

А. Н. МАРТИРОСЯН

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Решение ряда смешанных динамических задач для жидкой или упругой среды дано в [1, 3]. В данной статье рассматривается плоская задача о движении анизотропной упругой среды при наличии трещины вдоль отрицательной действительной оси под воздействием сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке  $x = -l$  на обоих берегах трещины. Для изотропной среды эта задача рассматривалась в [4]. Здесь указанная задача решена для анизотропной среды сначала при периодических во времени граничных условиях, а далее с помощью обратного преобразования по времени найдено решение нестационарной задачи во всей плоскости в форме В. И. Смирнова-С. А. Соболева [3]. В частности, для изотропной среды в точке  $x = 0, y = 0$  полученное решение приводится к решению, найденному другим путем в [4]. Найдено также фундаментальное решение для анизотропной среды.

1. Уравнения движения в перемещениях для анизотропной среды в плоском случае при отсутствии массовых сил имеют вид [5]

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим следующую граничную задачу при наличии полубесконечного разреза:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \rho \left[ (c-d) \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} \right] &= -P \delta(x+l) e^{-i\omega t} \quad \text{при } y=0, x < 0 \\ v=0 \quad \text{при } y=0, x > 0; \quad \sigma_{xy} = \rho d \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{при } y=0, x \in (-\infty, \infty) \\ u = O(r^{1/2}), \quad v = O(r^{1/2}) \quad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} &\rightarrow (\text{условие на ребре}) \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь считается, что физические величины задаются в виде  $f(x, y) \exp(\pm i\omega t)$ , где  $f(x, y)$  — некоторая функция,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Задача считается симметричной относительно оси  $x$ . Согласно [3]

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) e^{-i\omega t}, \quad v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), имеем

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} &= -\omega^2 \bar{u} \\ c \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} &= -\omega^2 \bar{v} \end{aligned} \quad (4)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\lambda) e^{i(\lambda x + y \sqrt{k_n^2 - \lambda^2})} d\lambda \\ \bar{v} &= \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\lambda) e^{i(\lambda x + y \sqrt{k_n^2 - \lambda^2})} d\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A_n(\lambda)$ ,  $B_n(\lambda)$ ,  $k_n(\lambda)$  — неизвестные функции. Подставляя (5) в (4), получим уравнения, решая которые будем иметь

$$\beta_n^2 \equiv k_n^2 - \lambda^2 = \frac{(a+d)\omega^2 - L\lambda^2}{2ad} + (-1)^n \sqrt{\left[ \frac{(a+d)\omega^2 - L\lambda^2}{2ad} \right]^2 - \mu_1^2 \mu_2^2} \quad (6)$$

$$B_n = -\frac{M_n}{c\lambda\beta_n} A_n; \quad M_n = d\beta_n^2 - a\mu_1^2, \quad \mu_n^2 = p_n^2 - \lambda^2$$

где  $L = a^2 + d^2 - c^2$ ,  $p_1^2 = \frac{\omega^2}{a}$ ,  $p_2^2 = \frac{\omega^2}{d}$  при  $c = a - d$ ,  $k_n = p_n$ . Подставляя (6) в (5), находим решение

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_n)} d\lambda \\ \bar{v} &= -\sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_n}{c\lambda\beta_n} A_n(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_n)} d\lambda \end{aligned} \quad (7)$$

Выражая из условия  $\sigma_{xy} = 0$  при  $y = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$   $A_2(\lambda)$  через  $A_1(\lambda)$  и подставляя в (7), имеем

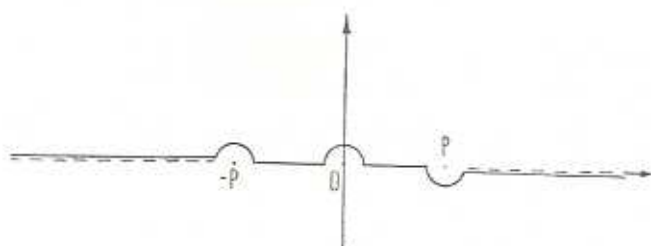
$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_1)} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_2 N_1}{\beta_1 N_2} A_1(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_2)} d\lambda \\ \bar{v} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_1}{c\lambda\beta_1} A_1(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_1)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_2 N_1}{\lambda\beta_1 N_2} A_1(\lambda) e^{i(\lambda x + y\beta_2)} d\lambda \end{aligned} \quad (8)$$

$$N_n = (c-d)\beta_n^2 + a\mu_1^2, \quad (n = 1, 2)$$

Решение в виде (8) удовлетворяет уравнениям (4) и граничному условию  $\bar{\sigma}_{xy} = 0$  при  $y = 0$ . Остальные граничные условия и условие на ребре определяют функцию  $A_1(\lambda)$ . Функции  $\beta_n$  суть ветви аналитической функции, однозначной на римановой поверхности, составленной из двух листов, склеенных вдоль купюр  $(\lambda_1, \bar{\lambda}_2)$ ,  $(\bar{\lambda}_1, \lambda_2)$ , имеющих полу-бесконечные разрезы, соответственно,  $(p_1, \infty)$ ,  $(-\infty, -p_1)$ , и  $(p_2, \infty)$ ,  $(-\infty, -p_2)$ , где  $\lambda_n, \bar{\lambda}_n$  — корни уравнения

$$\left[ \frac{(a+d)\omega^2 - L\lambda^2}{2ad} \right]^2 - \mu_1^2 \mu_2^2 = 0$$

причем подразумеваются те ветви этих функций, которые действительны и положительны при  $-p_1 < \lambda < p_1$ , то есть положительно мнимы на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (8) показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

Далее, так как  $\bar{\sigma}_{yy} = \rho \left[ (c-d) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + a \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]$ , то при  $y = 0$  имеем

$$\bar{\sigma}_{yy} = \rho \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda; \quad \bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\lambda) B(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (9)$$

$$A(\lambda) = i \frac{\mu_1 (\beta_1 - \beta_2)}{\lambda \beta_1 N_2} R(\lambda), \quad B(\lambda) = \frac{a \mu_1^2 (\beta_2^2 - \beta_1^2)}{i \beta_1 N_2}$$

$R(\lambda) = [a^2 - (c-d)^2] \lambda^2 - a\omega^2$  — функция Рэлея.

Применение обратного преобразования Фурье к соотношениям (9) дает

$$A(\lambda) A_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\bar{\sigma}_{yy}}{\rho} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = \Omega^+(\lambda) + \Omega^-(\lambda)$$

$$B(\lambda) A_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{v})_{y=0} e^{-i\lambda x} dx = V^+(\lambda) + V^-(\lambda) \quad (10)$$

$$\Omega^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left( \frac{\bar{\sigma}_{yy}}{\rho} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx; \quad \Omega^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\bar{\sigma}_{yy}}{\rho} \right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$$V^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 (\bar{v})_{y=0} e^{-\lambda x} dx; \quad V^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\bar{v})_{y=0} e^{-\lambda x} dx$$

причем искомые функции  $\Omega^-(\lambda)$  и  $V^-(\lambda)$  аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного  $\lambda$ .

Согласно граничным условиям (2) имеем

$$\Omega^+(\lambda) = -\frac{Pe^{i\lambda l}}{2\pi\rho}; \quad V^+(\lambda) = 0 \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9) и исключая  $A_1(\lambda)$ , приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$-i \frac{R(\lambda) V^+(\lambda)}{\alpha \beta_1 (\beta_1 + \beta_2)} = \Omega^-(\lambda) - \frac{Pe^{i\lambda l}}{2\pi\rho} \quad (12)$$

Легко проверить, что

$$R(\lambda) = \frac{\alpha^2 - (c-d)^2}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \lambda^2 + \frac{(\beta_2^2 - \lambda^2)^2 + Q}{4\beta_1\beta_2} \right] \beta_1\beta_2 \quad (13)$$

где

$$Q = \frac{(c+d-a)(c+a-3d)}{d^2 [\alpha^2 - (c-d)^2]}$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$i \frac{\alpha^2 - (c-d)^2}{2\alpha} \beta_2 F(\lambda) V^-(\lambda) = \Omega^-(\lambda) - \frac{Pe^{i\lambda l}}{2\pi\rho} \quad (14)$$

где

$$F(\lambda) = \frac{2}{\beta_2^2 - \lambda^2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \left[ \lambda^2 + \frac{(\beta_2^2 - \lambda^2)^2 + Q}{4\beta_1\beta_2} \right]$$

Функции  $F(\lambda)$  и  $V \sqrt{\beta_2^2 - \lambda^2}$  представим в виде

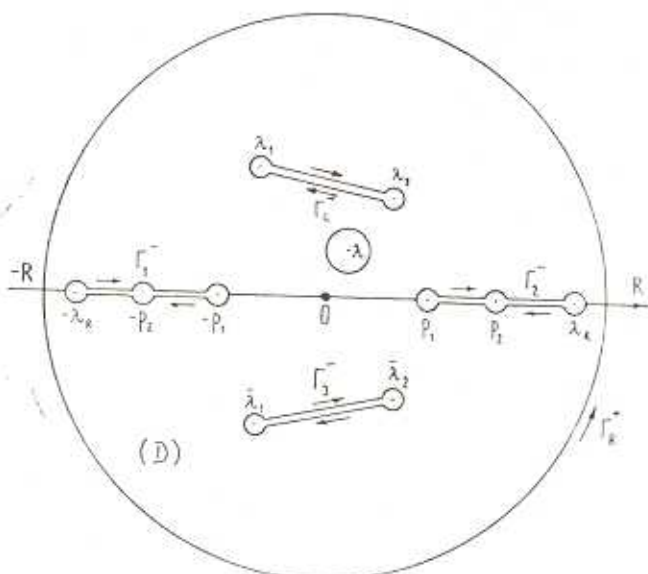
$$F(\lambda) = F^+(\lambda) F^-(\lambda); \quad V \sqrt{\beta_2^2 - \lambda^2} = V \sqrt{\beta_2 + \lambda} V \sqrt{\beta_2 - \lambda} \quad (15)$$

где функции  $F^+(\lambda)$  и  $F^-(\lambda)$  — аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях  $\text{Im}\lambda > 0$  и  $\text{Im}\lambda < 0$ . Согласно выбору ветви функции  $V \sqrt{\beta_2^2 - \lambda^2}$  и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости  $\lambda$ -плоскости,  $V \sqrt{\beta_2 + \lambda}$  будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль  $y=0$ ,  $-\infty < \lambda < -\beta_2$ ), а  $V \sqrt{\beta_2 - \lambda}$  — в нижней полуплоскости (разрез вдоль  $y=0$ ,  $\beta_2 < \lambda < \infty$ ). В самом деле, легко показать, что для функции  $F(\lambda)$  разложение в ряд Лорана около бесконечно удаленной точки имеет вид

$$F(\lambda) = 1 + \frac{\alpha-2}{\lambda^2} + \dots$$

Заметим, что  $\ln F(\lambda)$  — аналитическая функция в области  $(D)$  (фиг. 2) и непрерывна в замкнутой области  $(\bar{D})$  при достаточно больших  $R$ . Применим формулу Коши к этой функции в указанной области

$$\begin{aligned} \ln F(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln F(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^+} \frac{\ln F(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau + \\ &+ \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^-} \frac{\ln F(\tau)}{\tau - \lambda} d\tau = I_R + \sum_{n=1}^4 I_n; \quad \Gamma = \Gamma_R^+ + \sum_{n=1}^4 \Gamma_n^- \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Так как при  $|\lambda| \rightarrow \infty$   $F(\lambda) = 1 + \frac{\text{const}}{\lambda^2}$ , то  $I_R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Тогда для  $I_3$  получим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3^-} \ln(\mu_1 + \mu_2) \left[ \tau^2 + \frac{(\mu_2^2 - \tau^2)^2 + Q}{4\mu_1\mu_2} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3^-} \ln(\beta_1 + \beta_2) \frac{d\tau}{\tau - \lambda}. \end{aligned}$$

Так как подынтегральное выражение в первом интеграле не имеет точки разветвления и особенности внутри контура  $\Gamma_3^-$ , то первый интеграл равен нулю, а подынтегральное выражение во втором интеграле

принимает на обоих берегах разреза одинаковые значения, поэтому последний интеграл тоже равен нулю. Итак,  $I_3 = 0$ . Аналогичным образом доказывается, что  $I_4 = 0$ . Отметим, что  $p_1$  — точка разветвления для  $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ , а  $p_2$  — для  $\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ . После выбора ветвей функций  $\sqrt{p_1^2 - \lambda^2}$ ,  $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$  легко вычислить  $I_1 = \ln F^+(\lambda)$  в виде

$$F^+(\lambda) = \frac{\lambda_R + \lambda}{\sqrt{p_1 + \lambda} \sqrt{p_2 + \lambda}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{p_1}^{p_2} \ln \left[ \frac{R(\tau)}{R(\tau)} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \right\} \quad (16)$$

Аналогично получим

$$F^-(\lambda) = \frac{\lambda_R - \lambda}{\sqrt{p_1 - \lambda} \sqrt{p_2 - \lambda}} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{p_1}^{p_2} \ln \left[ \frac{R(\tau)}{R(\tau)} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda} \right\} \quad (16')$$

$$\left( R(\lambda_R) = 0, \quad \lambda_R = \frac{v}{c_R}, \quad c_R < \sqrt{d} \right)$$

Очевидно, что функции  $F^+(\lambda)$  и  $F^-(\lambda)$  — аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях  $\text{Im } \lambda > 0$  и  $\text{Im } \lambda < 0$ . В частном случае, при  $c = a - d$ , выражения для  $F^+(\lambda)$  и  $F^-(\lambda)$  совпадают с результатом Мауэ [6]. Подставляя (15) в (14), имеем

$$i \frac{a^2 - (c - d)^2}{2a} \sqrt{p_2 + \lambda} F^+(\lambda) \sqrt{p_1 - \lambda} = \frac{Q^-(\lambda) \sqrt{p_1 - \lambda}}{(\lambda_R - \lambda) X(\lambda)} -$$

$$- \frac{P \sqrt{p_1 - \lambda} e^{\rho_1 t}}{2\pi c (\lambda_R - \lambda) X(\lambda)} \quad (17)$$

$$F^-(\lambda) = \frac{\lambda_R - \lambda}{\sqrt{p_1 - \lambda} \sqrt{p_2 - \lambda}} X(\lambda)$$

Для того, чтобы применить стандартную процедуру Винера-Хопфа к уравнению (17), необходимо преобразовать второе слагаемое в первой части, так как это слагаемое представляет расходящуюся волну на бесконечности при  $\text{Im } \lambda < 0$ . Для этого надо перевести этот член в левую часть равенства (17).

Функция  $F^-(\lambda)$  имеет нуль при  $\lambda = \lambda_R$  и точки разветвления при  $\lambda = p_1$  и  $\lambda = p_2$  в показателе экспоненты, причем показатель экспоненты, в указанных окрестностях имеет соответственно порядок  $-\frac{1}{2} \ln(p_1 - \lambda)$  и  $\frac{1}{2} \ln(p_2 - \lambda)$ . Поэтому в точке  $\lambda = p_2$  функция  $F^-(\lambda) \sqrt{p_2 - \lambda}$  регулярна. Последнее следует из поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [7]. Преобразуем второе слагаемое в правой части уравнения (17).

Окончательно имеем уравнение Винера-Хопфа

$$i \frac{a^2 - (c-d)^2}{2a} \sqrt{p_1 + i} F^+(i) V^+(i) + f_1^+(i) = \frac{\Omega^-(i) \sqrt{p_1 - i}}{(i_R - i) X(i)} - f_1^-(i)$$

$$f_1(i) = \frac{P \sqrt{p_1 - i} e^{iRl}}{2\pi^2 \rho (i_R - i) X(i)} = \frac{f(i) e^{iRl}}{i_R - i} = f_1^+(i) + f_1^-(i) \quad (18)$$

$$f_1^-(i) = \frac{f(i_R) e^{iRl}}{i_R - i} + \beta(\varphi, l); \quad \beta(\varphi, a) = \int_{p_1}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) e^{i\tau a} d\tau}{(i_R - \tau)(\tau - i)}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{P \sqrt{\tau - p_1} [a \sqrt{\tau^2 - k_1^2} \sqrt{\tau^2 - p_1^2} - \beta_2 \operatorname{Re} R(\tau)]}{2\pi^2 \rho X^+(\tau) (\beta_2 - \beta_1) \bar{R}(\tau)}, & \tau \in (p_1, p_2) \\ -\frac{P \sqrt{\tau - p_1}}{2\pi^2 \rho X(\tau)}, & \tau \in (p_2, \infty) \end{cases}$$

Так как точки  $p_1, p_2, i_R$  не принадлежат к нижней полуплоскости плоскости  $\lambda$ , то правая часть уравнения (18) представляет собой функцию аналитическую в нижней полуплоскости, в левая часть того же уравнения — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями одна другой. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости  $\lambda$ , в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [8] и условие на ребре, нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости  $\lambda$ .

Таким образом, получим

$$\Omega^-(i) = \frac{f(i_R) X(i) e^{iRl}}{\sqrt{p_1 - i}} + \frac{(i_R - i) X(i)}{\sqrt{p_1 - i}} \beta(\varphi, l) \quad (19)$$

$$V^+(i) = 2 a i f_1^-(i) \{ [a^2 - (c-d)^2] \sqrt{p_2 + i} F^-(i) \}^{-1} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (10), получим

$$A_1(i) = i [a_1^{(1)}(i) e^{iRl} + a_2^{(1)}(i) e^{iRl} + a_3^{(1)}(i) \beta(\varphi, l)] \quad (21)$$

Подставляя (21) и (9) в (8), имеем

$$\bar{u} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ a_n^{(m)} \exp(i\varphi_n^{(m)}(i)) + \frac{1}{2} \beta(a_3^{(m)}(i); \varphi_3^{(m)}) \right] d\lambda$$

$$\bar{v} = i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ b_n^{(m)} \exp(i\varphi_n^{(m)}(i)) + \frac{1}{2} \beta(b_3^{(m)}(i); \varphi_3^{(m)}) \right] d\lambda \quad (22)$$

$$a_1^{(m)} = (-1)^{m+1} \frac{P_{l, \beta_m}^2 N_{3-m}}{2\pi \rho G(\lambda)}; \quad a_2^{(m)} = (-1)^m \frac{f(\lambda_R) \lambda X(\lambda) \beta_m N_{3-m}}{\sqrt{p_1 - \lambda} G(\lambda)}$$

$$a_3^{(m)} = (-1)^m \frac{\lambda X(\lambda) (\lambda_R - \lambda) \beta_m N_{3-m}}{\sqrt{p_1 - \lambda} G(\lambda)}$$

$$b_n^{(m)} = -\frac{M_m}{c^2 \beta_m^2} a_n^{(m)}; \quad G = R(\lambda) \beta_1 (\beta_1 - \beta_2)$$

$$\varphi_1^{(m)} = \lambda(x+l) + y \beta_m^2; \quad \varphi_2^{(m)} = \lambda_R l + \lambda x + y \beta_m^2; \quad \varphi_3^{(m)} = \omega \tau l + \lambda x + y \beta_m^2$$

Таким образом, найдено решение поставленной задачи, периодическое по времени. Обратное преобразование по  $t$ , соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} u ds; \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} v ds, \quad s = -i\omega \quad (22')$$

При применении обратного преобразования Лапласа по  $t$ , введем вместо  $\lambda$  переменную  $\xi$ ,  $\lambda = \omega \xi$ ,  $s = \sigma - i\tau$ , где  $\sigma > 0$  и мало.

Существенными при вычислении интегралов (22), (22') оказываются окрестности точек  $\xi = \xi_n^{(m)}$ , для которых

$$f_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}) \equiv t - \tau_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}) = 0 \quad (23)$$

$$(n = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2)$$

причем сопряженные значения  $\bar{\xi}_n^{(m)}$  также удовлетворяют (23). Для определенности вычислим один из шести интегралов, содержащих указанные экспоненты.

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(\tau) e^{-i\omega f_1^{(1)}(\xi)} d\tau \quad (24)$$

Тогда, так как  $\xi = \frac{\lambda}{\tau + i\sigma}$ , можно показать, что при  $\sigma > 0$  полуоси

$\lambda < 0$  соответствует контур по  $\xi$  в верхней полуплоскости, а полуоси  $\lambda > 0$  — контур  $\xi$  в нижней полуплоскости. В силу малости  $\sigma$  можно условно эти контуры проводить по действительной оси  $\xi$  с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскости. Тогда

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(\xi) e^{-i\omega f_1^{(1)}(\xi)} d\xi$$

где в силу однородности произведено сокращение на  $\omega$ , причем во множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено  $\omega = 1$ , что дает новые формулы для  $a_1^{(1)}(\xi)$ ,  $f_1^{(1)}(\xi)$ .



Пусть  $\omega > 0$ . Заменим контур интегрирования  $-\infty < \xi < \infty$  на контур  $\Gamma_1$ , проходящий через указанные точки  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_1^{(1)}$  в направлении  $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi) = 0$ . Для этого нужно найти области постоянного знака  $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi)$ . В начале для простоты рассмотрим  $f_1^{(1)}(\xi)$  для изотропной среды, для которой  $c = a - d$ ,  $k_1 = p_1$ ,  $k_2 = p_2$ . Обозначая  $f_1^{(1)}(\xi) = B$ , где величина  $B$  вещественна,  $\xi = \zeta + i\eta$ , можно убедиться, что в плоскости  $(\zeta, \eta)$  линии  $f_1^{(1)}(\xi) = B$  состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{r_1^{2\zeta^2}}{x_1^2} - \frac{r_1^{2\eta^2}}{y^2} = 1, \quad r_1^2 = a(x_1^2 + y^2), \quad x_1 = x + l$$

а также из отрезков действительной оси  $|\zeta| < \frac{1}{\sqrt{a}}$ . Пусть  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

Тогда, предполагая, что на положительной мнимой полуоси  $|a^{-1} - \xi^2| > 0$ , можно показать, что  $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi) < 0$  в областях (фиг. 3), где проходят дуги окружности  $c_1$  и  $c_2$ . Тогда интегрирование по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\frac{x_1}{r_1}$  заменяется на интегрирование по верхней половине контура  $\Gamma_1$ , а интегрирование по  $\xi$  от  $\frac{x_1}{r_1}$  до  $\infty$  — на интегрирование по нижней половине  $\Gamma_1$ . Это возможно сделать, так как на  $c_1$  и  $c_2$   $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi) < 0$  и можно показать, что интегралы по  $c_1$  и  $c_2$  стремятся к нулю при неограниченном увеличении радиуса окружностей  $c_1$  и  $c_2$ .

Тогда при  $\omega > 0$  можно заменить интегрирование по действительной оси  $\xi$  на интегрирование по  $\Gamma_1$ .

При  $\omega < 0$  вместо  $c_1$ ,  $c_2$  берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых  $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi) > 0$ .

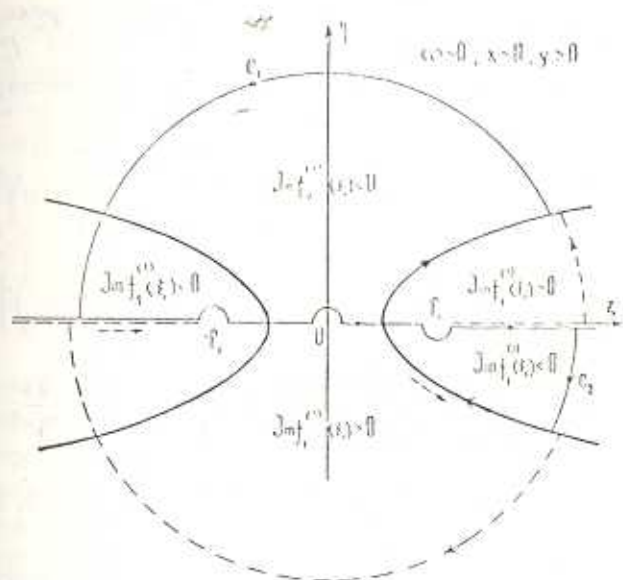
Тогда интегрирование по действительной оси  $\xi$  заменится на интегрирование по  $\Gamma_1$  в обратном предыдущему направлении. Весь внутренний интеграл в (24) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при  $\omega > 0$ . При  $x < 0$  точки  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_1^{(1)}$  лежат на левых ветвях гиперболы (фиг. 3), контуры  $c_1$ ,  $c_2$  заменяются на симметричные относительно оси  $\zeta$ , и решение не изменяется.

Итак, при любом  $\omega$  из (24) получим

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \int_{\Gamma_1} i a_1^{(1)}(\xi) e^{-ts} f_1^{(1)}(\xi) d\xi \quad (25)$$

Для анизотропной задачи, учитывая, что выбранному значению  $\beta_1(\xi)$  соответствует по уравнению  $f_1^{(1)}(\xi) = 0$  одно значение  $\xi_1^{(1)}$ , а также  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ , вместо указанных гипербол (фиг. 3) выбираем ветви кривой  $\text{Im}f_1^{(1)}(\xi) = 0$ , причем при  $x > 0$  правая ветвь  $\Gamma_1$  проходит через  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ . Отметим, что полюсы и точки разветвления подынтегральной

функции находятся на действительной оси  $\zeta$ , причем отсутствие нулей  $R(\zeta)$  вне действительной оси показано в [5]. Окончательно получим, вычисляя интеграл по  $s$ ,



Фиг. 3.

$$I_1^{(1)} = i \int_{\Gamma_1} a_1^{(1)}(\zeta) \delta(f_1^{(1)}(\zeta)) d\zeta$$

Полагая вблизи точек  $\zeta_1^{(1)}$ ,  $f_1^{(1)}(\zeta) = f_1^{(1)'}(\zeta_1^{(1)})(\zeta - \zeta_1^{(1)})$  и вычисляя интеграл от дельта-функции в точках  $\zeta_1^{(1)}$ ,  $\bar{\zeta}_1^{(1)}$ , получим

$$I_1^{(1)} = 2 \operatorname{Re} i \frac{a_1^{(1)}(\zeta_1^{(1)})}{f_1^{(1)'}(\zeta_1^{(1)})} \quad (26)$$

Для изотропной упругой среды

$$I_1^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \frac{a_1^{(1)}(\zeta_1^{(1)}) \left( t - \zeta_1^{(1)} x - \frac{l}{\sqrt{a}} \right)}{y \sqrt{\left( t - \frac{l}{\sqrt{a}} \right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{a}}}$$

При  $t - \frac{l}{\sqrt{a}} < \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a}}$  решение  $I_1^{(1)}$  равно нулю. Точно также в (25) для анизотропной среды  $I_1^{(1)} = 0$  при  $t < T_1^{(1)}(x, y)$ , где  $t = T_1^{(1)}(x, y)$  есть уравнение волны, образованной в точке  $x = 0, y = 0$  в момент  $t = \frac{l}{\sqrt{a}}$ , уравнение которой находится как огибающая по  $\zeta$  уравнений

плоских волн  $f_1^{(1)}(\xi) = 0$  и имеет вид  $f_1^{(1)}(\xi) = 0$ ,  $f_1^{(1)'}(\xi) = 0$ . Областью аналитичности решения является область, указанная на фиг. 2, но без разрезов  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ , поскольку точки  $\xi_n, \bar{\xi}_n$  не являются точками разветвления для решения задачи. Итак, для анизотропной среды из (22), (25) и аналогичных формул для остальных интегралов  $I_n^m$  решение уравнений (1) при граничных условиях (2), где для нестационарной задачи вместо  $\exp(-i\omega t)$  стоит  $\delta(t)$ , примет вид

$$u = 2 \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[ \frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{a_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}) \varphi}{f_3^{(m)}(\xi_3^{(m)})}; 0 \right) \right]$$

$$v = 2 \operatorname{Re} i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[ \frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{b_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}) \varphi}{f_3^{(m)}(\xi_3^{(m)})}; 0 \right) \right]$$

$$\sigma_{yy} = -2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} i \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[ \frac{C_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{C_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}) \varphi}{f_3^{(m)'}(\xi_3^{(m)})}; 0 \right) \right]$$

$$C_n^{(m)} = \frac{c(c-d)\xi^2 - \alpha M_m}{c\xi^2} a_n^{(m)}, \quad (n=1, 2, 3; m=1, 2),$$

причем каждое из слагаемых равно нулю в области вне соответствующей волны  $f_n^{(m)}(\xi) = f_n^{(m)'}(\xi) = 0$ ,  $n=1, 2, 3$ ;  $m=1, 2$ . На оси  $x$  эти выражения упрощаются

$$u = 2 \operatorname{Re} i \left[ \sum_{n=1}^2 \frac{D_n(\xi_n^{(1)})}{f_n^{(1)}(\xi_n^{(1)})} + \beta \left( \frac{D_3(\xi_3^{(1)}) \varphi}{f_3^{(1)'}(\xi_3^{(1)})}; 0 \right) \right]$$

$$v = 2 \operatorname{Re} i \left[ \sum_{n=1}^2 \frac{E_n(\xi_n^{(1)})}{f_n^{(1)'}(\xi_n^{(1)})} + \beta \left( \frac{E_3(\xi_3^{(1)}) \varphi}{f_3^{(1)'}(\xi_3^{(1)})}; 0 \right) \right]$$

где

$$D_n = \sum_{m=1}^2 a_n^{(m)}; \quad E_n = \sum_{m=1}^2 b_n^{(m)}, \quad (n=1, 2)$$

В частности, в точке  $y=0$ ,  $x \rightarrow \pm 0$  получится

$$\sigma_{yy} = \begin{cases} -\frac{\rho}{Vx} \operatorname{Re} \left[ \int_{a^{-1/2}}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{3/2} (c_R^{-1} - \tau)} + \frac{f(c_R^{-1})}{\left(t - \frac{l}{c_R}\right)^{3/2}} \right] & \text{при } t > \frac{l}{V\alpha} \\ 0 & \text{при } t < \frac{l}{V\alpha} \end{cases}$$

что совпадает в изотропной задаче с результатом [4]. Для граничного условия (2), где вместо  $\exp(-i\omega t)$  стоит произвольная функция  $\psi(t)$ , решение получается из предыдущего в виде

$$u = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^2 \int_{T_n^{(m)}(x, y)}^t I_n^{(m)}(x, y, t') \psi(t-t') dt'$$

где  $t = T_n^{(m)}$  есть уравнение волны  $f_n^{(m)}(\bar{z}) = f_n^{(m)'}(\bar{z}) = 0$ , причем интегралы равны нулю при  $t < T_n^{(m)}$ . (Для медленных волн  $t = T_n^{(m)}$  состоит из точечной волны и касательных к ней из точек быстрой волны).

Для нагрузки, заданной на отрицательной оси  $x$  в виде произвольной функции  $\psi(x, t)$ , решение имеет вид

$$u = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^3 \int_{-\infty}^0 dx' \int_{T_n^{(m)}(x-x'-l, y)}^t I_n^{(m)}(x-x'-l, y, t') \psi(x', t-t') dt'$$

2. В этом пункте рассматривается общий и вместе с тем простой подход к получению решений движения однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Решения находятся методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а затем приводятся к форме записи через аналитические функции, введенные В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым [3]. Указанным методом в плоской задаче определены фундаментальные решения для уравнений однородного анизотропного тела. Рассматривается задача определения вектора смещения  $(u, v)$  в плоской задаче для однородного анизотропного упругого тела, удовлетворяющего нулевым начальным условиям и уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\delta(x)$  есть дельта-функция Дирака.

Вводя преобразование по Лапласу  $\bar{u}, \bar{v}$  от  $u, v$  по  $t$  и записывая

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha_1 d\alpha_2; \quad \bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v} e^{i(\alpha_1 x + \beta y)} d\alpha_1 d\beta \quad (28)$$

из (27) можно получить после применения обратного к (28) преобразования Фурье, уравнения, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \rho D \bar{u} &= X_0 (s^2 + a\alpha_1^2 + d\alpha_2^2) - Y_0 c \alpha_1 \beta \\ 4\pi^2 \rho D \bar{v} &= Y_0 (s^2 + a\alpha_1^2 + d\beta^2) - X_0 c \alpha_1 \beta \end{aligned} \quad (29)$$

$$D = (s^2 + a\alpha_1^2 + d\beta^2)(s^2 + d\alpha_1^2 + a\beta^2) - c^2 \alpha_1^2 \beta^2; \quad s = -i\omega$$

Подставляя (29) в (28), вычисляя вычет в интегралах по  $\beta$  относительно полюсов

$$\beta_n = \omega \sqrt{\frac{a+d-Lx^2}{2ad} + (-1)^n \sqrt{\Delta}}, \quad \alpha_1 = \omega x$$

$$\Delta = \left(\frac{a+d-Lx^2}{2ad}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - x^2\right)\left(\frac{1}{d} - x^2\right)$$

можно получить

$$\bar{u} = \frac{i}{8\pi\gamma ad} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} [X_0(\alpha\beta_n^2 + dx^2 - 1) - Y_0 c \alpha\beta_n] e^{i\omega(\alpha x + \beta_n y)} \frac{dx}{\beta_n \sqrt{\Delta}} \quad (30)$$

$$\bar{v} = \frac{i}{8\pi\gamma ad} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} [Y_0(d\beta_n^2 + ax^2 - 1) - X_0 c \alpha\beta_n] e^{i\omega(\alpha x + \beta_n y)} \frac{dx}{\beta_n \sqrt{\Delta}}$$

Контур интегрирования в (30) заменим через контуры  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , которые проходят через точки  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1$ , и  $\alpha_2, \bar{\alpha}_2$  соответственно, причем  $\alpha_n$  находятся из уравнений

$$t - \alpha_n x - \beta_n(\alpha_n) y = 0 \quad (n = 1, 2) \quad (31)$$

На контурах  $\Gamma_1, \Gamma_2$  левые части уравнений (31) вещественны, что позволяет получить обратное преобразование Лапласа по  $t$  в простом виде.

Переходя к оригиналам в (30), получим

$$u = \frac{i}{8\pi\gamma ad} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \int_{\Gamma_n} \delta(t - \alpha x - y\beta_n) [X_0(\alpha\beta_n^2 + dx^2 - 1) - Y_0 c \alpha\beta_n] \frac{dx}{\beta_n \sqrt{\Delta}} \quad (32)$$

$$v = \frac{i}{8\pi\gamma ad} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \int_{\Gamma_n} \delta(t - \alpha x - y\beta_n) [Y_0(d\beta_n^2 + ax^2 - 1) - X_0 c \alpha\beta_n] \frac{dx}{\beta_n \sqrt{\Delta}}$$

Аналогично (25) получим

$$u = \frac{1}{4\pi\gamma ad} \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \frac{X_0(\alpha\beta_n^2 + dx^2 - 1) - Y_0 c \alpha\beta_n}{(x + y\beta_n)\beta_n \sqrt{\Delta}} \Big|_{x=\alpha_n} \quad (33)$$

$$v = \frac{1}{4\pi\gamma ad} \operatorname{Re} i \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \frac{Y_0(d\beta_n^2 + ax^2 - 1) - X_0 c \alpha\beta_n}{(x + y\beta_n)\beta_n \sqrt{\Delta}} \Big|_{x=\alpha_n}$$

Записав уравнения (27) в интегральной форме, можно показать, что решения (33) удовлетворяют условиям задачи.

Иным путем фундаментальные решения для плоской задачи анизотропной теории упругости в другом виде получены в [9].

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский армянский педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 14 V 1973

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ՈՉ ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Ուսումնասիրվում է առաձգական անիզոտրոպ միջավայրի շարժման հարթ խնդիրը բացասական իրական առանցքի երկանքով ճեղքի և կենտրոնացած ուժերի առկայության դեպքում, որոնք կիրառված են ճեղքի երկու եզրերի ինչ որ կետերում:

Իզոտրոպ միջավայրի համար այս խնդիրն ուսումնասիրված է Վ. Գուլիևի կողմից: Ներկա աշխատանքում լուծվում է Վիներ-Հոպֆի մեթոդով նշված խնդիրը անիզոտրոպ միջավայրի համար և պարբերական ըստ ժամանակի եզրային պայմանների դեպքում: Կատարված է նաև Լապլասի հակառակ ձևափոխություն ըստ ժամանակի, որը թույլ է տալիս զտնել ոչ ստացիոնար խնդրի լուծումը անմիջապես ամբողջ հարթության համար Վ. Ի. Սմիրնովի- Ս. Լ. Սորոկի տեսքով:

ON SOLUTION OF SOME NON-STATIONARY PROBLEMS  
FOR ANISOTROPIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

## S u m m a r y

A plane problem on motion of anisotropic elastic medium in the presence of a crack along the negative real axis and a concentrated force, applied at some point on both borders of the crack, is considered. For isotropic medium the similar problem was analysed by V. D. Kuliev. In the present paper this problem is solved by the Vinner-Hopf method under boundary conditions periodic with time for anisotropic medium. In addition, an inverse transform with time is performed, permitting to find a solution to a non-stationary problem within the whole plane in the form suggested by Smirnov and Sobolev. A fundamental solution for anisotropic medium is found as well.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сазомяк А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд. Московского ун-та, 1970.
2. Черепанов Г. П. Дифракция упругих волн на разрезе. В кн. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили)». «Наука», М., 1972.
3. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.

4. Кулиев В. Д. Об одной динамической задаче теории упругости. ПММ, т. 36, вып. 6, 1972.
5. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. записки АГУ, вып. 17, 1949.
6. Maue A. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM, Bd. 34, H 1/2, 1954.
7. Мухомелишвили Н. И. Сиггулярные интегральные уравнения. Наука, М., 1968.
8. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1962.
9. Свекло В. А. Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.