ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, №6, 1974 Механика

А. Г. ПЕТРОСЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АСИММЕТРИЧЕСКОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Изучаются основные уравнения асимметрической магнитной гидродинамики: строятся уравнения движения сплошной электропроводящей жидкости с большой или бесконечной электропроводностью. При этом учитывается наличие в жидкости моментных напряжений, несимметричность тензора напряжения и инерция частиц жидкости при вращении. Рассматривается общий случай равномерного течения в трубе. Приводится решение задачи плоскопараллельного установившегося ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью и постоянной электропроводностью между двумя прямыми параллельными изолированными стенками в однородном поперечном магнитном поле.

§ 1. Уравнения асимметрической магнитной гидродинамики

Рассмотрим материальный изотропный электропроводящий континуум в магнитном поле, для которого основные законы механики с учетом электромагнитных сил в интегральной форме имеют вид [1, 2]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int_V \rho v\, dV = \int_S t_n\, dS + \int_V \rho f\, dV + \int_V f_{эм}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V (r \times v + J\omega)\rho\, dV = \int_S (r \times t_n + m_n)\, dS + \int_V (r \times f + c)\rho\, dV +$$

$$+ \int_V (r \times f_{эм})\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{J\omega^2}{2}\right)\rho\, dV = \int_S (t_n \cdot v + m_n \cdot \omega)\, dS -$$

$$- \int_V \nabla \cdot q\, dV + \int_V (f \cdot v + c \cdot \omega)\rho\, dV + \int_V A\, dV \tag{1.1}$$

Здесь $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени, ρ — массовая плотность, r — радиус-вектор точки континуума, ∇ — пространственный градиент, $v = dr/dt$ — вектор скорости точки, ω — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума, q — вектор теплового потока, u — внутренняя удельная энергия, J — среднее значение момента инерции единицы массы в точке структурного континуума [1, 3], A — приток энергии к единице объема со стороны электромагнитного поля. Соотношения (1.1) имеют место для материального континуума, если предположить, что в каждой точке произвольного материального объема V приложен вектор внешней массовой силы f, внешняя объемная сила воздействия электромагнитного поля с плотностью $f_{эм}$, вектор внешнего массового момента c, в каждой точке поверхности S объема V приложен вектор силового напряжения t_n и вектор моментного напряжения m_n. Уравнение изменения энергии (1.1) написано в предположении, что вектор моментного напряжения m_n и вектор c производят работу только на перемещениях внутреннего вращения [1, 4].

Плотность электромагнитной силы равна [2]

$$f_{эм} = \rho_e E + j \times B \tag{1.2}$$

где E — вектор напряженности электрического поля, B — вектор магнитной индукции, ρ_e — плотность заряда, j — плотность тока.

Приток энергии за счет внешнего электромагнитного поля будет [2]

$$A = j \cdot E \tag{1.3}$$

Воспользуемся соотношениями, связывающими диаду силовых напряжений τ и диаду моментных напряжений μ соответственно с вектором силовых напряжений t_n и вектором моментных напряжений m_n [5]

$$t_n = n \cdot \tau, \quad m_n = n \cdot \mu \tag{1.4}$$

Здесь n — внешняя нормаль к поверхности S.

Принимая во внимание известные формулы диадного исчисления [6, 7] и (1.4), из (1.1) получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0, \qquad \rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \tau + \rho f + f_{эм}$$

$$\Delta \cdot \mu + \rho c + \tau \overset{\times}{\cdot} I = \rho J \frac{d\omega}{dt}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \tau : \nabla v - (\tau \overset{\times}{\cdot} I) \cdot \omega + \mu : \nabla \omega - \nabla \cdot q + A - f_{эм} \cdot v \tag{1.5}$$

Здесь операция ($\overset{\times}{\cdot}$) означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно, операция (:) показывает, что левые и правые множители диад перемножаются скалярно [6], I — единичная пространственная диада.

Всюду в дальнейшем будем считать среду двухпараметрической, то есть считать, что все термодинамические величины (например, температура T и внутренняя энергия u) и вообще все величины, характеризующие среду при термодинамическом равновесии, являются функциями двух параметров: плотности и давления.

Отметим, что в то время, как первое и второе уравнения системы (1.5) хорошо известны из классической теории магнитной гидродинамики, последние два уравнения этой системы являются новыми. Эти уравнения приводятся к классическим результатам

$$\tau = \tau_c^{*}$$

$$\rho\frac{du}{dt} = \tau : \nabla v - \nabla\cdot q + A - f_{эм}\cdot v \tag{1.6}$$

если

$$\mu = c = \omega = 0$$

Разделим диаду силовых напряжений τ на симметричную τ^d и антисимметричную τ^a части

$$\tau = \tau^d + \tau^a$$

Антисимметричной частью τ является [6]

$$\tau^a = -\frac{1}{2} I \times (\tau \times I)$$

Следовательно, из (1.5) получаем, что

$$\tau^a = \frac{1}{2} I \times \left(\nabla\cdot\mu + \rho c - \rho J\frac{d\omega}{dt}\right) \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что несимметричность диады напряжений τ обусловлена наличием моментных напряжений, массовыми моментами, а также внутренним вращением частиц.

При $J = 0$ несимметричность диады напряжений обусловлена наличием моментных напряжений и массовыми моментами [6].

Отсюда и происходит название теории — теория асимметрической гидродинамики (в частности, асимметрической магнитной гидродинамики). В классической теории $\mu = c = 0$, поэтому диада напряжений τ симметрична.

Таким образом, асимметрическая гидродинамика (магнитная) отличается от обычной — классической гидродинамики (магнитной) уточнением напряженного состояния, которое характеризуется асимметрической диадой силовых напряжений τ и моментных напряжений μ.

Представим диады τ, ∇v, $\nabla\omega$, μ в форме

$$\tau = (\pi_0 - p) I + \pi^a + \pi^d, \qquad \tau = -pI + \pi$$

$$\mu = \mu_0 I + \mu^a + \mu^d, \qquad \nabla v = \frac{1}{3}\nabla\cdot v I + (\nabla v)^a + (\nabla v)^d$$

---

* Здесь индексом c обозначена сопряженная диада.

$$\nabla\omega = \frac{1}{3}\nabla\cdot\omega I + (\nabla\omega)^a + (\nabla\omega)^d$$

$$\pi_0 = \frac{1}{3}\pi : I, \qquad \mu_0 = \frac{1}{3}\mu : I \tag{1.8}$$

Здесь p — равновесное давление, π_0 и μ_0 соответственно 1/3 следа диады π и μ, индексом a отмечены антисимметричные диады с нулевым следом, индексом d — симметричные диады с нулевым следом.

Воспользуемся следующими линейными связями [7]:

$$\pi_0 = \eta_0\nabla\cdot v, \qquad P^a = \eta_r(\nabla\times v - 2\omega)$$

$$\pi^d = 2\eta(\nabla v)^d, \qquad \mu_0 = c_0\nabla\cdot\omega$$

$$\mu^a = -\beta I\times\nabla T - 2c_a'(\nabla\omega)^a, \qquad \mu^d = 2c_d'(\nabla\omega)^d$$

$$q = -\varkappa\nabla T + \beta T\nabla\times\omega \tag{1.9}$$

Заметим, что при выводах были произведены замены диады π^a на эквивалентный ей псевдовектор $P^a = \dfrac{1}{2}\pi\times I$ и диады $(\nabla v)^a$ — на псевдовектор $\dfrac{1}{2}\nabla\times v$ [7].

Феноменологические коэффициенты в этих уравнениях суть теплопроводность $\varkappa$, объемная вязкость η_0, динамическая ньютоновская вязкость η, динамическая вращательная вязкость η_r, динамические моментные вязкости c_0', c_d', c_a'.

Величины η_0, η, η_r, c_0', c_d', c_a', β — положительные скаляры, характеризующие изотропные свойства среды [3, 7].

Из (1.9) видно, что несимметричность диады моментных напряжений обусловлена как несимметричностью диады $\nabla\omega$, так и градиентом температуры. Наличие $\nabla\times\omega$ приводит к возникновению теплового потока.

Используя (1.2), (1.8) и (1.9), из (1.5) находим, что

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \nabla(\eta_0\nabla\cdot v) + 2\nabla\cdot[\eta(\nabla v)^d] +$$

$$+\nabla\times[\eta_r(2\omega - \nabla\times v)] + \rho f + \rho_e E + j\times B$$

$$\rho J\frac{d\omega}{dt} = \nabla(c_0'\nabla\cdot\omega) + 2\nabla\cdot[c_d'(\nabla\omega)^d] + 2\eta_r(\nabla\times v - 2\omega) + \rho l +$$

$$+2\nabla[c_a'(\nabla\omega)^a] - \nabla\cdot(\beta I\times\nabla T) \tag{1.10}$$

Электрические величины, фигурирующие в уравнении (1.10), как известно, зависят от распределения в пространстве электромагнитного поля, которое удовлетворяет системе уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме записываются в виде [2, 8]

$$\nabla \times H = j$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{1.11}$$

Здесь H — вектор напряженности магнитного поля. Можно принять, что относительные диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость близки к единице $\varepsilon \approx \mu \approx 1$ и что электрическая проводимость жидкости σ постоянна и изотропна.

Вектор магнитной индукции B определяется соотношением

$$B = \mu_e H \tag{1.12}$$

где μ_e — магнитная постоянная.

Обычно можно полагать, что для изотропного вещества величина μ_e является постоянной.

В качестве уравнения, связывающего плотность тока с другими параметрами и замыкающего вместе с (1.12) систему уравнений электродинамики, воспользуемся обобщенным законом Ома (без учета эффекта Холла) для движущихся сред в форме [2, 8]

$$j = \sigma [E + v \times B] \tag{1.13}$$

Кроме того, надо иметь в виду закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot j = 0 \tag{1.14}$$

что легко получить из уравнений Максвелла (1.11) в рассматриваемом приближении.

В задачах магнитной гидродинамики обычно пренебрегают эффектами, связанными с влиянием электрической силы $\rho_e E$ на течение [2].

Для несжимаемой жидкости уравнения движения асимметрической магнитной гидродинамики запишутся в следующем виде:

$$\nabla \cdot v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + (v \cdot \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\nu \nabla \cdot (\nabla v)^d + \nu_r \nabla \times (2\omega - \nabla \times v) + \frac{1}{\rho} j \times B$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = 2\nu_r (\nabla \times v - 2\omega) + c_0 \nabla (\nabla \cdot \omega) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla \omega)^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla \omega)^a \tag{1.15}$$

Здесь ν — кинематическая ньютоновская вязкость, ν_r — кинематическая вращательная вязкость, c_0, c_d, c_a — коэффициенты моментной вязкости.

§ 2. Уравнение равномерного установившегося движения в трубе

Рассмотрим общий случай равномерного течения в трубе.

Приведем уравнения (1.11), (1.13), (1.15) к безразмерному виду. В качестве характерной длины возьмем L, характерной скорости — V_0 и угловой скорости — V_0/L, а для индукции магнитного поля — B_0. Тогда для плотности электрического тока, исходя из (1.11), с учетом (1.12), получаем характерную величину $B_0/\mu_e L$. Характерную величину напряженности электрического поля при отсутствии внешних источников тока получим из (1.13) в виде $V_0 B_0$. В качестве масштабов времени и давления примем соответственно L/V_0 и ρV_0^2.

Уравнения (1.11), (1.13), (1.15) с учетом (1.12) в безразмерном виде запишутся так*:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)\, v = -\nabla p + \frac{2}{R}\nabla\cdot(\nabla v)^d + \frac{1}{R_r}\nabla\times[2\omega - \nabla\times v] + Al^2(j\times B) \tag{2.1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2E_E}{R_r}(\nabla\times v - 2\omega) + \frac{E_E}{R_0}\nabla(\nabla\cdot\omega) + \frac{2E_E}{R_d}\nabla\cdot(\nabla\omega)^d + \frac{2E_E}{R_a}\nabla\cdot(\nabla\omega)^a \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot v = 0, \qquad \nabla\cdot B = 0, \qquad \nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \nabla\times B = j$$

$$j = R_2 (E + v\times B) \tag{2.3}$$

Здесь

$$R = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad R_r = \frac{V_0 L}{\nu_r}, \quad Al = \frac{B_0}{V_0\sqrt{\mu_e \rho}}$$

$$E_E = \frac{L^2}{J}, \qquad R_0 = \frac{V_0 L^2}{c_0}, \qquad R_d = \frac{V_0 L^2}{c_d}$$

$$R_a = \frac{V_0 L^2}{c_a}, \qquad R_2 = \sigma\mu_e V_0 L = \frac{V_0 L}{\nu_H} \tag{2.4}$$

где $\nu_H = \dfrac{1}{\sigma\mu_e}$ — коэффициент магнитной вязкости (диффузии).

Из уравнений (2.3) легко получить уравнение индукции

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) + \frac{1}{R_2}\nabla^2 B \tag{2.5}$$

Выражение для безразмерной лоренцовой силы, с учетом (2.3), можно записать так:

$$Al^2(j\times B) = Al^2 R_2 (E + v\times B)\times B \tag{2.6}$$

* Обозначения для безразмерных величин сохраним те же, что и для размерных.

Отсюда следует, что порядок величины лоренцовой силы оценивается произведением $Al^2 \cdot R_\sigma$, а это равно числу Стюарта $N = \dfrac{\sigma B_0^2 L}{\rho V_0}$.

В стационарных задачах уравнение (2.3) позволяет ввести скалярный электрический потенциал φ равенством

$$E = -\nabla\varphi$$

Потенциал электрического поля φ можно получить из (2.3), если учесть условие сохранения заряда (1.14). Тогда

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot [v \times B] \tag{2.7}$$

Будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток — направленным вдоль оси трубы, так что из трех компонент скорости (u, v, w) остается лишь одна u, а остальные два равны нулю.

Если учесть одномерность течения и равенство (2.6), то уравнения движения (2.1) и (2.2) и уравнение для потенциала (2.7) в рассматриваемой задаче принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_r}\right)\nabla^2 u + \frac{2}{R_r}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y} - \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right) + \\
+ N\left[b_y \frac{\partial\varphi}{\partial z} - b_z \frac{\partial\varphi}{\partial y} - u\left(b_y^2 + b_z^2\right)\right] \\
\frac{\partial p}{\partial y} = N\left[b_z \frac{\partial\varphi}{\partial x} - b_x \frac{\partial\varphi}{\partial z} + u b_y b_z\right] \\
\frac{\partial p}{\partial z} = N\left[b_x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - b_y \frac{\partial\varphi}{\partial x} + u b_z b_x\right]
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
\frac{2}{R_r}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega_y\right) + \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial y} - \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) + \frac{2}{R_d}\left(\frac{\partial^2\omega_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_y}{\partial z^2} + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y \partial z}\right) + \frac{1}{R_a}\left(\frac{\partial^2\omega_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\omega_z}{\partial y \partial z}\right) = 0 \\
-\frac{2}{R_r}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega_z\right) + \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right) + \\
+ \frac{2}{R_d}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2\omega_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{R_a}\left(\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\omega_y}{\partial y \partial z}\right) = 0
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial u b_y}{\partial z} - \frac{\partial u b_z}{\partial y} \tag{2.10}$$

Из (2.3) получаем, что

$$\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} = -R_\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial z} = -R_\sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - u b_z\right)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} = R_\sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - u b_y\right) \qquad (2.11)$$

и

$$\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0 \qquad (2.12)$$

Как следует из (2.3), величина $R_\sigma \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ равна составляющей плотности электрического тока по направлению оси x, то есть

$$j_x = -R_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Она не зависит от движения. Следовательно, j_x — плотность тока, подводимого извне и должна быть задана. Отсюда вытекает, что b_y и b_z определяются из первого уравнения (2.11) и (2.12) и граничных условий задачи независимо от движения. Зависящий от движения компонент индукции магнитного поля b_x может быть найден из (2.11) после определения поля скоростей. Поле скоростей и потенциалов может быть найдено из (2.8), (2.9), (2.10) независимо от магнитного числа Рейнольдса R_σ.

§ 3. Равномерное плоскопараллельное течение в поперечном магнитном поле

Отыскание точных решений уравнений асимметрической магнитной гидродинамики наталкивается в общем случае на непреодолимые математические трудности. Тем не менее в некоторых частных случаях все же можно найти точные решения уравнений асимметрической магнитной гидродинамики.

Особенно простой класс точных решений представляют так называемые *слоистые течения*, для которых характерно, что как скорости точек, так и средняя скорость вращения частиц имеют лишь одну составляющую.

В качестве простого примера применения изложенных выше положений рассмотрим плоскопараллельное установившееся ламинарное течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью и постоянной электропроводностью между двумя прямыми параллельными изолированными стенками в однородно-поперечном магнитном поле.

Пусть плоскости стенок расположены при значениях координат $y = \pm b$, скорость u направлена по оси x, а приложенное магнитное поле имеет постоянную индукцию B_0, которая направлена по оси y.

Поскольку в плоскопараллельном установившемся движении все производные по z тождественно равны нулю, кроме $\partial\varphi/\partial z = \mathrm{const}$, то системы уравнений (2.8) и (2.9) в размерном виде запишутся так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = (\nu + \nu_r)\frac{d^2 u}{dy^2} + 2\nu_r \frac{d\omega}{dy} + \frac{\sigma}{\rho}(B_y E_z - B_y^2 u) \qquad (3.1)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{c_a + c_d}{2\nu_r}\frac{d^2\omega}{dy^2} - 2\omega \tag{3.2}$$

Здесь

$$\omega = \omega_z, \; B_y = B_0$$

Уравнение (2.10) дает

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{const} = E_z \tag{3.3}$$

Решение системы (3.1) и (3.2), как уже указывалось, не зависит от наведенного магнитного поля B_x.

Система дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2) решается методом исключения.

Общее решение есть

$$u = \frac{c_a + c_d}{2\nu_r}\Big(C_1 k_1^* e^{k_1^* y} + C_2 k_2^* e^{k_2^* y} - C_3 k_1^* e^{-k_1^* y} -$$

$$- C_4 k_2^* e^{-k_2^* y}\Big) - 2C_1\frac{1}{k_1^*}e^{k_1^* y} - 2C_2\frac{1}{k_2^*}e^{k_2^* y} +$$

$$+ 2C_3\frac{1}{k_1^*}e^{-k_1^* y} + 2C_4\frac{1}{k_2^*}e^{-k_2^* y} + C_5$$

$$\omega = C_1 e^{k_1^* y} + C_2 e^{k_2^* y} + C_3 e^{-k_1^* y} + C_4 e^{-k_2^* y} \tag{3.4}$$

где

$$k_1^* = \left[\frac{1}{2}a_1\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}}\right)\right]^{1/2}, \qquad k_2^* = \left[\frac{1}{2}a_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a_2}{a_1^2}}\right)\right]^{1/2}$$

$$a_1 = \frac{4\nu}{\nu + \nu_r}\frac{\nu_r}{c_a + c_d}\frac{H_a^2}{b^2(1 + \nu_r/\nu)} = \frac{1}{b^2}\left(l^2 + \frac{H_a^2}{1 + \nu_r/\nu}\right)$$

$$a_2 = \frac{4\nu}{\nu + \nu_r}\frac{\nu_r}{c_a + c_d}\frac{H_a^2}{b^2} = l^2\frac{H_a^2}{b^4}$$

$$l = \left(\frac{4\nu}{\nu + \nu_r}\frac{\nu_r}{c_a + c_d}\right)^{1/2} b \; * \tag{3.5}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий, H_a — число Гартмана:

$$H_a = B_0 b\left(\frac{\sigma}{\rho\nu}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

* Рассматривается случай, когда $a_1^2 > 4a_2$.

Мы предполагаем, что жидкость прилипает к границе при $y=\pm b$, тогда граничные условия для скорости и вращения частиц будут

$$\frac{du}{dy}=0, \quad \omega=0 \quad \text{при} \quad y=0$$

$$u=0, \quad \omega=0 \quad \text{при} \quad y=\pm b \tag{3.7}$$

Система уравнений (3.4) с учетом граничных условий (3.7) примет следующий вид:

$$\frac{u}{u_{\text{ср}}}=\frac{1}{M}\left|(\operatorname{ch} k_1 a-\operatorname{ch} k_1)\left(\frac{k_1}{\lambda^2}\frac{\nu}{\nu+\nu_r}-\frac{1}{k_1}\right)-\right.$$

$$\left.-(\operatorname{ch} k_2 a-\operatorname{ch} k_2)\left(\frac{k_2}{\lambda^2}\frac{\nu}{\nu+\nu_r}-\frac{1}{k_2}\right)\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\right| \tag{3.8}$$

$$\frac{\omega b}{u_{\text{ср}}}=\frac{1}{2M}\left(\operatorname{sh} k_1 a-\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\operatorname{sh} k_2 a\right) \tag{3.9}$$

где

$$u_{\text{ср}}=\frac{Q}{2b}=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} u\,dy=-\left(u_0+\frac{\sigma B_0 E_z b^2}{2\rho\nu}\right)\frac{M}{D}$$

$$M=\left(\frac{1}{k_1}\operatorname{sh} k_1-\operatorname{ch} k_1\right)\left(\frac{k_1}{\lambda^2}\frac{\nu}{\nu+\nu_r}-\frac{1}{k_1}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{k_2}\operatorname{sh} k_2-\operatorname{ch} k_2\right)\left(\frac{k_2}{\lambda^2}\frac{\nu}{\nu+\nu_r}-\frac{1}{k_2}\right)\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}$$

$$D=\frac{1}{\lambda^2}\left(k_1^3-\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}k_2^3\right)-\left(k_1-\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}k_2\right)-$$

$$-\frac{\nu}{\nu+\nu_r}\frac{H_0^2}{\lambda^2}\left(k_1-k_2\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\right)+H_0^2\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\right)+$$

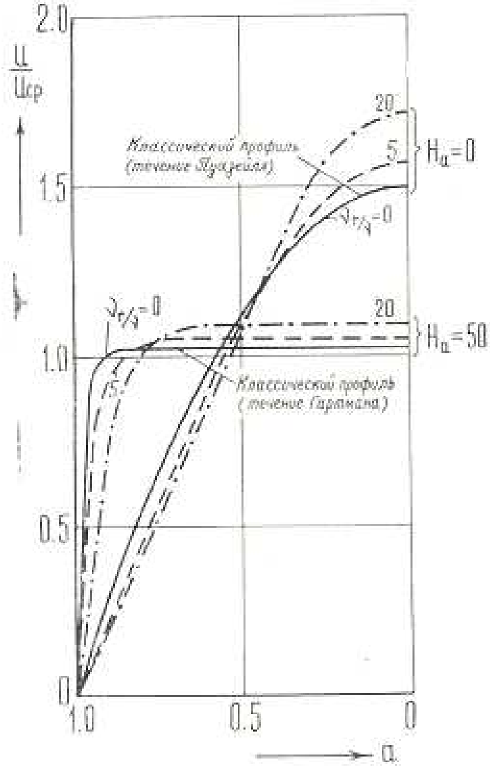
$$+\frac{\nu}{\nu+\nu_r}\frac{H_0^2}{\lambda^2}\left(k_1\operatorname{ch} k_1-k_2\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\operatorname{ch} k_2\right)-$$

$$-H_0^2\left(\frac{1}{k_1}\operatorname{ch} k_1-\frac{1}{k_2}\frac{\operatorname{sh} k_1}{\operatorname{sh} k_2}\operatorname{ch} k_2\right)$$

$$k_1=k_1^* b, \quad k_2=k_2^* b, \qquad a=\frac{y}{b} \tag{3.10}$$

Здесь $u_0=-\frac{1}{2}b^2(\rho\nu)^{-1}\frac{dp}{dx}$ — максимальная скорость в классическом течении Пуазейля, которая достигается при $y=0$. Решение (3.8) переходит в классическое течение Гартмана при $\nu_r=0$ и (3.9) дает $\omega=0$.

Так как ν, ν_r, c_a, c_d неотрицательны [1, 3, 7], то λ — действительное число.



Фиг. 1.

На фиг. 1 изображено отличие скорости от классического течения Гартмана для различных значений ν_r/ν (при $\lambda = 1$) при двух значениях числа Гартмана ($H_a = 0$; $H_a = 50$).

Ереванский государственный университет

Поступила 1 II 1974

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՄԵԿ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում են ասիմետրիկ մագնիսական հիդրոդինամիկայի հիմնական հավասարումները, կապված են էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի շարժման հավասարումները մեծ կամ անսահման էլեկտրահաղորդականության դեպքում: Ընդ որում հաշվի են առնված հեղուկում առկա մոմենտային լարումները, լարումների տենզորի ոչ սիմետրիկությունը և հեղուկի պտտման դեպքում նրա մասնիկների իներցիան: Դիտարկված է խողովակով հեղուկի հավասարաչափ հոսքի ընդհանուր դեպքը։ Բերված է երկու զուգահեռ մեկուսացված հարթ պատերի միջև համասեռ լայնական մագնիսական դաշտում անսեղմելի էլեկտրահաղորդիչ հեղուկի հարթ զուգահեռ կայունացված լամինար շարժման խնդրի լուծումը։

ON A PROBLEM OF ASYMMETRIC MAGNETOHYDRODYNAMICS

L. G. PETROSIAN

Summary

The equations of asymmetric magnetohydrodynamics are examined; the equations of continuous electrically conducting liquid of great or infinite electroconductivity are derived, the presence of coupled stresses in liquid, the asymmetry of stress tensor and the rotation inertia of liquid particles being taken into account. The general case of uniform flow in the duct is discussed. The solution to the problem of one-dimensional steady laminar flow of incompressible fluid of constant viscosity and electroconductivity between two plane parallel isolated walls in a homogeneous transverse magnetic field is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grad H.* Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with an Arbitrary Namber of Integrals. Commun. Pure. App. Math., v. 5, 1952, p. 455.
2. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. Физматгиз, М., 1962.
3. *De Groot S. R., Mazur P.* Non-equilibrium Thermodynamics. North. Holand Publishing Company, Amsterdam, 1962; русск. пер. Де-Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Изд. Мир, 1964.
4. *Condiff D., Dahler I.* Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress., The Physicas of fluids. Publ. bythe American institute of Physics, vol. 7, № 6, 1964.
5. *Лагалли М.* Векторное исчисление. ОНТИ, М.-Л., 1936.
6. *Mindlin R. D., Tierston H. F.* Effects of Couplestresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 11, № 5; русск. пер: Механика, Сб. пер. ИЛ. № 4 (86), 1964.
7. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* О неизотермической модели несимметричных жидкостей. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 5, 1967.
8. *Бай Ши-и.* Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. Мир, М., 1964.