ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 6, 1974 Механика

А. Н. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В работе рассматривается решение задачи о движении магнитоупругой среды под действием нестационарных нагрузок.

В динамических задачах теории упругости для однородной изотропной среды наиболее употребительным является метод Смирнова-Соболева [1], который применен к решению ряда граничных задач [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Для анизотропной упругой плоскости методом [1] ряд граничных задач решен в работах [8, 9]. В последнее время при решении динамических задач большее распространение получил метод интегральных преобразований в сочетании с методом Винера-Хопфа [10, 11, 12]. Следует отметить, что деформацией контура в обратном преобразовании Фурье можно для широкого класса задач решение, полученное методом интегральных преобразований, привести к эффективной записи решения в форме Смирнова-Соболева. Этот аппарат применяется в настоящей работе в применении к задаче магнитоупругости. Решение находится с помощью интегральных преобразований с последующим применением метода Винера-Хопфа и затем в нестационарном случае приводится к форме Смирнова-Соболева, что по идее близко к методу работ [13, 14].

Рассматривается задача о движении однородной изотропной магнитоупругой плоскости с разрезом, занимающим отрицательную полуось x, на границе которого приложены произвольные нормальные и касательные импульсы.

Уравнения движения магнитоупругой среды при начальном однородном магнитном поле B_0, перпендикулярном плоскости движения (x, y), имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\bar{a}^2 - b^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{a}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{1}$$

где u, v — компоненты вектора перемещения по осям x, y, $\bar{a}^2 = a^2 + \frac{B_0^2}{4\pi\rho}$, ρ — плотность, a, b — скорости упругих волн. Для индуцированного магнитного поля имеется лишь составляющая $b_z = B_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$.

Составляющие тензора магнитоупругих напряжений имеют вид

$$\sigma_{yy} + \Pi_{yy} = \rho \left[\overline{a}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + (\overline{a}^2 - 2b^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$
$$\sigma_{xy} + \Pi_{xy} = \rho b^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{2}$$

где Π_{yy}, Π_{xy} — составляющие тензора максвелловских напряжений, причем в данной задаче $\Pi_{xy} = 0$.

Пусть на берегах разреза имеются нормальные и касательные импульсы $P\delta(x+l)\exp(-i\omega t)$, $Q\delta(x+l)\exp(-i\omega t)$ на верхнем и $P'\delta(x+l)\exp(-i\omega t)$, $Q'\delta(x+l)\exp(-i\omega t)$ на нижнем берегу разреза. Запишем

$$P = \frac{P+P'}{2} + \frac{P-P'}{2}, \qquad P' = \frac{P+P'}{2} - \frac{P-P'}{2}$$
$$Q = \frac{Q+Q'}{2} + \frac{Q-Q'}{2}, \qquad Q' = \frac{Q+Q'}{2} - \frac{Q-Q'}{2}$$

Тогда задача распадается на две задачи симметричную и антисимметричную, причем в первой задаче заданы импульсы $-P_1 = \frac{P+P'}{2}$, $-Q_1 = \frac{Q-Q'}{2}$ на верхнем и $-P_1$, Q_1 на нижнем берегу, а во второй задаче импульсы будут $-P_1' = \frac{P-P'}{2}$, $-Q_1' = \frac{Q+Q'}{2}$ на верхнем и P_1', $-Q_1'$ на нижнем берегу разреза. Так как в первой задаче $\sigma_{yy} + \Pi_{yy}$ — четная, σ_{xy} — нечетная функция y, можно считать u_1 четной, v_1 — нечетной функцией y, где u_1, v_1 — вектор перемещений для симметричной задачи. Граничные условия симметричной задачи имеют вид ($y = 0$)

$$\sigma_{yy} + \Pi_{yy} = -P_1\delta(x+l)\exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0$$
$$\sigma_{xy} = -Q_1\delta(x+l)\exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$
$$v_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty$$

$u_1 = O(r^{1/2})$, $v_1 = O(r^{1/2})$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ (условие на ребре). Для антисимметричной задачи получим

$$\sigma_{yy} + \Pi_{yy} = -P_1'\delta(x+l)\exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty$$
$$\sigma_{xy} = -Q_1'\delta(x+l)\exp(-i\omega t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0 \tag{4}$$
$$u = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty$$

$u = O(r^{1/2})$, $v = O(r^{1/2})$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ (условие на ребре). Здесь $\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака, ω — частота, t — время.

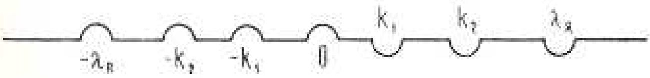
Вначале рассмотрим вторую задачу. Полагаем

$$u(x, y, t) = \bar{u}(x, y) \exp(-i\omega t), \quad v(x, y, t) = \bar{v}(x, y) \exp(-i\omega t) \tag{5}$$

Решение задачи (1), (4), (5) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i(\lambda x + y\beta_1)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(k_2^2 - 2\lambda^2)}{2\lambda^2} A - \frac{iP_1' e^{i\lambda l}}{4\pi\rho b^2 \lambda} \right] e^{i(\lambda x + y\beta_2)} d\lambda \\ \bar{v} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1}{\lambda} A e^{i(\lambda x + y\beta_1)} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{iP_1' e^{i\lambda l}}{4\pi\rho b^2 \beta_2} - \frac{k_2^2 - 2\lambda^2}{2\lambda\beta_2} \right] e^{i(\lambda x + y\beta_2)} d\lambda \end{aligned} \tag{6}$$

где $\beta_j = \sqrt{k_j^2 - \lambda^2}$, $k_1 = \omega/a$, $k_2 = \omega/b$, $A(\lambda)$ — неизвестная функция, функция $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ аналитична в комплексной плоскости λ с двумя полубесконечными разрезами вдоль действительной оси $(-\infty, -k)$ и (k, ∞), подразумевается ветвь этой функции, действительная и положительная при $-k < \lambda < k$, то есть положительно мнимая на верхнем берегу левого разреза и на нижнем берегу правого разреза. Контур интегрирования в (6) показан на фиг. 1. Учитывая что u есть нечетная функция y, можем в (1) заменить одновременно y на $|y|$ и u на $|u|$, что позволяет брать решение для всех y в виде (6), причем далее знак модуля отброшен.



Фиг. 1.

Решение в виде (6) удовлетворяет уравнениям (1) и граничному условию $\bar{\sigma}_{yy} + \bar{\Pi}_{yy} = -P_1\delta(x + l)$ при $y = 0$. Остальные граничные условия и условия на ребре определяют функцию $A(\lambda)$. Подставляя (6) в (4), имеем при $y = 0$ уравнения, которые после применения обратного преобразования Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{ib^2 R(\lambda) A(\lambda)}{2\lambda^2\beta_2} + \frac{P_1'(k_2^2 - 2\lambda^2) + 2Q\lambda\beta_2}{4\pi\rho\lambda\beta_2} e^{i\lambda l} &= \Omega^-(\lambda) \\ \frac{K_2^2 A(\lambda)}{2\lambda^2} - \frac{i\lambda P_1' e^{i\lambda l}}{4\pi\rho b^2 \lambda} &= u^+(\lambda) \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\Omega^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \left(\frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\rho}\right)_{y=0} e^{-i\lambda x} dx, \qquad U^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} (\bar{u})_{y=0} e^{-i\lambda x} dx$$

$R(\lambda) = 4\lambda^2\beta_1\beta_2 + (k_2^2 - 2\lambda^2)^2$ — функция Релея, причем искомые функции $\Omega^-(\lambda)$ и $U^+(\lambda)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскости комплексного переменного λ.

Исключая из (7) $A(\lambda)$, приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$2ib^2\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\beta_1 F(\lambda)\,U^-(\lambda)-\frac{P_1\lambda\left[\bar a^2\beta_1-(\bar a^2-2b^2)\beta_2\right]e^{i\lambda l}}{2\pi\rho\bar a^2\beta_2(\beta_1+\beta_2)}+$$

$$+\frac{Q_1 e^{i\lambda l}}{2\pi\rho}=\Omega^-(\lambda) \tag{8}$$

где

$$F(\lambda)=\frac{2}{k_2^2-k_1^2}\left[\lambda^2+\frac{(k_2^2-2\lambda^2)^2}{4\beta_1\beta_2}\right]$$

Функции $F(\lambda)$ и $\sqrt{k_1^2-\lambda^2}$ представим в виде

$$F(\lambda)=F^+(\lambda)\,F^-(\lambda),\qquad \sqrt{k_1^2-\lambda^2}=\sqrt{k_1+\lambda}\,\sqrt{k_1-\lambda} \tag{9}$$

где функции $F^+(\lambda)$ и $F^-(\lambda)$—аналитические и отличные от нуля соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$. Согласно выбору ветви функции $\sqrt{k_1^2-\lambda^2}$ и контура, разделяющего нижнюю и верхнюю полуплоскости λ-плоскости, $\sqrt{k_1+\lambda}$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости (разрез вдоль $y=0$, $-k>\lambda>-\infty$), $\sqrt{k_1-\lambda}$ — в нижней полуплоскости (разрез вдоль $y=0$, $k_1<\lambda<\infty$). Воспользуемся результатом факторизации функции $F(\lambda)$, приведенным в [16]

$$F^{\pm}(\lambda)=\frac{\lambda_R\pm\lambda}{\sqrt{k_2\pm\lambda}\,\sqrt{k_1\pm\lambda}}\exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1}^{k_2}\ln\frac{F(\zeta)}{\bar F(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta\mp\lambda}\right] \tag{10}$$

$$\left(\lambda_R=\frac{\omega}{c_R};\quad c_R<b\right)$$

Здесь c_R^{-1} — корень функции Рэлея, и выбираются одновременно либо верхние, либо нижние знаки. Подставляя (10) и (9) в (8), получим

$$2b^2 i\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\sqrt{k_1+\lambda}\,F^+(\lambda)\,U^+(\lambda)+\frac{f(\lambda)\,e^{i\lambda l}}{\lambda-\lambda_R}=\frac{\Omega^-(\lambda)\sqrt{k_2-\lambda}}{(\lambda_R-\lambda)\,X(\lambda)} \tag{11}$$

где

$$f(\lambda)=\frac{P_1\lambda\left[\bar a^2\beta_1-(\bar a^2-2b^2)\beta_2\right]-Q_1\bar a^2\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{2\pi\rho\bar a^2(\beta_1+\beta_2)\,X(\lambda)\sqrt{k_2-\lambda}}$$

$$X(\lambda)=\frac{F^-(\lambda)\sqrt{(k_2-\lambda)(k_1-\lambda)}}{\lambda_R-\lambda}$$

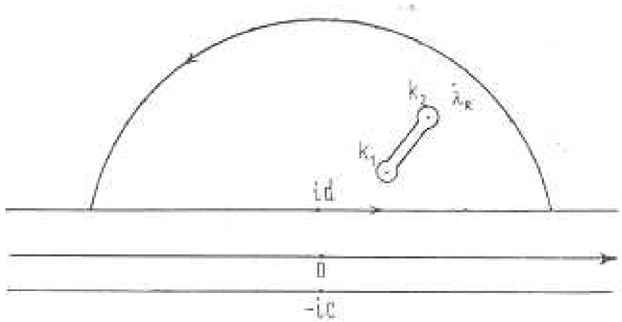
Для того, чтобы применить метод Винера-Хопфа, необходимо второй член левой части уравнения (11) представить как сумму двух функций, одна из которых аналитична в верхней полуплоскости плоскости λ, а другая — в нижней полуплоскости:

$$f_1(\lambda) = \frac{f(\lambda)\exp(i\lambda l)}{\lambda - \lambda_R} = f_1^+(\lambda) + f_1^-(\lambda) \tag{12}$$

Допустим, что ω — комплексное число, тогда легко показать, что $f_1(\lambda)$ — аналитическая функция $\lambda = \sigma + i\tau$ в полосе $-\operatorname{Im} k_1 < \lambda < \operatorname{Im} k_1$ и такая, что $|f_1(\sigma + i\tau)| < C|\sigma|^{-1/2}$ при $|\sigma| \to \infty$, причем это неравенство выполняется равномерно для всех τ в полосе $-\operatorname{Im} k_1 + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \operatorname{Im} k_1 - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Тогда можно утверждать [10], что при $-\operatorname{Im} k_1 < -c < \tau < d < \operatorname{Im} k_1$

$$f_1^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-ic-\infty}^{-ic+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi, \qquad f_1^-(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi \tag{13}$$

Теперь вычислим $f_1^-(\lambda)$. Для этого применим теорему Коши в разрезанной области фиг. 2, где разрез проведен между точками k_1, ∞.



Фиг. 2.

Отметим, что подинтегральное выражение (13) в этой области имеет единственный простой полюс в точке $\lambda = \lambda_R$. Тогда имеем

$$f_1^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\infty, k_1} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k_2, \infty} \frac{f_1(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi - \frac{f(\lambda_R)\, e^{i\lambda_R l}}{\lambda_R - \lambda} \tag{14}$$

Рассмотрим предельный случай равенства (14). Когда $\operatorname{Im}\omega \to 0$, разрез проведен уже вдоль вещественной оси от точки k_1 до ∞. Считая, что на верхнем берегу разреза $\sqrt{k^2 - \xi^2} = -i\sqrt{\xi^2 - k^2}$, а на нижнем берегу разреза $\sqrt{k^2 - \xi^2} = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ и подставляя выражение $f_1(\xi)$ в (14), получим

$$f_1^-(\lambda) = \int\limits_{k_1}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)\, e^{i\xi l}}{\xi - \lambda}\, d\xi - \frac{f(\lambda_R)\, e^{i\lambda_R l}}{\lambda_R - \lambda} \tag{15}$$

где

$$\varphi(\xi) = -\frac{P_1}{2\pi^2 \gamma}\,\frac{\sqrt{\xi - k_1}}{X(\xi)} \quad \text{при} \quad k_2 < \xi < \infty, \quad \text{а при} \quad k_1 < \xi < k_2,$$

$$\varphi(\xi)=\frac{[P_1(k_2^2-2\xi^2)-2Q_1\xi\beta_2]\,\xi\sqrt{k_2-\xi}\sqrt{\xi^2-k_1^2}}{\pi^2\rho R(\xi)X^-(\xi)(\xi-\lambda_R)}$$

а $X^-(\xi)$ суть граничные значения функции $X(\xi)$ сверху на участке $k_1<\xi<k_2$. Из (15), (12), (11) имеем

$$2b^2i\left(1-\frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\sqrt{k_1+\lambda}\,F^+(\lambda)U^+(\lambda)-f_1^+(\lambda)=\frac{\Omega^-(\lambda)\sqrt{k_2-\lambda}}{(\lambda_R-\lambda)X(\lambda)}-f_1^-(\lambda)\quad(16)$$

Так как точки k_1, k_2, λ_R не принадлежат к нижней полуплоскости λ, то правая часть уравнения (16) представляет собой функцию, аналитическую в нижней полуплоскости, а левая часть того же уравнения — функцию, аналитическую в верхней полуплоскости. По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями друг друга. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости λ, в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [10] и условие на ребре, нетрудно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости λ.

Таким образом, получим

$$\Omega^-(\lambda)=\frac{f(\lambda_R)X(\lambda)e^{i\lambda_R l}}{\sqrt{k_2-\lambda}}-\frac{(\lambda_R-\lambda)X(\lambda)}{\sqrt{k_2-\lambda}}\int_{k_1}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)e^{i\xi l}}{\xi-\lambda}d\xi\qquad(17)$$

Из формул (17), (7) имеем

$$A(\lambda)=i\left(a_1^{(1)}e^{i\lambda l}+a_2^{(1)}e^{i\lambda_R l}+a_3^{(1)}\int_{k_1}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)e^{i\xi l}}{\xi-\lambda}d\xi\right)\qquad(18)$$

где

$$a_1^{(1)}=\frac{\lambda[P_1(k_2^2-2\lambda^2)+2\lambda\beta_2Q_1]}{2\pi\rho b^2R(\lambda)},\qquad a_2^{(1)}=\frac{2f(\lambda_R)\lambda^2X(\lambda)\sqrt{k_2+\lambda}}{b^2R(\lambda)}$$

$$a_3^{(1)}=\frac{2\lambda^2(\lambda_R-\lambda)X(\lambda)\sqrt{k_2-\lambda}}{b^2R(\lambda)}$$

Подставляя (18) в (6), получим

$$\overline{u}=i\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|a_n^{(m)}e^{i\varphi_n^{(m)}(\lambda)}-\frac{1}{2}\int_{\frac{v}{a}-1}^{\infty}\frac{a_3^{(m)}(\lambda)\varphi(\eta)e^{i\varphi_3^{(m)}(\eta,\lambda)}}{\eta-\frac{\lambda}{\omega}}d\eta\right|d\lambda$$

$$\overline{v}=i\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|b_n^{(m)}e^{i\varphi_n^{(m)}(\lambda)}+\frac{1}{2}\int_{\frac{v}{a}-1}^{\infty}\frac{b_3^{(m)}(\lambda)\varphi(\eta)e^{i\varphi_3^{(m)}(\eta,\lambda)}}{\eta-\frac{\lambda}{\omega}}d\eta\right|d\lambda\quad(19)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{[Q_1 (k_2^2 - 2\lambda^2) - 2P_1 \lambda \beta_1] \beta_2}{2\pi\rho b^2 R(\lambda)}$$

$$a_2^{(2)} = \frac{f(\lambda_R)(k_2^2 - 2\lambda^2) X(\lambda) \sqrt{k_2 + \lambda}}{b^2 R(\lambda)} \tag{19}$$

$$a_3^{(2)} = \frac{(k_2^2 - 2\lambda^2)(\lambda_R - \lambda) X(\lambda) \sqrt{k_2 + \lambda}}{b^2 R(\lambda)}, \qquad b_n^{(1)} = \frac{\beta_1}{\lambda} a_n^{(1)}$$

$$\beta_n^{(2)} = -\frac{\lambda}{\beta_2} a_n^{(2)}, \qquad \varphi_1^{(m)} = \lambda (l + x) + y\beta_m, \qquad \varphi_2^{(m)} = \lambda_R l + \lambda x + y\beta_m$$

$$\varphi_3^{(m)} = \omega\gamma l + \lambda x + y\beta_m$$

Таким образом, получено решение второй задачи, периодическое во времени. Обратное преобразование по t, соответствующее решению нестационарной задачи, для которой в (4) вместо $\exp(-i\omega t)$ стоит $\delta(t)$, имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \bar{u}\, ds, \qquad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \bar{v}\, ds \tag{20}$$

где $s = -i\omega$.

При применении обратного преобразования Лапласа по t введем вместо λ переменную ξ, $\lambda = \omega\xi$, $s = \sigma - i\tau$, где $\sigma > 0$ и мало. Существенными оказываются окрестности точек $\xi = \xi_n^{(m)}$, для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}) \equiv t - \varphi_n^{(m)}(\xi_n^{(m)}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3;\ m = 1, 2) \tag{21}$$

причем сопряженные значения $\bar{\xi}_n^{(m)}$ также удовлетворяют (21). Для определенности вычислим один из шести интегралов, содержащих указанные экспоненты

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} i a_1^{(1)}(\xi)\, e^{s f_1^{(1)}(\xi)}\, d\xi \tag{22}$$

где в силу однородности произведено сокращение на ω, причем в множителе при экспоненте в подынтегральной функции всюду положено $\omega = 1$, что даст новые формулы для $a_1^{(1)}(\xi)$, $f_1^{(1)}(\xi)$.

Пусть $\omega > 0$.

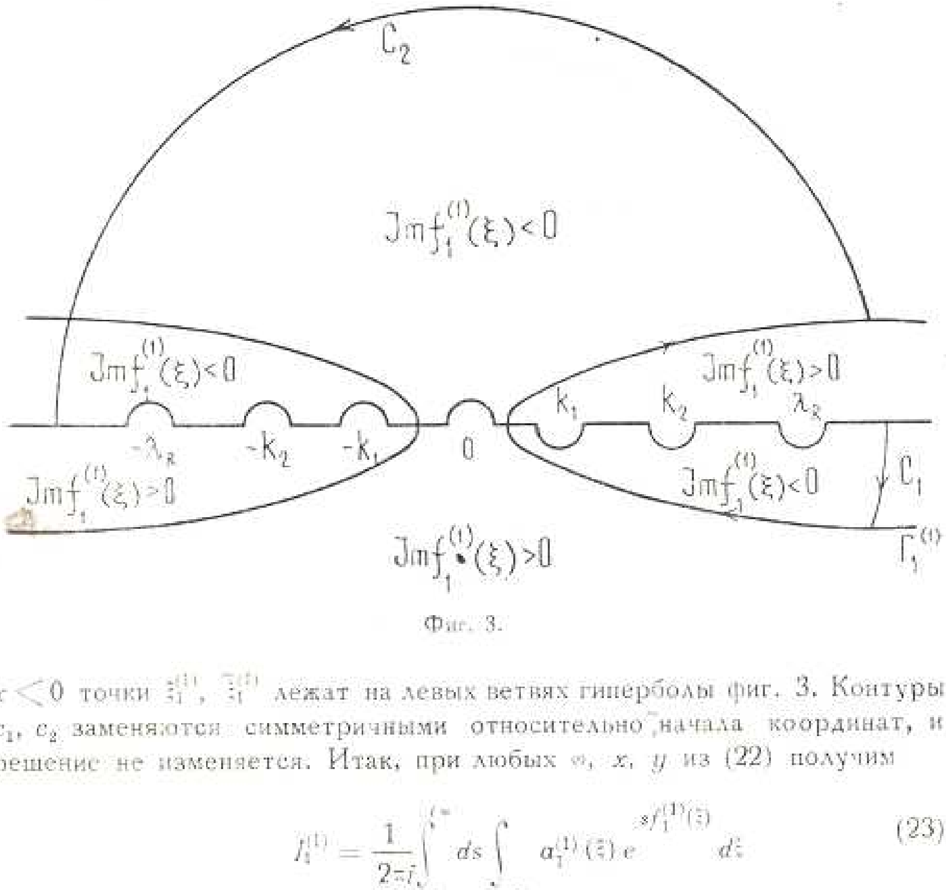
В силу малости σ, можно условно контуры по ξ проводить по действительной оси ξ с обходом особых точек в верхней и соответственно нижней полуплоскости [10].

Заменим контур интегрирования $-\infty < \xi < \infty$ на контур $\Gamma_1^{(1)}$, проходящий через указанные точки $\xi_1^{(1)}$, $\bar{\xi}_1^{(1)}$ в направлении $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi) = 0$. Для этого нужно найти области постоянного знака $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi)$. Обозначая $f_1^{(1)}(\xi) = B$, где величина B вещественна, $\xi = \zeta + i\eta$, можно убедиться, что в плоскости (ζ, η) линии $f_1^{(1)}(\xi) = B$ состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{\bar{a}^2 r_1^2 \eta^2}{x_1^2} - \frac{\bar{a} r_1^2 \eta^2}{y^2} = 1, \qquad r_1^2 = x_1^2 + y^2, \quad x_1 = x + l$$

а также из отрезков действительной оси $|\zeta| < \bar{a}^{-1}$.

Пусть $x > 0$. Тогда, предполагая, что на мнимой оси $\sqrt{\bar{a}^{-2} - \xi^2} > 0$, можно показать, что $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi) < 0$ в областях фиг. 3, где проходят дуги окружностей c_1 и c_2. Тогда при $\omega > 0$, можно заменить интегрирование по действительной оси ξ на интегрирование по $\Gamma_1^{(1)}$. При $\omega < 0$ вместо c_1, c_2 берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых $\operatorname{Im} f_1^{(1)}(\xi) > 0$. Тогда интегрирование по действительной оси ξ заменится на интегрирование по $\Gamma_1^{(1)}$ в обратном предыдущему направлении. Весь внутренний интеграл в (22) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при $\omega > 0$. При



Фиг. 3.

$x < 0$ точки $\xi_1^{(1)}$, $\bar{\xi}_1^{(1)}$ лежат на левых ветвях гиперболы фиг. 3. Контуры c_1, c_2 заменяются симметричными относительно начала координат, и решение не изменяется. Итак, при любых ω, x, y из (22) получим

$$I_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds \int_{\Gamma_1^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi)\, e^{s f_1^{(1)}(\xi)}\, d\xi \tag{23}$$

Вычисляя интеграл по s, окончательно получим

$$I_1^{(1)} = i \int\limits_{\Gamma_1^{(1)}} a_1^{(1)}(\xi)\, \delta\left(f_1^{(1)}(\xi)\right) d\xi \tag{24}$$

Полагая вблизи точки $\xi_1^{(1)}$ $f_1^{(1)}(\xi) = f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)})(\xi - \xi_1^{(1)})$ и вычисляя интеграл от дельта-функции в точках $\xi_1^{(1)}, \bar{\xi}_1^{(1)}$, получим

$$I_1^{(1)} = 2\,\mathrm{Re}\, i\, \frac{a_1^{(1)}(\xi_1^{(1)})}{f_1^{(1)'}(\xi_1^{(1)})} \tag{25}$$

При $t < \dfrac{r_1}{a}$ решение $I_1^{(1)}$ равно нулю. Аналогично (22) вычисляя остальные интегралы и подставляя в (20), получим

$$u = 2\,\mathrm{Re}\, i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{a_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int\limits_{a^{-1}}^{\infty} \frac{a_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}(\eta))\, \varphi(\eta)\, d\eta}{f_3^{(m)'}(\xi_3^{(m)}(\eta))\,(\eta - \xi_3^{(m)}(\eta))} \right]$$

$$v = 2\,\mathrm{Re}\, i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{b_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int\limits_{a^{-1}}^{\infty} \frac{b_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}(\eta))\, \varphi(\eta)\, d\eta}{f_3^{(m)'}(\xi_3^{(m)}(\eta))\,(\eta - \xi_3^{(m)}(\eta))} \right] \tag{26}$$

Аналогичным образом решается первая задача, решение которой дается формулами

$$u_1 = 2\,\mathrm{Re}\, i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{A_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int\limits_{a^{-1}}^{\infty} \frac{A_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}(\eta))\, \psi(\eta)\, d\eta}{f_3^{(m)'}(\xi_3^{(m)}(\eta))\,(\eta - \xi_3^{(m)}(\eta))} \right]$$

$$v_1 = 2\,\mathrm{Re}\, i \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} \left[\frac{B_n^{(m)}(\xi_n^{(m)})}{f_n^{(m)'}(\xi_n^{(m)})} + \frac{1}{2} \int\limits_{a^{-1}}^{\infty} \frac{B_3^{(m)}(\xi_3^{(m)}(\eta))\, \psi(\eta)\, d\eta}{f_3^{(m)'}(\xi_3^{(m)}(\eta))\,(\eta - \xi_3^{(m)}(\eta))} \right] \tag{27}$$

где

$$A_1^{(1)} = \frac{Q_1 \lambda^2 \beta_2}{\pi \rho b^2 R(\lambda)}, \qquad A_2^{(1)} = -\frac{f_1(\lambda_R)\, X(\lambda)\, (k_2^2 - 2\lambda^2)\, \lambda}{b^2 R(\lambda) \sqrt{k_1 - \lambda}}$$

$$A_3^{(1)} = \frac{(\lambda_R - \lambda)(k_2^2 - 2\lambda^2)\, X(\lambda)\, \lambda}{b^2 R(\lambda) \sqrt{k_1 - \lambda}}, \qquad A_1^{(2)} = \frac{Q_1 \beta_2 (k_2^2 - 2\lambda^2)}{2\pi \rho b^2 R(\lambda)}$$

$$A_2^{(2)} = -\frac{2\beta_1 \beta_2 A_2^{(1)}}{k_2^2 - 2\lambda^2}, \qquad A_3^{(2)} = -\frac{2\beta_1 \beta_2 A_3^{(1)}}{k_2^2 - 2\lambda^2}, \qquad B_n^{(1)} = \frac{\beta_1 A_n^{(1)}}{\lambda} \tag{28}$$

$$B_n^{(2)} = -\frac{\lambda}{\beta_2} A_n^{(2)}, \qquad \psi(\lambda) = \frac{\left[2 Q_1 \lambda \beta_2 + P_1 (k_2^2 - 2\lambda^2)\right](k_2^2 - 2\lambda^2)\sqrt{\lambda - k_1}}{2\pi^2 \rho\, (\lambda - \lambda_R)\, R(\lambda)\, X^+(\lambda)}$$

$$f_1(\lambda) = -\frac{Q_1\lambda\,(2\beta_1\beta_2 - k_2^2 + 2\lambda^2) + P_1 k_2^2 \beta_1}{2\pi\rho k_2^2 \sqrt{k_1 - \lambda}\, X(\lambda)} \tag{29}$$

Легко убедиться, что решение общей задачи будет записываться в виде суммы полученных решений

$$U = u + u_1, \quad V = v + v_1$$

и будет удовлетворять всем граничным условиям.

Теперь определим коэффициенты интенсивности нормальных и касательных напряжений $K_{\rm I}$ и $K_{\rm II}$. Так как при $x \to +0$, $y = 0$, $\sigma_{yy} + \Pi_{yy} = K_{\rm I}/\sqrt{2\pi x}$, $\sigma_{xy} = K_{\rm II}/\sqrt{2\pi x}$, то из (2) можно получить

$$k_{\rm I} = \sqrt{2\pi}\,{\rm Re}\left(-\frac{f_1(c_R^{-1})}{(t - c_R^{-1} l)^{3/2}} - \int_{\bar a^{-1}}^{\infty} \frac{\varphi(\eta)\, d\eta}{(t - \eta l)^{3/2}}\right) \text{ при } t > \frac{l}{a}$$

$$k_{\rm II} = \sqrt{2\pi}\,{\rm Re}\left(-\frac{f_1(c_R^{-1})}{(t - c_R^{-1} l)^{3/2}} + \int_{\bar a^{-1}}^{\infty} \frac{\psi(\eta)\, d\eta}{(t - \eta l)^{3/2}}\right) \text{ при } t > \frac{l}{a}$$

где функции f, φ, f_1, ψ даются формулами (11), (15), (28), (29).

Первая задача при $l = 0$, $P_1 = 0$, $\bar a = a$ решена другим методом в [7], при этом решение совпадает с решениями (27), а при $l = 0$, $Q_1 = 0$, $\bar a = a$ — в работе [12].

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 12 II 1974

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է ճեղքունեցող համասեռ իզոտրոպ մագնիսաառաձգական հարթության շարժման խնդիրը, երբ ճեղքի եզրի վրա կիրառված են կամայական նորմալ և շոշափող իմպուլսներ: Լուծումը գտնվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ Վիների-Հոպֆի մեթոդի հետագա կիրառմամբ, իսկ այնուհետև ոչ ստացիոնար դեպքում լուծումը բերվում է Սմիրնով-Սոբոլևի տեսքի:

Ստացվել են բանաձևեր լարումների բաշխման համար: Որոշվել է նաև լարումների ինտենսիվության գործակիցը:

A SOLUTION TO THE UNSTEADY BOUNDARY PROBLEM FOR MAGNETOELASTIC MEDIUM

A. N. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The problem on motion of a homogeneous isotropic magnetoelastic plane with a cut, to whose boundaries are applied certain arbitrary normal and tangential impulses, is considered. The solution is found by integral transformations with subsequent application of the Winner-Hopf technique and later, for the unsteady case, it is reduced to the Smirnov-Sobolev form. The formulae for stress distribution throughout the medium as well as the coefficient of stress intensity are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, Л.—М., 1937.
2. *Зволинский Н. В.* Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 10, 1957.
3. *Бабич В. М. и др.* Линейные уравнения математической физики. М., Наука, 1964.
4. *Афанасьев Е. Е., Черепанов Г. П.* Некоторые динамические проблемы теории упругости, ПММ, т. 37, № 4, 1973.
5. *Зволинский и др.* Некоторые задачи дифракции упругих волн. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Изд. Наука, М., 1965.
6. *Костров Б. М.* Автомодельные динамические задачи о вдавливании жёсткого штампа в упругое полупространство. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
7. *Свекло В. А.* Задача Лэмба при смешанных граничных условиях. Докл. АН СССР, т. XCV, № 4, 1954.
8. *Свекло В. А.* Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. XXVI, вып. 5, 1962.
9. *Осипов И. О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах. ПММ, т. 36, вып. 5, 1972.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1962.
11. *Черепанов Г. П.* Дифракция упругих волн на разрезе. В кн. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 80-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., Наука, 1972.
12. *Baker B. R.* Dynamic stresses created by a moving crack. Trans. ASME., Ser. E., J. Appl. Mech., vol. 29, № 3, 1962.
13. *Флитман Л. М.* Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошности упругой среды. ПММ, т. 27, № 4, 1963.
14. *Cagniard L.* Réflexion et réfraction des ondes seismiques progressives. Paris, Gauthier Villars, 1939.
15. *Kaliski S.* and *Petgkiewicz I.* Dynamical equations for elastic and inelastic, anisotropic bodies in magnetic field. Proc. Vibr. probl., 1959, № 2, Warsaw.
16. *Maue A. W.* Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM, Bd. 34, H. 1–2, 1954.