ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 1, 1975 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, П. А. МКРТЧЯН

О КОЛЕБАНИЯХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В настоящей работе рассматривается ряд задач о магнитоупругих колебаниях проводящей пластинки в поперечном стационарном магнитном поле методом интегральных преобразований.

Задача о бесконечной пластинке решается на основе трехмерных линеаризованных уравнений магнитоупругости. Полученный результат сопоставляется с результатом той же задачи, решаемой с помощью гипотез магнитоупругости [1, 2], которые трехмерные уравнения магнитоупругости приводят к двумерным.

На основе двумерных уравнений магнитоупругости [1, 2] исследуется влияние поперечного магнитного поля на характер упругих колебаний пластин конечных размеров при различных условиях опирания по краям.

Проведен численный анализ и построены графики, характеризующие изменение коэффициента затухания и частоты в зависимости от соотношения между силой Лоренца и упругой силой.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в поперечном стационарном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции $\overline{B}_0 (0, 0, B_{0z})$.

Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице, то есть принимается, что пластинка находится в вакууме.

Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (xy) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений для рассматриваемой задачи получим следующие линеаризованные исходные уравнения и соотношения.

Уравнения магнитоупругости пластинки [2]

$$\operatorname{rot}\vec{h}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{B}_0\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{e}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec{e}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{h}=0 \tag{1.1}$$

где $\vec{h}$ и $\vec{e}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического поля для внутренней области (пространство, занимаемое пластинкой), $\vec{U}$ — вектор перемещения частиц пластинки.

Для рассматриваемой задачи выполняется условие отсутствия электрического заряда [3], следовательно,

$$\operatorname{div}\vec{e}=0 \tag{1.2}$$

Уравнения движения пластинки [2]

$$D\nabla^4 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=Z+\frac{\partial m_x}{\partial x}+\frac{\partial m_y}{\partial y}$$
$$\left(D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right) \tag{1.3}$$

Здесь m_x, m_y, Z — моменты и сила электромагнитного происхождения, которые определяются следующим образом:

$$m_x=\int_{-h}^{h}R_x z\,dz,\quad m_y=\int_{-h}^{h}R_y z\,dz,\quad Z=\int_{-h}^{h}R_z\,dz$$

где

$$\vec{R}(R_x,R_y,R_z)=\frac{\sigma}{c}\left(\vec{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\times\vec{B}_0\right)\times\vec{B}_0$$

Уравнения электродинамики в вакууме [2]

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{e}^{(e)}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\vec{e}^{(e)}=0$$
$$\operatorname{rot}\vec{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0 \tag{1.4}$$

где $\vec{h}^{(e)}$ и $\vec{e}^{(e)}$ — соответственно векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического поля для внешней области (пространство вне пластинки).

Решения уравнений (1.1) и (1.4) должны удовлетворять следующим линеаризованным граничным условиям на колеблющихся поверхностях пластинки [2]

$$
\begin{aligned}
&h_z = \frac{1}{\mu} h_z^{(e)} \qquad e_z = \frac{1}{\varepsilon} e_z^{(e)} \\
&h_x = h_x^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z} \frac{\partial w}{\partial x} \qquad e_x = e_x^{(e)} \quad \text{при } z = \pm h \\
&h_y = h_y^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z} \frac{\partial w}{\partial y} \qquad e_y = e_y^{(e)}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Преобразуем основные уравнения задачи (1.1)—(1.4) и граничные условия (1.5) к удобному виду. Представляя с этой целью векторы напряженности индуцированного электрического и магнитного поля посредством вектор-потенциала $\vec{A}$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{h} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \\
&\vec{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^{(e)}}{\partial t}, \qquad \vec{h}^{(e)} = \operatorname{rot} \vec{A}^{(e)}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

тождественно удовлетворим последним двум уравнениям систем (1.1) (1.4), а из первых уравнений и из (1.3) получим:

во внутренней области

$$
\begin{aligned}
&D\nabla^4 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2h^3 \sigma B_{0z}^2}{3c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w + \frac{\sigma B_{0z}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{h} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) z dz \\
&\Delta \vec{A} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{B}_0
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

во внешней области

$$
\Delta \vec{A}^{(e)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}^{(e)}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A}^{(e)} = 0 \tag{1.8}
$$

При получении (1.7) используется также дополнительное условие

$$
\operatorname{div} \vec{A} = 0 \tag{1.9}
$$

которое следует из условия (1.2).

На основании (1.6) из (1.5) для компонент векторного потенциала получаются следующие граничные условия:

$$A_x = A_x^{(e)}, \quad A_y = A_y^{(e)}, \quad A_z = \frac{1}{\varepsilon} A_z^{(e)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= \mu \left(\frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial y} - \frac{\partial A_y^{(e)}}{\partial z} \right) + (\mu - 1) B_{0z} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= \mu \left(\frac{\partial A_x^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial x} \right) + (\mu - 1) B_{0z} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \qquad \text{при } z = \pm h \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(e)}}{\partial y}$$

Нетрудно заметить, что последнее условие является следствием первого и второго условий. Так как условие (1. 9) выполняется всюду, то оно в дальнейшем используется, как граничное условие на поверхностях пластинки в дополнение к условиям (1.10).

Таким образом, трехмерная задача магнитоупругих колебаний тонкой пластинки свелась к совместному интегрированию системы уравнений (1.7), (1.8), решения которых должны удовлетворять граничным условиям (1.10) и начальным условиям

$$w = w_0 f(x, y), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1 \varphi(x, y) \qquad \text{при } t = 0 \qquad (1.11)$$

2. Применяя относительно уравнений (1.7), (1.8) преобразование Лапласа по переменной t и двумерное экспоненциальное преобразование Фурье по переменным x и y [4], с учетом (1.11), для определения преобразованного векторного потенциала и преобразованного прогиба получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_L^* [\alpha_0^{-2} (\xi^2 + \eta^2)^2 + \sigma_0 (\xi^2 + \eta^2) s + s^2] = w_0 F(\xi, \eta) [s + \sigma_0 (\xi^2 + \eta^2)] +$$

$$+ w_1 \Phi(\xi, \eta) + \frac{i \sigma s B_{0z}}{2 \rho h c^2} \int_{-h}^{h} (\xi A_{Ly}^* - \eta A_{Lx}^*) z dz$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{Lx}^*}{dz^2} - \nu^2 A_{Lx}^* &= - \frac{4 \pi \sigma i \mu \eta z B_{0z}}{c^2} [s w_L^* - w_0 F(\xi, \eta)] \\ \frac{d^2 A_{Ly}^*}{dz^2} - \nu^2 A_{Ly}^* &= \frac{4 \pi \sigma i \mu \xi z B_{0z}}{c^2} [s w_L^* - w_0 F(\xi, \eta)] \end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\frac{d^2 A_{Lz}^*}{dz^2} - \nu^2 A_{Lz}^* = 0, \qquad \frac{d^2 A_{Lx}^{(e)*}}{dz^2} - \nu_1^2 A_{Lx}^{(e)*} = 0$$

$$\frac{d^2 A_{Ly}^{(e)*}}{dz^2} - \nu_1^2 A_{Ly}^{(e)*} = 0, \qquad \frac{d^2 A_{Lz}^{(e)*}}{dz^2} - \nu_1^2 A_{Lz}^{(e)*} = 0$$

где

$$\nu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \frac{4\pi\sigma\mu s}{c^2} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} s^2, \quad \nu_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \frac{s^2}{c^2}, \quad \sigma_0 = \frac{h^2\sigma B_{0z}^2}{3\rho c^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{2\rho h}{D}$$

$$\vec{A}_L^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\xi x + \eta y)]\,dxdy \int_0^{\infty} \vec{A}(x, y, z, t)\exp(-st)\,dt$$

$$w_L^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\xi x + \eta y)]\,dxdy \int_0^{\infty} w(x, y, t)\exp(-st)\,dt$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp[i(\xi x + \eta y)]\,dxdy$$

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\exp[i(\xi x + \eta y)]\,dxdy$$

Соответствующие граничные условия (1.10), вместе с условием (1.9), после преобразований принимают следующий вид:

$$A_{Lx}^* = A_{Lx}^{(e)*}, \quad A_{Ly}^* = A_{Ly}^{(e)*}, \quad A_{Lz}^* = \frac{1}{\varepsilon} A_{Lz}^{(e)*}$$

$$i\eta A_{Lz}^* + \frac{dA_{Ly}^*}{dz} = \mu\left(i\eta A_{Lz}^{(e)*} + \frac{dA_{Ly}^{(e)*}}{dz}\right) + i\xi(\mu - 1)B_{0z}w_L^*$$

$$i\xi A_{Lz}^* + \frac{dA_{Lx}^*}{dz} = \mu\left(\frac{dA_{Lx}^{(e)*}}{dz} + i\xi A_{Lz}^{(e)*}\right) - i\eta(\mu - 1)B_{0z}w_L^* \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

$$\frac{dA_{Lz}^*}{dz} = i\xi A_{Lx}^* + i\eta A_{Ly}^* \tag{2.2}$$

Найдя общее решение системы (2.1), удовлетворяя граничным условиям (2.2) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим постоянные интегрирования и, следовательно, преобразованные векторные потенциалы возмущенного электромагнитного поля и преобразованный прогиб пластинки

$$w_L^* = \frac{sw_0F(\xi, \eta) + w_1\Phi(\xi, \eta) + \sigma_0(\xi^2 + \eta^2)w_0F(\xi, \eta)(1 - \delta)}{s^2 + \sigma_0(\xi^2 + \eta^2)(1 - \delta)s + \alpha_0^{-2}(\xi^2 + \eta^2)^2}$$

$$A_{Lx}^* = \eta[B_1\gamma_1(z)\overline{w}_L^* - \mu_0 w_L^* \operatorname{sh}\nu z]$$

$$A_{Ly}^* = -\xi[B_1\gamma_1(z)\overline{w}_L^* - \mu_0 w_L^* \operatorname{sh}\nu z]$$

$$A_{Lx}^{(e)*} = \eta(B_1\gamma_2\overline{w}_L^* - \mu_0 w_L^* \operatorname{sh}\nu h)\begin{cases} \exp[-\nu_1(z - h)] & \text{при} \quad z > h \\ -\exp[\nu_1(z + h)] & \text{при} \quad z < -h \end{cases} \tag{2.3}$$

$$A_{Ly}^{(e)*} = \xi(B_1\gamma_2\overline{w}_L^* - \mu_0 w_L^* \operatorname{sh}\nu h)\begin{cases} -\exp[-\nu_1(z - h)] & \text{при} \quad z > h \\ \exp[\nu_1(z + h)] & \text{при} \quad z < -h \end{cases}$$

$$A_{Lz}^* = A_{Lz}^{(e)*} = 0$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma_1(z) = z - \frac{(1+\nu_1\mu h)\operatorname{sh}\nu z}{\Delta}, \qquad \gamma_2 = h - \frac{(1+\nu_1\mu h)\operatorname{sh}\nu h}{\Delta}$$

$$B_1 = \frac{4\pi\sigma i\mu B_{0z}}{\nu^2 c^2}, \qquad \mu_0 = \frac{i(\mu-1)B_{0z}}{\Delta}, \qquad \overline{w}_L^* = s w_L^* - w_0 F(\xi, \eta)$$

$$\delta = \frac{4\pi\sigma\mu s}{\nu^2 c^2} - \left(\operatorname{ch}\nu h - \frac{\operatorname{sh}\nu h}{\nu h}\right)\left[\frac{3(\mu-1)}{\nu h^2\Delta} + \frac{12\pi\sigma\mu s(1+\nu_1\mu h)}{\nu^3 h^2 c^2\Delta}\right] \tag{2.4}$$

$$\Delta = \nu\operatorname{ch}\nu h + \nu_1\mu\operatorname{sh}\nu h$$

Для простоты принимается, что $\mu = \varepsilon = 1$. При этом условии выражение для δ из (2.4) принимает вид

$$\delta = \left[1 - \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^2\right]\left[1 - \frac{3(1+\nu_1 h)(\nu h - \operatorname{th}\nu h)}{\nu^2 h^2(\nu h + \nu_1 h\operatorname{th}\nu h)}\right]$$

Нетрудно показать, что для любых значений νh имеет место $|\delta| \ll 1$ и поэтому в выражении (2.4) им можно пренебречь относительно единицы. Используя этот факт и применяя обратное преобразование Лапласа относительно w_L^*, получим

$$w^* = \frac{w_0 F(\xi, \eta)}{\lambda}\{\lambda_1 \exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] - \lambda_2\exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\} +$$

$$+ \frac{w_1\Phi(\xi, \eta)}{(\xi^2+\eta^2)\lambda}\{\exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] - \exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\} \tag{2.5}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \lambda), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\sigma_0 - \lambda), \quad \lambda = \sqrt{\sigma_0^2 - 4\tau_0^{-2}}$$

Из (2.5), согласно формуле обращения для двухмерного экспоненциального преобразования Фурье, следует, что прогиб пластинки выражается следующим образом:

$$w(x, y, t) = \frac{w_0}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)\exp[-i(\xi x + \eta y)]\{\lambda_1\exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] -$$

$$-\lambda_2\exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\}\,d\xi d\eta + \frac{w_1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] -$$

$$-\exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\}\frac{\Phi(\xi, \eta)}{\xi^2+\eta^2}\exp[-i(\xi x + \eta y)]\,d\xi d\eta \tag{2.6}$$

Чтобы применить теорему о свертках, необходимо знать трансформанты Фурье функций

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\lambda_1 \exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] -$$

$$-\lambda_2 \exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\} \exp[-i(\xi x+\eta y)]\, d\xi d\eta$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp[-\lambda_2(\xi^2+\eta^2)t] -$$

$$-\exp[-\lambda_1(\xi^2+\eta^2)t]\}\frac{\exp[-i(\xi x+\eta y)]}{\xi^2+\eta^2}\, d\xi d\eta$$

Обозначая $r^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, а угол между радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ через θ, получим

$$F_1(x, y) = \int_0^{\infty}\rho J_0(r\rho)\,[\lambda_1 \exp(-\lambda_2 t\rho^2) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1 t\rho^2)]\, d\rho$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho} J_0(r\rho)\,[\exp(-\lambda_2 t\rho^2) - \exp(-\lambda_1 t\rho^2)]\, d\rho$$

где $J_0(r\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Имея в виду, что

$$\int_0^{\infty}\rho J_0(r\rho)\exp(-\lambda_0\rho^2)\, d\rho = \frac{1}{2\lambda_0}\exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda_0}\right)$$

после небольших преобразований получим

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2t}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\lambda_2 t}\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\lambda_1 t}\right)\right] \qquad (2.7)$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Fi}\left(-\frac{x^2+y^2}{4\lambda_2 t}\right) - \mathrm{Fi}\left(-\frac{x^2+y^2}{4\lambda_1 t}\right)\right] \qquad (2.8)$$

где $\mathrm{Fi}(\tau)$ — экспоненциальная интегральная функция

$$\mathrm{Fi}(-\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\theta}\frac{d\theta}{\theta}, \qquad 0 < \tau < \infty$$

Используя равенства (2.7), (2.8) и теорему о свертках, из (2.6) окончательно получим

$$w(x, y, t) = \frac{w_0}{4\pi\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\exp\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_2 t}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\exp\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_1 t}\right)\right] f(x-u_1, y-u_2)\, du_1 du_2 +$$

$$+\frac{w_1}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{Fi}\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_2 t}\right)-\mathrm{Fi}\left(-\frac{u_1^2+u_2^2}{4\lambda_1 t}\right)\right]\varphi(x-u_1,\ y-u_2)\,du_1du_2 \tag{2.9}$$

В частности, если

$$f(x,\ y)=\exp[-i(kx+ny)],\quad \varphi(x,\ y)=0$$

то решение (2.9) будет

$$w(x,\ y,\ t)=\frac{w_0}{2\sqrt{\beta^2-1}}\Big\{(\beta+\sqrt{\beta^2-1})\exp[-\omega_0(\beta-\sqrt{\beta^2-1})\,t]-$$

$$-(\beta-\sqrt{\beta^2-1})\exp[-\omega_0(\beta+\sqrt{\beta^2-1})\,t]\Big\}\exp[-i(kx+ny)] \tag{2.10}$$

где $\omega_0=(k^2+n^2)\sqrt{D/(2\rho h)}$ — частота собственных колебаний пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля, а

$$\beta=\frac{h^3\sigma B_{0z}^2/(3c^2)}{\sqrt{2\rho hD}}$$

Из (2.10) следует, что если $\beta<1$, то затухание возмущений имеет колебательный характер с коэффициентом затухания $(k^2+n^2)\,h^2\sigma B_{0z}^2/(6\rho c^2)$. В противном случае возмущения затухают без колебаний.

Отметим, что при решении той же задачи на основе гипотез магнитоупругости, предложенном в работах [1, 2], полученное решение совпадает с (2.9). Таким образом, для данной задачи точность гипотез магнитоупругости характеризуется величиной $|\delta|$, которая, как показано выше, намного меньше единицы.

3. Пусть пластинка — полоса шириной a $(0\leqslant x\leqslant a,\ -\infty<y<\infty)$, находится во внешнем нормальном магнитном поле.

Принимаются гипотезы магнитоупругости, предложенные и обоснованные в работах [1, 2].

На основе этих гипотез искомая задача магнитоупругих колебаний пластинки, которая в данном случае не зависит от компонент индуцированного электромагнитного поля, приводится к интегрированию следующего дифференциального уравнения [5]:

$$D\Delta^4 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{2h^3\sigma B_{0z}^2}{3c^2}\ \frac{\partial}{\partial t}\ w \tag{3.1}$$

с начальными условиями (1.11).

Рассматриваются три случая граничных условий:

а) шарнирно-опертая пластинка

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\quad \text{при}\quad x=0,\ a \tag{3.2}$$

в) заделанная пластинка

$$w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ a \tag{3.3}$$

c) консольная пластинка

$$\begin{gathered} w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{при} \quad x=0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \quad \text{при} \quad x=a \end{gathered} \tag{3.4}$$

Во всех случаях принимается, что форма колебания—цилиндрическая поверхность.

Применяя относительно уравнения (3.1) преобразование Лапласа по переменным x и t [6], с учетом (1.11), получим

$$\begin{gathered} r^4\left[w_L^*(r,\ s)-\frac{1}{r}\,w(0,\ s)-\frac{1}{r^2}\,w'(0,\ s)-\frac{1}{r^3}\,w''(0,\ s)-\frac{1}{r^4}\,w'''(0,\ s)\right]+ \\ +\alpha_0^2 s^2\left[w_L^*(r,\ s)-\frac{w_0}{s}F(r)-\frac{w_1}{s^2}\Phi(r)\right]=\sigma_1 r^2 s\left[w_L^*(r,\ s)-\right. \\ \left.-\frac{1}{r}\,w(0,\ s)-\frac{1}{r^2}\,w'(0,\ s)\right]-r^2 w_0\sigma_1\left[F(r)-\frac{1}{r}f(0)-\frac{1}{r^2}f'(0)\right] \end{gathered} \tag{3.5}$$

где штрих означает производную по переменной x,

$$\sigma_1=\frac{2h^3\sigma B_{0z}^2}{3Dc^2}, \qquad w_L^*(r,\ s)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty w(x,\ t)\exp\left[-(rx+st)\right]dxdt$$

$$F(r)=\int\limits_0^\infty f(x)\exp(-rx)\,dx, \qquad \Phi(r)=\int\limits_0^\infty \varphi(x)\exp(-rx)\,dx$$

Из (3.5) при граничных условиях (3.2) для преобразованного прогиба $w_L^*(r,\ s)$ имеем

$$\begin{gathered} w_L^*(r,\ s)=\delta_0^{-1}\left[(r^2-\sigma_1 s)\,w'(0,\ s)+w'''(0,\ s)+(\alpha_0^2 s-\sigma_1 r^2)\,w_0F(r)+\right. \\ \left.+\alpha_0^2 w_1\Phi(r)+\sigma_1 w_0 f'(0)\right] \end{gathered} \tag{3.6}$$

а при граничных условиях (3.3) и (3.4) —

$$w_L^*(r,\ s)=\delta_0^{-1}\left[rw''(0,\ s)+w'''(0,\ s)+(\alpha_0^2 s-\sigma_1 r^2)\,w_0F(r)+\alpha_0^2 w_1\Phi(r)\right] \tag{3.7}$$

Здесь $\delta_0=r^4-\sigma_1 r^2 s+\alpha_0^2 s^2$.

Применяя обратное преобразование Лапласа по переменной r, из (3.6) получим

$$\begin{gathered} w_L(x,\ s)=\beta_0^{-1}s^{-3/2}\left[sw'(0,\ s)\left[K_1(x,\ s)-\sigma_1 K_{-1}(x,\ s)\right]+\right. \\ \left.+w'''(0,\ s)K_{-1}(x,\ s)\right]+P_1(x,\ s) \end{gathered} \tag{3.8}$$

а из (3.7)

$$w_L(x,\ s)=\beta_0^{-1}s^{-3/2}\left[w''(0,\ s)K'_{-1}(x,\ s)+w'''(0,\ s)K_{-1}(x,\ s)\right]+P(x,\ s) \tag{3.9}$$

где

$$P(x,\ s)=\beta_0^{-1}s^{-3/2}\int_0^x\{sw_0f(\tau)\left[\alpha_0^2K_{-1}(x-\tau,\ s)-\sigma_1K_1(x-\tau,\ s)\right]+$$

$$+\alpha_0^2w_1K_{-1}(x-\tau,\ s)\varphi(\tau)\}\,d\tau$$

$$P_1(x,\ s)=P(x,\ s)+2\alpha_0\beta_0^{-1}s^{-3/2}\beta w_0f'(0)K_{-1}(x,\ s)$$

$$r_1=\sqrt{\alpha_0(\beta+\sqrt{\beta^2-1})},\quad r_2=\sqrt{\alpha_0(\beta-\sqrt{\beta^2-1})},\quad \beta_0=2\alpha_0\sqrt{\beta^2-1}$$

$$K_i(x,\ s)=r_1^i\operatorname{sh}r_1a\sqrt{s}-r_2^i\operatorname{sh}r_2a\sqrt{s},\quad i=-1,1,3.$$

Для определения $w'(0,\ s)$ и $w'''(0,\ s)$, входящих в (3.8), используются условия (3.2) на правой границе пластинки $(x=a)$

$$w'(0,\ s)=s^{-1/2}\left[\delta_1(s)\right]^{-1}\left[K_{-1}(a,\ s)P'_1(a,\ s)-sK_1(a,\ s)P_1(a,\ s)\right]$$

$$w'''(0,\ s)=s^{-1/2}\left[\delta_1(s)\right]^{-1}\{s\left[K_3(a,\ s)-\sigma_1K_1(a,\ s)\right]P_1(a,\ s)-$$

$$-\left[K_1(a,\ s)-\sigma_1K_{-1}(a,\ s)\right]P'_1(a,\ s)\}$$

$$\delta_1(s)=\alpha_0^{-1}\beta_0\operatorname{sh}r_1a\sqrt{s}\operatorname{sh}r_2a\sqrt{s} \tag{3.10}$$

Аналогично определяются $w''(0,\ s)$ и $w'''(0,\ s)$ из (3.9), если использовать условия (3.3) и (3.4) на правой границе пластинки. При этом для заделанной пластинки получим

$$w''(0,\ s)=\frac{\beta_0sQ_0(s)}{\Delta_0(s)},\qquad w'''(0,\ s)=\frac{\beta_0sQ_1(s)}{\Delta_0(s)} \tag{3.11}$$

а для консольной пластинки

$$w''(0,\ s)=\frac{\beta_0sQ_2(s)}{\Delta_1(s)},\qquad w'''(0,\ s)=\frac{\beta_0sQ_3(s)}{\Delta_1(s)} \tag{3.12}$$

где

$$Q_0(s)=s^{-1/2}\left[K_{-1}(a,\ s)P'(a,\ s)-K'_{-1}(a,\ s)P(a,\ s)\right]$$

$$Q_1(s)=s^{-1/2}\left[sK_1(a,\ s)P(a,\ s)-K'_{-1}(a,\ s)P'(a,\ s)\right]$$

$$Q_2(s)=\alpha_0^{-2}s^{-3/2}\left[K_1(a,\ s)P'''(a,\ s)-K'_1(a,\ s)P''(a,\ s)\right]$$

$$Q_3(s)=\alpha_0^{-3}s^{-3/2}\left[sK_3(a,\ s)P''(a,\ s)-K'_1(a,\ s)P'''(a,\ s)\right]$$

$$\Delta_0(s)=2-(1-\beta)\operatorname{ch}(r_1+r_2)a\sqrt{s}-(1+\beta)\operatorname{ch}(r_1-r_2)a\sqrt{s}$$

$$\Delta_1(s)=\Delta_0(s)+4(\beta^2-1)$$

Подставляя выражения (3.10) в (3.8), а (3.11) и (3.12) в (3.9), после некоторых преобразований имеем:

для шарнирно-опертой пластинки

$$w_L(x, s) = \beta_0^{-1}\int_0^a \left\{\left[\left(\sigma_1 r_1 - \frac{\alpha_0^2}{r_1}\right) G(r_1, x, s, \tau) + \right.\right.$$

$$+ \left(\frac{\alpha_0^2}{r_2} - \sigma_2 r_2\right) G(r_2, x, s, \tau)\Big] w_0 f(\tau) +$$

$$\left. + \alpha_0^2 [G(r_2, x, s, \tau) - G(r_1, x, s, \tau)]\, w_1 \varphi(\tau)\right\} d\tau + P(x, s) \quad (3.13)$$

для заделанной пластинки

$$w_L(x, s) = \frac{R_0(x, s)}{\Delta_0(s)} + P(x, s) \quad (3.14)$$

для консольной пластинки

$$w_L(x, s) = \frac{R_1(x, s)}{\Delta_1(s)} + P(x, s) \quad (3.15)$$

где

$$R_0(x, s) = s^{-1/2}[K_{-1}'(x, s)\, Q_0(s) + K_{-1}(x, s)\, Q_1(s)]$$

$$R_1(x, s) = s^{-1/2}[K_{-1}'(x, s)\, Q_2(s) + K_{-1}(x, s)\, Q_3(s)]$$

$$G(r_i, x, s, \tau) = \frac{\operatorname{sh} r_i x\sqrt{s}\, \operatorname{sh} r_i (a-\tau)\sqrt{s}}{r_i\sqrt{s}\, \operatorname{sh} r_i a\sqrt{s}}, \quad i = 1, 2$$

Применяя к выражению (3.13) обратное преобразование Лапласа по переменной s, окончательно получим решение задачи для шарнирно-опертой пластинки

$$w(x, t) = \frac{w_0}{a\sqrt{\beta^2-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{a} x \left\{(\beta + \sqrt{\beta^2-1}) \exp[-\omega_k(\beta - \sqrt{\beta^2-1})t] - \right.$$

$$\left. - (\beta - \sqrt{\beta^2-1}) \exp[-\omega_k(\beta + \sqrt{\beta^2-1})t]\right\} \int_0^a \sin\frac{k\pi}{a}\tau f(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{a\alpha_0 w_1}{\pi^2\sqrt{\beta^2-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\frac{k\pi}{a} x \left\{\exp[-\omega_k(\beta - \sqrt{\beta^2-1})t] - \right.$$

$$\left. - \exp[-\omega_k(\beta + \sqrt{\beta^2-1})t]\right\} \int_0^a \sin\frac{k\pi}{a}\tau \varphi(\tau)\, d\tau \quad (3.16)$$

и

$$w(x, t) = \frac{2w_0}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \omega_k t) \sin \frac{k\pi}{a} x \exp(-\omega_k t) \int_0^a \sin \frac{k\pi}{a} \tau f(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{2w_1 t}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{a} x \exp(-\omega_k t) \int_0^a \sin \frac{k\pi}{a} \tau \varphi(\tau) d\tau \quad \text{при} \quad \beta = 1 \qquad (3.17)$$

где $\omega_k = k^2\pi^2 a^{-2} \sqrt{D/(2\rho h)}$ — частота собственных колебаний шарнирно-опертой пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля.

При получении (3.16) и (3.17) было учтено, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} P(x, s) \exp(st) \, ds = 0 \qquad (3.18)$$

В частности, если начальные условия имеют вид

$$f(x) = 0, \quad \varphi(x) = \delta(x - x')$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, то из (3.16) и (3.17) получаются

$$w(x, t) = \frac{a\alpha_0 w_1}{\pi^2 \sqrt{\beta^2 - 1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} x' \Big\{ \exp[-\omega_k(\beta - \sqrt{\beta^2 - 1})t] -$$

$$- \exp[-\omega_k(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})t] \Big\}$$

и

$$w(x, t) = \frac{2w_1 t}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{a} x' \exp(-\omega_k t) \quad \text{при} \quad \beta = 1$$

Обратимся к случаям заделанной и консольной пластинки. В этих случаях прогиб пластинки определяется из (3.14) и (3.15) с применением обратного преобразования Лапласа по переменной s. Тогда с учетом (3.18) имеем:

для заделанной пластинки

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{R_0(x, s)}{\Delta_0(s)} \exp(st) \, ds$$

и

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{R_2(x, s)}{\Delta_2(s)} \exp(st) \, ds \quad \text{при} \quad \beta = 1 \qquad (3.19)$$

для консольной пластинки

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{R_1(x, s)}{\Delta_1(s)} \exp(st) \, ds$$

и

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{R_3(x, s)}{\Delta_3(s)} \exp(st)\, ds \quad \text{при} \quad \beta = 1 \tag{3.20}$$

где

$$R_2(x, s) = l_0(x, s) \{ l_1(a, s) [P'(a, s)]_{\beta=1} - l_1'(a, s) [P(a, s)]_{\beta=1} \} +$$
$$+ l_1(x, s) \{ l_0'(a, s) [P(a, s)]_{\beta=1} - l_0(a, s) [P'(a, s)]_{\beta=1} \}$$

$$R_3(x, s) = (s\alpha_0)^{-1} l_0(x, s) \{ l_0'(a, s) [P'''(a, s)]_{\beta=1} - l_0'(a, s) [P''(a, s)]_{\beta=1} \} +$$
$$+ (s\alpha_0)^{-2} l_1(x, s) \{ l_0'''(a, s) [P''(a, s)]_{\beta=1} - l_0''(a, s) [P'''(a, s)]_{\beta=1} \}$$

$$l_0(x, s) = x \operatorname{sh} r_0 x \sqrt{s}, \quad l_1(x, s) = r_0 x \sqrt{s} \operatorname{ch} r_0 x \sqrt{s} - \operatorname{sh} r_0 x \sqrt{s}$$

$$r_0 = \sqrt{\alpha_0}, \quad \Delta_2(s) = a^2 r_0^2 s - \operatorname{sh}^2 r_0 a \sqrt{s}, \quad \Delta_3(s) = 4 - a^2 r_0^2 s - \operatorname{sh}^2 r_0 a \sqrt{s}$$

Отсюда, используя основную теорему вычетов, найдем выражения, определяющие прогиб пластинки. В результате получим:

для заделанной пластинки

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0(x, s_k)}{\Delta_0'(s_k)} \exp(s_k t) \quad \text{и} \quad w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_2(x, s_k)}{\Delta_2'(s_k)} \exp(s_k t)$$
$$\text{при} \quad \beta = 1 \tag{3.21}$$

для консольной пластинки

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_1(x, s_n)}{\Delta_1'(s_n)} \exp(s_n t) \quad \text{и} \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_3(x, s_n)}{\Delta_3'(s_n)} \exp(s_n t)$$
$$\text{при} \quad \beta = 1 \tag{3.22}$$

где s_k и s_n — соответственно корни следующих трансцендентных уравнений:

$$\Delta_0(s) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_2(s) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 1 \tag{3.23}$$

$$\Delta_1(s) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_3(s) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 1 \tag{3.24}$$

4. Приведем численный анализ зависимости характеристик колебаний (частоты колебаний и коэффициента затухания) от напряженности магнитного поля и проводимости материала пластинки. С этой целью введем безразмерную переменную $\Omega = s/\Omega_0$, где $\Omega_0 = 9\pi^2 (2a)^{-2} \sqrt{D/(2\rho h)}$ — частота собственных колебаний заделанной пластинки в вакууме при отсутствии магнитного поля. Полагая

$$3\pi \sqrt{\Omega} = \sqrt{2} (\lambda_0 + i\varkappa_0)$$

для определения λ_0 и $\varkappa_0$ из (3.23) получим систему уравнений*

* Для второй ветви получается та же система уравнений.

$$\begin{cases} (1-\beta)\,\mathrm{ch}\sqrt{1+\beta}\lambda_0 \cos\sqrt{1+\beta}\varkappa_0 + (1+\beta)\cos\sqrt{1-\beta}\lambda_0\,\mathrm{ch}\sqrt{1-\beta}\varkappa_0 = 2 \\ (1-\beta)\,\mathrm{sh}\sqrt{1+\beta}\lambda_0 \sin\sqrt{1+\beta}\varkappa_0 - (1+\beta)\sin\sqrt{1-\beta}\lambda_0\,\mathrm{sh}\sqrt{1-\beta}\varkappa_0 = 0 \end{cases} \quad \text{при } 0 \leqslant \beta < 1$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varkappa_0}{\sqrt{2}} = \pm\lambda_0 \\ \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varkappa_0}{\sqrt{2}} = \pm\varkappa_0 \end{aligned}\right. \quad \text{при } \beta = 1$$

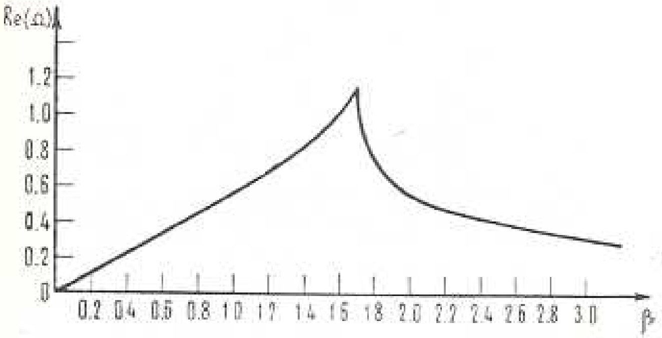
$$\begin{cases} (1-\beta)\,\mathrm{ch}\sqrt{1+\beta}\lambda_0 \cos\sqrt{1+\beta}\varkappa_0 + (1+\beta)\,\mathrm{ch}\sqrt{\beta-1}\lambda_0 \cos\sqrt{\beta-1}\varkappa_0 = 2 \\ (1-\beta)\,\mathrm{sh}\sqrt{1+\beta}\lambda_0 \sin\sqrt{1+\beta}\varkappa_0 + (1+\beta)\,\mathrm{sh}\sqrt{\beta-1}\lambda_0 \sin\sqrt{\beta-1}\varkappa_0 = 0 \end{cases} \quad \text{при } \beta > 1$$

Результаты численных расчетов корней λ_0 и $\varkappa_0$, полученные при помощи ЭЦВМ, в зависимости от параметра β, характеризующего отношение силы Лоренца к упругой силе, приведены в табл. 1.

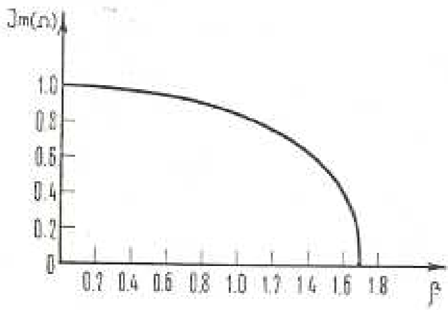
Таблица 1

β	λ_0	$\varkappa_0$	Re Ω	Im Ω
0	4.73	4.73	0	1
0.2	4.469	4.987	0.11	0.993
0.4	4.179	5.226	0.221	0.984
0.6	3.876	5.471	0.335	0.955
0.8	3.549	5.714	0.451	0.913
1	3.14	5.935	0.57	0.832
1.2	2.755	6.215	0.698	0.757
1.4	2.215	6.509	0.843	0.638
1.6	1.335	6.97	1.054	0.414
1.7	0	7.312	1.176	0
1.8	0	5.742	0.75	0
2	0	5.108	0.558	0
2.2	0	4.702	0.498	0
2.4	0	4.404	0.437	0
2.6	0	4.167	0.391	0
2.8	0	3.971	0.355	0
3	0	3.805	0.326	0
4	0	3.221	0.234	0

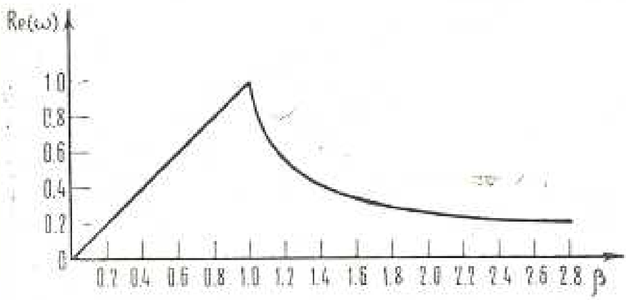
На фиг. 1—2 представлены графики зависимости коэффициента затухания (Re Ω) и частоты колебаний (Im Ω) от параметра β. Из фиг. 1 видно, что при возрастании параметра β коэффициент затухания вначале увеличивается, достигая максимума для определенного значения β, после чего начинает уменьшаться. Кривая на фиг. 2 показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля или с увеличением проводимости материала пластинки частота колебаний уменьшается и достигает значения нуль для $\beta = 1.7$. Таким образом, при $\beta < 1.7$ затухание возмущений имеет колебательный характер. В противном случае возмущения затухают без колебаний.



Фиг. 1.

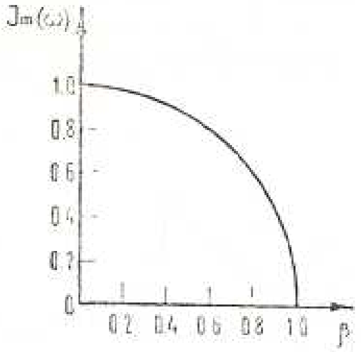


Фиг. 2.



Фиг. 3.

В случае шарнирно-опертой пластинки численные исследования решений (3.16) и (3.17) относительно $\mathrm{Re}\,\omega$ и $\mathrm{Im}\,\omega$ в зависимости от параметра β показаны на фиг. 3—4. В отличие от случая заделанной пластинки в этом случае колебательный характер имеет место до



Фиг. 4.

$\beta<1$ с коэффициентом затухания $(k\pi h)^2 a^{-2}\sigma B_{0z}^2/(6\rho c^2)$, после чего происходит затухание возмущений без колебания.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 22 III 1974

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Պ. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է լայնական ստացիոնար մագնիսական դաշտում գտնվող սալերի մագնիսաառաձգական տատանումների վերաբերյալ մի շարք խնդիրներ ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով։

Անվերջ չափեր ունեցող սալի խնդիրը լուծվում է մագնիսաառաձգականության եռաչափ գծայնացված հավասարումների հիման վրա։ Ստացված լուծումը համեմատվում է նույն խնդրի լուծման հետ, որն ստացվում է մագնիսաառաձգականության հիպոթեզների օգնությամբ։ Ցույց է տրվում, որ տված խնդրի լուծման համար մագնիսաառաձգականության հիպոթեզների ճշտությունը բնութագրվում է $|\delta|$ մեծությամբ, որը շատ փոքր է մեկից։

Մագնիսաառաձգականության երկչափ հավասարումների հիման վրա, հետազոտվում է լայնական մագնիսական դաշտի ազդեցությունը վերջավոր չափեր ունեցող սալերի առաձգական տատանումների բնույթի վրա տարբեր եզրային պայմանների դեպքում։

Կատարված է թվային անալիզ և կառուցված են գրաֆիկներ, որոնք բնութագրում են մարման գործակցի և հաճախականության փոփոխությունը կախված էլեկտրամագնիսական ծագում ունեցող ուժի և առաձգական ուժի հարաբերությունից։

ON VIBRATION OF CONDUCTING PLATES IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem on magnetoelastic vibration of conducting plates in a transverse stationary magnetic field is considered by the method of integral transformations.

The problem on an infinite plate is solved in terms of three-dimensional linear equations of magnetoelasticity. The results obtained are compared with those for the similar problem being solved by means of the magnetoelastic hypothesis and the precicion of the latter for the problem under examination is shown to be characterized by the value $|\delta|$ which is much less than unity.

The influence of a transverse magnetic field on the mode of elastic vibration of a finite plate under various conditions of support at ends is investigated through two-dimensional equations of magnetoelasticity.

A numerical analysis as well as graphs characterizing variation in the damping factor and frequency, depending upon the relation between Lorenz's and elastic forces are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, в. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. *Белубекян М. В.* Условия отсутствия электрического заряда в задачах электромагнитоупругости. Докл. АН Арм.ССР, т. VI, № 5, 1973.
4. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.
5. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТТ, 1974, № 2.
6. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехтеориздат, М.-Л., 1950.