

А. А. ЛИВШИЦ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ В ПЛАСТИНАХ

Концентрация напряжений около эллиптических отверстий в пластинах конечных размеров изучена существенно меньше, чем концентрация напряжений около круговых отверстий. Решения для эллиптических отверстий в бесконечной пластине было получено еще Колосовым [1] и Игласом [2], а экспериментально (методами фотоупругости) — Кокером и Файлоном [3], Дурелли и Мурелли [4]. Дурелли, Паркс и Фенг [5] экспериментально определяли напряжения около эллиптического отверстия в случае одноосного напряженного состояния. Достаточно полный обзор и анализ решений по рассматриваемому вопросу приведен в известной монографии Г. Н. Савина [6].

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в прямоугольной области с эллиптическим отверстием (фиг. 1).

Естественно при решении данной задачи перейти к эллиптическим координатам

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение для функции напряжений Ψ в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{R^2}{c^2} \Delta^2 \Psi - 2 \frac{R}{c} \left(\sin 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \Psi + \sin 2\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta \Psi \right) + \frac{R}{c} \Delta \Psi = 0 \quad (2)$$

где

$$R = c (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

При этом напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned} R^2 \sigma_{\eta} &= R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \sin \eta \cos \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \\ R^2 \sigma_{\xi} &= R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} - \sin \eta \cos \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \\ R^2 \tau_{\xi \eta} &= -R \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} + \sin \eta \cos \eta \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch} \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3)$$

В качестве аппроксимирующих использовались два вида функций, удовлетворяющих (2); гармонические полиномы [7]

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_{2-l,2}^{n,1}(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{2l} \xi^{n-2l} \eta^{2l} \quad (4)$$

и гиперголо-тригонометрические функции

$$\begin{aligned} \Psi = & a_0 \xi + b_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{ch} z_m \xi (c_{1n} \cos z_m \eta + c_{2n} \sin z_m \eta) + \\ & + \cos z_m \xi (c_{3n} \operatorname{ch} z_m \eta + c_{4n} \operatorname{sh} z_m \eta) + \operatorname{sh} z_m \xi (c_{5n} \cos z_m \eta + \\ & + c_{6n} \sin z_m \eta) + \sin z_m \xi (c_{7n} \operatorname{ch} z_m \eta + c_{8n} \operatorname{sh} z_m \eta)] \quad (5) \end{aligned}$$

Так как ниже рассмотрены симметричные относительно осей ξ и η случаи нагружения, то в (4) и (5) удерживались симметричные члены.

Функции (5) применялись Кокером и Файлоном [3], а также Джонсом и Ходосом [8], получившими с их помощью численные результаты.

Заметим, что гармонические полиномы (4) записываются в форме, предложенной В. А. Бондаревко [7].

При этом

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

$$l = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \text{целая часть числа } \frac{n}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_{2-l,2}^{n,1} = n H_{1-l,2}^{n+1,1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_{2-l,2}^{n,1} = -n H_{2-l,1}^{n+1,1}$$

$$\int H_{2-l,2}^{n,1} dx = \frac{1}{n+1} H_{1-l,2}^{n+1,1}$$

$$\int H_{2-l,2}^{n,1} dy = \frac{1}{n+1} H_{2-l,1}^{n+1,1}$$

$$l = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном} \\ 1 & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

Нижние индексы при H показывают четность или нечетность по переменным ξ и η , верхние — степень полинома и порядок лапласиана. Связь напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} с σ_{ξ} , σ_{η} и $\tau_{\xi\eta}$ определяется следующим образом (фиг. 1):

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch} \xi \sin \eta}{\sqrt{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta}} \quad (6)$$

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в практике симметричные задачи. При этом возможно ограничиться рассмотрением одного квадрата. Сформулируем граничные условия (фиг. 1). На кромке отверстия

$$\sigma_{\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0 \quad \text{при } \xi = \xi_0 \quad (7)$$

на наружном контуре пластины

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_1 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при } x = \frac{l}{2}; \quad 0 \leq y \leq \frac{l}{2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_y = \sigma_2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{при } y = \frac{l}{2}; \quad 0 \leq x < \frac{l}{2} \quad (9)$$

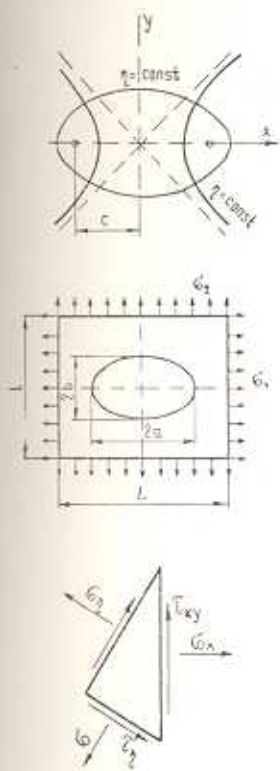
Для получения приближенных решений использовался метод переопределенной граничной коллокации, причем граничные условия удовлетворялись в заданных точках как на внутреннем, так и на наружном контуре пластины.

Программа вычислений предусматривала использование двух типов аппроксимирующих функций. Так как вычисления производились на ЭВМ „Минск-22“, то число значащих цифр не превышало 7, что, вообще говоря, может оказаться недостаточным при решении плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимирующего ряда a_n . Таким образом, для получения устойчивого решения особенно важными становятся соответствующие свойства системы координатных функций. Количество точек коллокации доходило до 50, а число членов аппроксимирующего ряда — до 21 (в каждой точке выполнялось одно условие).

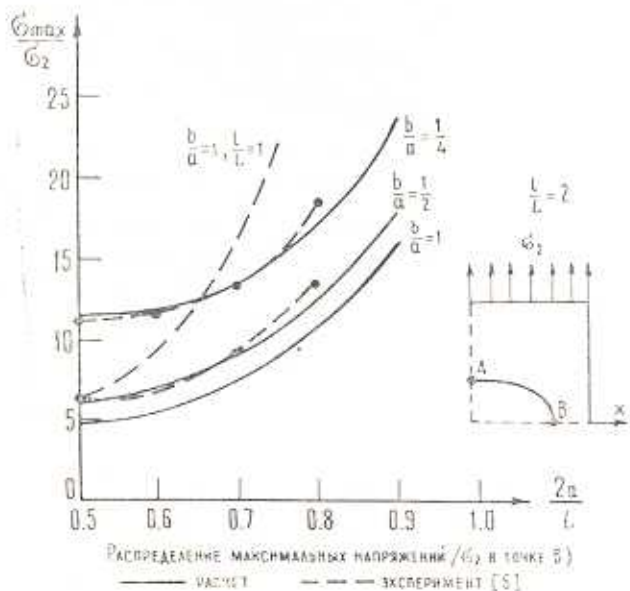
Некоторые полученные результаты в сравнении их с известными экспериментальными данными показаны на фиг. 2—9. Приводятся в основном решения, для которых оказалось возможно найти соответствующие экспериментальные данные, а также типичные картины распределения напряжений. На фиг. 10 показан характер сходимости решений. Как видно из фиг. 10, значение σ_{\max} для $n=21$ (в пределах 5%), начиная с $m=30$, для $n=15$ с $m=35$, а для $n=10$, очевидно, $m > 50$. При этом характер стабилизации уровня напряжений различен, что видно из фиг. 10.

Следует отметить, что все приведенные результаты получены с помощью функций (4). Попытка повторить результаты Джонса и Хозоса [8], применяя используемые ими аппроксимирующие функции (5), окончилась неудачно. Получаемые при этом системы уравнений оказывались плохо обусловленными и большие вычислительные погрешности не дали возможности получить разумные результаты (фиг. 5).

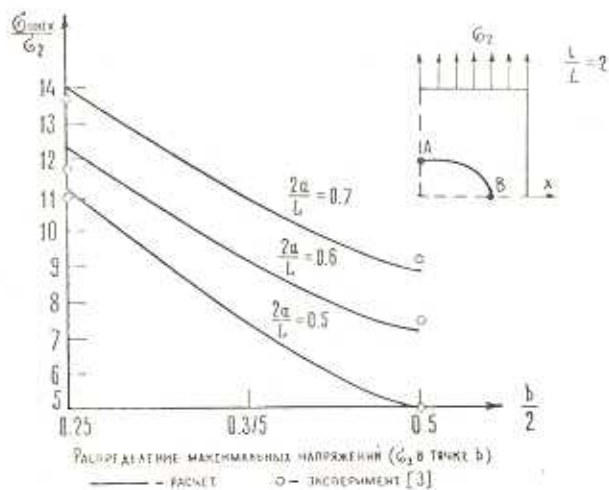
Вероятно, авторы [8] использовали ЭВМ с большим количеством значащих цифр. Однако в полученных ими результатах имеются серь-



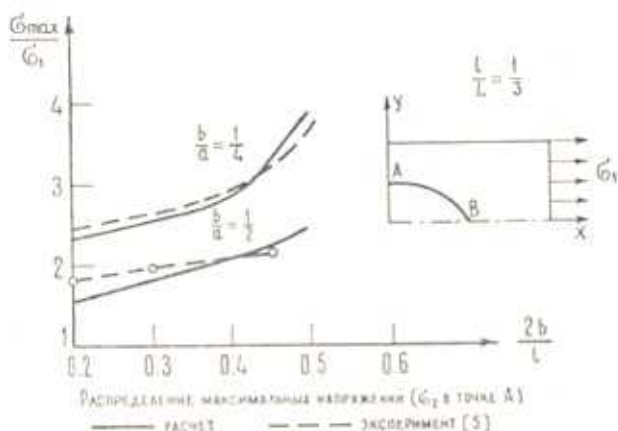
Фиг. 1.



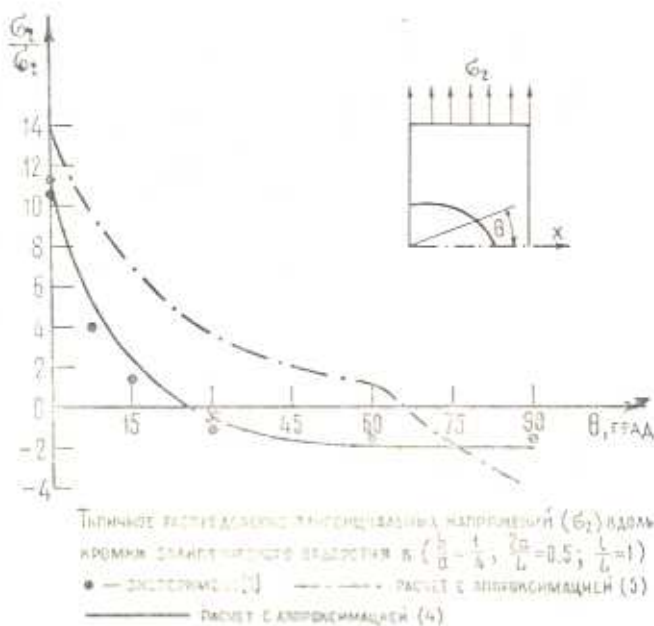
Фиг. 2.



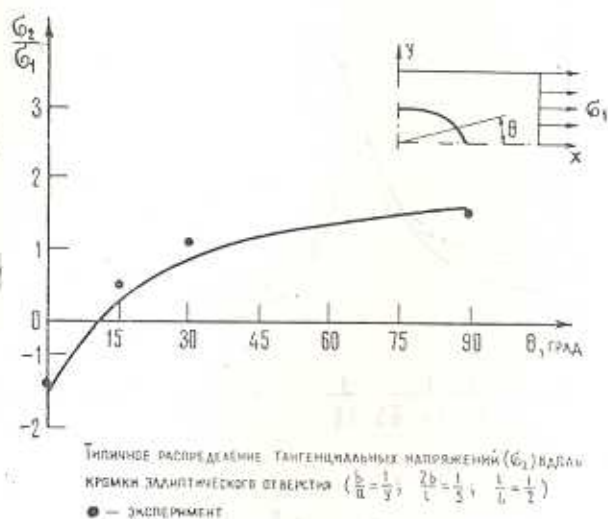
Фиг. 3.



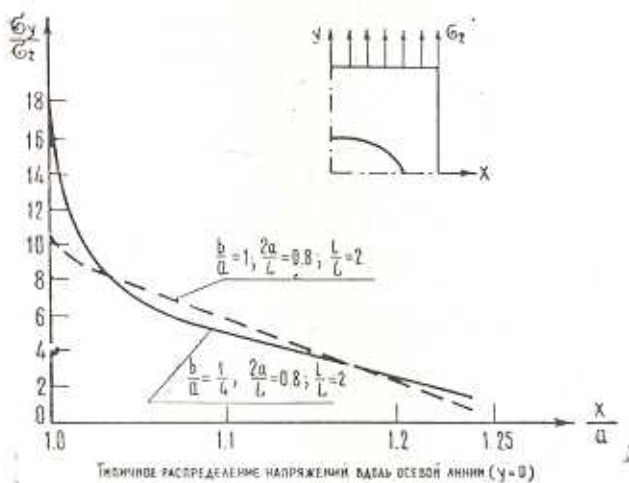
Фиг. 4.



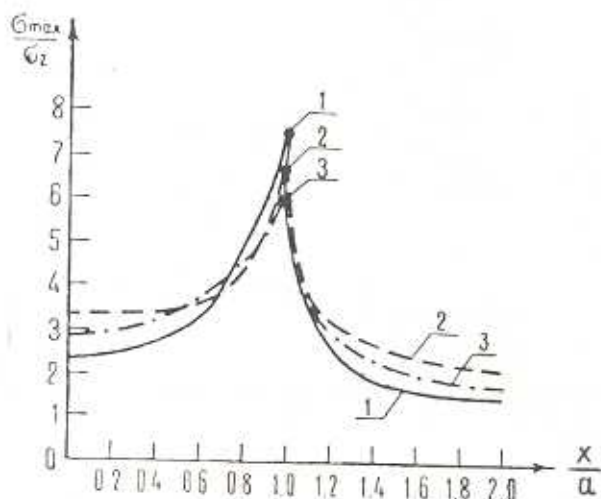
Фиг. 5.



Фиг. 6.



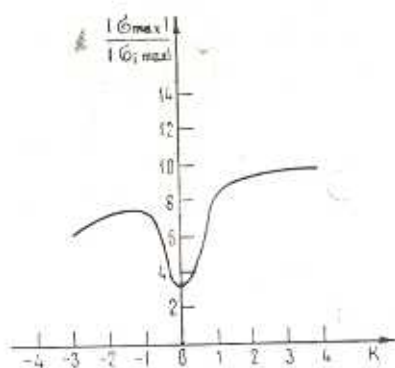
Фиг. 7.



Распределение тангенциальных напряжений вдоль контура
 отверстия в сечении $y=0$ ($\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{L} = 1$; $2a = \frac{1}{2}$)

1. $\sigma_2 = 0.5\sigma_1$; 2. $\sigma_2 = 0.5\sigma_1$, решение [8]; 3. $\sigma_1 = 0$

Фиг. 8.

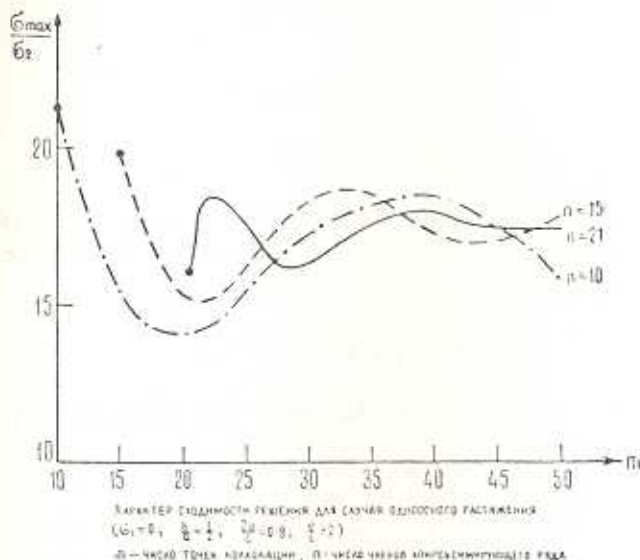


Распределение максимальных напряжений
 в пластине ($\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$; $\frac{2a}{L} = 0.7$; $\frac{1}{L} = 1$)

$\sigma_2 = K\sigma_1$, $\sigma_1 \text{ макс} = \text{макс}(\sigma_1, \sigma_2)$

$\sigma_{\max} = \text{макс}(\sigma_1, \sigma_2)$

Фиг. 9.



Фиг. 10.

езные расхождения с нашими результатами и известными экспериментальными решениями, объясняемые, как видно, вычислительными погрешностями.

Харьковский научно-исследовательский институт завода „Электротяжмаш“

Поступила 10 XI 1973

Ա. Լ. ԼԻՎՇԻՑ

ԹԻԹԵՂՆԵՐՈՒՄ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՅՔԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է էլիպտական անցքով ուղղանկյունաձև թիթեղներում լարումների որոշման վերաբերյալ խնդիրը:

Խնդիրը լուծվում է նախապես որոշված կոտակցիայի մեթոդով: Ուսումնասիրվում են երկու տեսակի մոտարկող ֆունկցիաներ: Ստացվել են թվային արդյունքներ: Գտնված լուծումները համեմատվում են ուրիշ հեղինակների մի քանի փորձնական արդյունքների հետ: Թվային նանապարհով ուսումնասիրվում են ստացված լուծումների զուգամիատեսակ արագությունը և ընտելը:

STRESS CONCENTRATIONS NEAR ELLIPTICAL HOLES
IN PLATES

A. L. LIVSHITS

S u m m a r y

Determination of stresses in rectangular plates is considered by means of the collocation method. The results obtained are compared with experimental ones.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, 1951.
2. *Inglis C.* Trans. Inst. Naval. Arch, London, v. 55, 1913.
3. *Кокер Э., Файлон А.* Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, 1936.
4. *Durelli H.* Exp. Stress Analysis, v. 1, № 1, 1943.
5. *Дурелли, Перкс, Фени.* Напряжение вокруг эллиптического отверстия в пластине конечных размеров, подверженной действию осевой нагрузки. Прикл. механика, № 1, 1966.
6. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, 1968.
7. *Бондаренко Б. А.* Полигармонические полиномы. Ташкент, 1968.
8. *Джонс, Хозос.* Распределение напряжений около эллиптических отверстий в плоских пластинах. Конструирование и технология машиностроения, № 3, 1971.