на заземленном крае для отношений  $t = b/a = 5; 10$  в средней части контакта меняют знак, а при  $t = b/a = 1$  значение касательного напряжения в центральной точке линии контакта имеет относительный максимум.



Фиг. 2



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Отметим, что аналогичные явления были замечены в работе [10].

Ереванский политехнический

институт им. К. Маркса

Поступила 19 II 1975

Վ. Վ. ՄԻՔԱԵԼԻԱՆ

ԲԱՐՔԻ ԲԱՌՋՊՈՆԱՆ ՆԵՐՔԵՐԱՅՈՎ ԲՈՒՋՊԻՆԱՆ ՈՐՂՂԱՆԿՅԱՆ  
ՄՈՄԷՆ ԻՐ ԿՆՊՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է ուղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը, երբ նրա երկու հանդիսակամ կողերը ամրակցված են, իսկ միջին մասում զուգահեռ ամրակցված կողերին, ուղղանկյունը ուժեղացված է բարակ առաձգական ներդրակով: Ներդրակի մի ծայրին նրա առանցքի ուղղությամբ ազդում է կենտրոնացված ուժ:

Խնդրի լուծումը իրականացվում է տեղափոխումներով, որոնք ներկայացվում են ֆուրյեի շարքերի տեսքով բաց հասնկյունաշափական ֆունկցիաների վերլուծության գործակիցները որոշվում են ստացված լիովին սեղուլյար գծային հավասարումների անվերջ սխեմների:

Քերվում է բացարձակ կարծր ներդրակի դեպքի համար թվային օրինակ:

## A BENDING PROBLEM FOR A RECTANGLE WITH ELASTIC ENGAGEMENT

V. V. MICHAELIAN

S u m m a r y

A plane contact problem in the elasticity theory is considered for a rectangle where its two opposite edges are fixed and its midsection is reinforced by an elastic stiffener arranged parallel to the fixed edges.

A point force acts on one end of the engagement along its axis. The solution to the problem is found in displacements represented as Fourier's series by means of trigonometrical functions. The expansion coefficients are determined from the infinite systems of quite-regular equations thus obtained. A numerical example is given for an absolute rigid stiffener.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Муни Р., Стойберг Э.* Передача нагрузки от растянутого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. механика. Тр. америк. общества ниж. механиков, т. 35, 1968, № 4, 124—135.
2. *Ayatungyan N. K. and Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity: Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
3. *Микаелян В. В.* О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, т. 56, № 4, 1973, 225—231.
4. *Микаелян В. В.* Об одной задаче растяжения прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, т. 58, № 1, 1974, 21—27.
5. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ingenieur Archiv, vol. 3, No 2, 1932, p. 123—129.
6. *Теокарис, Дафермос.* Упругая полоса при смешанных граничных условиях. Прикл. механика (Тр. америк. общества инженеров механиков), т. 31, № 4, 1964, 159—162.
7. *Раскин Ю. Н.* Решение плоской задачи теории упругости для случая передачи продольного усилия через ребро на пластину. Тр. Ленинградского кораблестроительного института, 1962, вып. 35, 39—50.
8. *Саркисян В. Г., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние предварительно напряженного армированного прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, сер. техн. наук, т. 26, № 1, 1973, 31—37.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. Физматгиз, М., 1962.
10. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 1, 1964, 39—61.