ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 1, 1975 Механика

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, В. П. ОЛЬШАНСКИЙ

О КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВЫЗЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ДВИЖУЩИХСЯ СИЛ

Рассматриваются установившиеся колебания тонкой плиты, вызванные вращательным движением на ее поверхности нагрузки, состоящей из четного числа равных регулярно расположенных по окружности сил. В первом приближении исследуемая система может служить теоретической моделью для определения воздействия на прямоугольную пластину со стороны упорного шарикоподшипника.

Пусть поперечные колебания плиты описываются обычным дифференциальным уравнением без учета сдвига и инерции поворота [1]

$$D\nabla^2\nabla^2 W + \rho \ddot{W} = q(x, y, t) \tag{1}$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, D — изгибная жесткость, ρ — масса, отнесенная к единице площади, q — внешняя нагрузка.

Поместив начало системы координат xoy в угол пластины с размерами в плане l_1, l_2, разложим поперечный прогиб в ряд

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum A_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} \tag{2}$$

удовлетворяющий условиям свободного опирания кромок.

Построим аналогичный ряд для внешней нагрузки

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty}\sum B_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} \tag{3}$$

которая задана выражением

$$q = Q\sum_{i=1}^{2k} \delta(x - x_i)\,\delta(y - y_i) \tag{4}$$

Здесь Q — сила, приложенная в точке с координатами $x_i = x_i(t)$, $y_i = y_i(t)$; $2k$ — количество сил, движущихся по окружности радиуса r с центром в точке (a, b); δ — функция Дирака.

Из выражений (3) и (4) для коэффициентов разложения имеем

$$B_{mn}(t) = \frac{4Q}{l_1 l_2}\Big(\sin\alpha a \sin\beta b \sum_{i=1}^{2k}\cos\alpha\xi_i \cos\beta\eta_i + $$
$$+ \cos\alpha a \cos\beta b \sum_{i=1}^{2k} \sin\alpha\xi_i \sin\beta\eta_i\Big) \tag{5}$$

При этом введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{m\pi}{l_1}, \qquad \beta = \frac{n\pi}{l_2}, \qquad \xi_i = x_i - a,\ \eta_i = y_i - b.$$

Переходя к полярной системе координат, положение точки (x_i, y_i) на окружности радиуса r определим углом φ_i по формулам

$$\xi_i = r\cos\varphi_i \quad \eta_i = r\sin\varphi_i \quad (i = 1, 2,.., 2k).$$

Тогда для произведения косинусов и синусов получим

$$\cos\alpha\,\xi_i\cos\beta\,\eta_i = \frac{1}{2}[\cos(rR\sin\theta_1) + \cos(rR\sin\theta_2)]$$

$$\sin\alpha\,\xi_i\sin\beta\,\eta_i = \frac{1}{2}[\cos(rR\sin\theta_1) - \cos(rR\sin\theta_2)] \tag{6}$$

$$R = (\alpha^2 + \beta)^{1/2};\ \ \theta_{1,2} = \gamma \pm \varphi_i,\ \ \gamma = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$$

Пользуясь известным разложением [2]

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(z)\cos 2j\theta$$

выражение (6) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,\xi_i\cos\beta\,\eta_i &= J_0(rR) + 2\sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(rR)\cos 2j\gamma\cos 2j\varphi_i \\ \sin\alpha\,\xi_i\sin\beta\,\eta_i &= 2\sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(rR)\sin 2j\gamma\sin 2j\varphi_i \end{aligned} \tag{7}$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода порядка $\nu = 0, 2, 4, \ldots$

Подставив соотношения (7) в (5), имеем

$$\begin{aligned} B_{mn}(t) = \frac{4Q}{l_1 l_2}\Big[\, & 2kJ_0(rR) + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{1j}\sum_{i=1}^{2k}\cos 2j\varphi_i + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{2j}\sum_{i=1}^{2k}\sin 2j\varphi_i \Big] \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\lambda_{1j} = 2J_{2j}(rR)\cos 2j\gamma\sin\alpha a\sin\beta b$$

$$\lambda_{2j} = 2J_{2j}(rR)\sin 2j\gamma\cos\alpha a\cos\beta b$$

При помощи формул [2]

$$\sum_{i=0}^{2k-1}\cos(u + iv) = \cos\left(u + \frac{2k-1}{2}v\right)\sin kv\operatorname{cosec}\frac{v}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \sin(u+iv) = \sin\left(u+\frac{2k-1}{2}v\right)\sin kv \operatorname{cosec}\frac{v}{2}$$

для регулярного расположения сил Q

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1 + i\Delta\varphi = \varphi_1 + \frac{i\pi}{k}, \quad i = 0, 1, 2, .., 2k-1,$$

после раскрытия неопределенности находим

$$\sum_{i=1}^{2k} \cos 2j\varphi_i = \begin{cases} 2k\cos 2sk\varphi_1 & \text{при } j = sk \\ 0 & \text{при } j \neq sk \end{cases} \qquad (9)$$

$$s = 1, 2, 3...$$

$$\sum_{i=1}^{2k} \sin 2j\varphi_i = \begin{cases} 2k\sin 2sk\varphi_1 & \text{при } j = sk \\ 0 & \text{при } j = sk \end{cases}$$

При постоянной скорости вращения ($\varphi_1 = \omega t$) согласно (8) и (9) имеем

$$B_{mn}(t) = \frac{4Q\cdot 2k}{l_1 l_2}\left[J_0(rR) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} N_i \sin 2ik\omega t\right] \qquad (10)$$

где

$$\begin{aligned} M_i &= 2J_{2ik}(rR)\cos 2ik\gamma \sin\alpha a \sin\beta b \\ N_i &= 2J_{2ik}(rR)\sin 2ik\gamma \cos\alpha a \cos\beta b \end{aligned} \qquad (11)$$

Подставив ряды (2), (3) в уравнение (1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{A}_{mn} + \Omega_{mn}^2 A_{mn} = \rho^{-1} B_{mn}(t)$$

Здесь $\Omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho}(\alpha^2+\beta^2)^2$ — квадраты собственных частот колебаний плиты.

Ограничиваясь рассмотрением установившегося режима колебаний, решение mn-го уравнения с учетом разложения (10) ищем в виде

$$A_{mn} = C_{mn}^0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_{mn}^{(i)} \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} D_{mn}^{(i)} \sin 2ik\omega t$$

Для определения коэффициентов получаем равенства

$$\begin{aligned} C_{mn}^0 &= \frac{4Q\cdot 2k}{l_1 l_2}\,\frac{J_0(rR)}{D(\alpha^2+\beta^2)^2} \\ C_{mn}^{(i)} &= \frac{4Q\cdot 2k}{\rho l_1 l_2}\,\frac{M_i}{\Omega_{mn}^2-(2ik\omega)^2} \\ D_{mn}^{(i)} &= \frac{4Q\cdot 2k}{\rho l_1 l_2}\,\frac{N_i}{\Omega_{mn}^2-(2ik\omega)^2} \end{aligned} \qquad (12)$$

Таким образом, в установившемся режиме пластина, получив статическую осадку, равную

$$W_0(x, y) = \sum\sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn}^0 \sin\alpha x \sin\beta y$$

будет совершать колебания с частотами $2ik\omega$. Осадка пластины пропорциональна произведению $F = 2kQ$, следовательно, она зависит от суммарного внешнего усилия, передаваемого на пластинку.

Проанализируем теперь амплитуды возбуждения колебаний (11). В силу того, что максимальные значения функций Бесселя $J_\nu(z)$ убывают с ростом ν, приходим к выводу, что увеличение количества сил $2k$ уменьшает амплитуды возбуждения. Таким образом, увеличение количества сил Q, без изменения статической осадки плиты, приводит к снижению уровня возможных вибраций.

Из выражений (12) следуют условия резонансов в рассматриваемой системе

$$\Omega_{mn}^2 - (2ik\omega)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_{mn}}{2ik}, \ i = 1,\ 2,\ 3$$

Эти формулы показывают, что при заданной скорости вращения ω_1 группы, состоящей из $2k$ сил, резонанс невозможен на собственных частотах пластины, удовлетворяющих условию

$$\Omega_{mn} \leqslant \Omega^*, \ \text{где} \ \Omega^* = 2k\omega_1$$

Для больших значений i и k имеется возможность наступления резонансов, соответствующих малым скоростям вращения ω. Однако, при этом, как показано выше, амплитуды полигармонического возбуждения убывают и оказываются недостаточными для того, чтобы вызвать заметные колебания в системах, где существуют значительные силы рассеяния энергии.

Выше предполагалось, что величины движущихся сил являются постоянными во времени. Не представляет затруднений определить амплитуды внешнего возбуждения и при наличии гармонической составляющей, то есть при $Q = P + G\cos\lambda t$. Для коэффициентов разложения внешней нагрузки в этом случае получим

$$B_{mn}(t) = \frac{4P\cdot 2k}{l_1 l_2}\left[J_0(rR) + \sum_{i=1}^{\infty} M_i \cos 2ik\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} N_1 \sin 2ik\omega t\right] +$$

$$+ \frac{4G\cdot 2k}{l_1 l_2}\left[J_0(rR)\cos\lambda t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} M_i(\cos\varepsilon_{1i}t + \cos\varepsilon_{2i}t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} N_i(\sin\varepsilon_{1i}t + \sin\varepsilon_{2i}t)\right]$$

где

$$\varepsilon_{1i} = 2ik\omega - \lambda, \quad \varepsilon_{2i} = 2ik\omega + \lambda.$$

В отличие от рассмотренного ранее случая в системе теперь возможно появление дополнительных резонансов на частотах $\lambda = \Omega_{mn}$ и $2ik\omega \pm \lambda = \Omega_{mn}$. Последние являются комбинационными резонансами, обусловленными пульсацией сил и изменением координат их точек приложения. Об опасности этих резонансов позволит судить только учет реальных сил рассеяния энергии, что не вызывает принципиальных затруднений в рамках линейной постановки задачи.

В заключение отметим, что полученные результаты можно легко распространить на случай нескольких групп сил, движущихся по концентрическим окружностям.

Харьковский ордена Ленина
политехнический институт

Поступила 10 VII 1973

Ե. Գ. ԳՈԼՈՍԿՈԿՈՎ, Վ. Պ. ՕԼՇԱՆՍԿԻ

ՇԱՐԺՎՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ՀԱՐՈՒՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ԹԻԹԵՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում են ուղղանկյունաձև թիթեղի տատանումները շրջանագծով շարժվող ուժերի սիստեմի ազդեցության տակ։

Թիթեղի վիճակագրական դիրքի որոշման համար, որի նկատմամբ կատարվում են տատանումները, ստացվել է բանաձև։ Որոշվել են պտտման կրիտիկական արագությունները, որոնց դեպքում հնարավոր է ռեզոնանս։ Բերվում են նաև պոլիհարմոնիկ գրգռման ամպլիտուդաների որոշման համար բանաձևեր։

ON VIBRATION OF A RECTANGULAR PLATE, EXCITED BY A SYSTEM OF MOVING FORCES

E. G. GOLOSKOKOV, V. P. OLSHANSKY

S u m m a r y

Stationary vibration of a rectangular freely supported plate, excited by a system of circular moving loads is investigated. Statical transverse displacement of the plate is determined. Formulas for resonance angular velocities of the rotating system as well as for the amplitude of polygarmonic excitation are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания механических систем. Изд. „Наукова думка", Киев, 1966.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.