

Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

РАСЧЕТ БУРНОГО ПОТОКА В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ОТКРЫТОМ ВОДОТОКЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПРОДОЛЬНОМ УКЛОНОМ

Исследуется поведение сверхкритического потока в открытом водотоке с плоским наклонным дном, слегка расширяющимся вниз по течению. Выводятся уравнения характеристик, отделяющих в плане область одномерного течения от области двухмерного течения. Показывается, что при большом уклоне дна водотока они близки к прямым, идущим от концов входного сечения и параллельным оси симметрии водотока. Параметры течения (компоненты скорости, глубина) разлагаются в асимптотические ряды и вычисляются первые и приближенно вторые члены этих рядов. Находится автомодельное решение для уравнения, которое получается в первом приближении и определяется та форма стенок, которая соответствует этому решению. Приводится пример.

Все опубликованные до настоящего времени работы по расчету сверхкритических открытых потоков (имеются в виду не гидравлические расчеты) посвящены или горизонтальным руслам или руслам с малым уклоном дна. Из них следует отметить работы [1—7]. Их краткий обзор приведен в монографии [1], в которой автор стремится дать систематическое изложение теории двухмерных (плановых) открытых потоков при бурных режимах, а также основанных на ней методов расчета водоводов некоторых типов. В частности, автор, используя метод характеристик и газогидравлическую аналогию, решает полуобратную задачу для расширяющегося потока с учетом трения в канале с небольшим наклонным (0,1—0,15) плоским дном при бурном режиме.

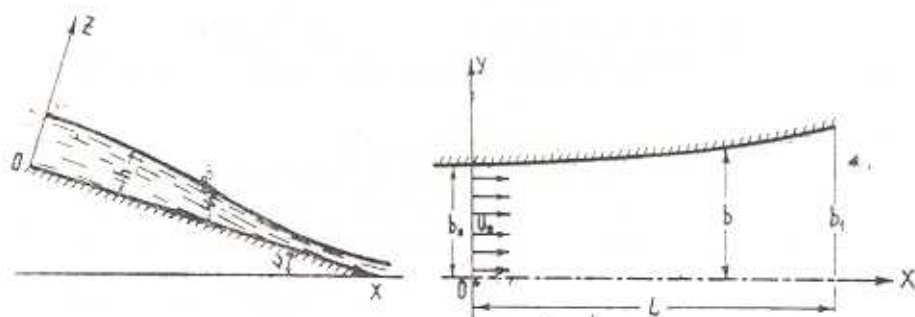
1. Рассмотрим сверхкритическое движение несжимаемой жидкости в открытом водоводе с плоским наклонным дном и расходящимися боковыми стенками. Пусть уклон дна водотока произвольный, водоток короткий, а боковые стенки в плане повернуты на относительно малые углы $\Delta\theta$ (переходной или концевой участок быстротока). В этом случае на свободной поверхности бурного потока появляются слабые возмущения.

Предположим, что движение стационарное, безвихревое, а жидкость идеальная (при бурных режимах силы инерции преобладают над силами трения и для коротких участков ими можно пренебречь [2, 7, 8]).

Для простоты расчета допустим, что скорости и глубины во входном сечении водотока постоянны, причем скорости направлены параллельно его оси симметрии. Как значения этих величин, так и геометрию

ческие параметры водотока (ширина входного сечения, уклон, длина) являются заданными величинами.

Расположим начало координат во входном сечении водотока, ось Ox совместим с осью его симметрии, ось Oz направим перпендикулярно к его дну, а ось Oy — перпендикулярно к плоскости xOz (фиг. 1).



Фиг. 1.

Исходные уравнения двумерного движения в случае произвольного продольного уклона дна водотока заимствуем из [7]

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \gamma + g \sin \gamma \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \cos \gamma \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь γ — угол наклона дна к горизонту, h — глубина воды, отсчитываемая по нормали ко дну, u, v — компоненты скорости V соответственно по осям Ox и Oy , а g — ускорение силы тяжести.

После несложных преобразований, используя при этом условие отсутствия вихрей, легко доказать, что система дифференциальных уравнений (1.1) — (1.3) эквивалентна системе уравнений

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2uv}{c^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{u}{h} \operatorname{tg} \gamma \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2g} - x \sin \gamma + h \cos \gamma = \frac{u_0^2}{2g} + h_0 \cos \gamma \quad (1.6)$$

где u_0, h_0 — значения скорости и глубины в начальном сечении, а $c^2 = gh \cos \gamma$ — скорость распространения слабых возмущений в наклонных каналах.

Во входном сечении водотока ($x = 0, -b_0 \leq y \leq b_0$) согласно постановке задачи имеем

$$u(0, y) = u_0 = \text{const}, \quad v(0, y) = 0 \quad (1.7)$$

Так как очертания боковых стенок являются линиями тока, то вдоль них выполняются условия

$$v(x, y_{ст}) = u(x, y_{ст}) \operatorname{tg} \theta \quad (1.8)$$

где θ — угол между касательной к стенке и осью Ox . Отметим, что по условию θ — малая величина.

Учитывая условие симметричности течения, получаем

$$v(x, 0) = 0 \quad (1.9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к нахождению решения смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений (1.4), (1.5) в частных производных при начальных условиях (1.7) и граничных условиях (1.8), (1.9), которая является корректной, так как система уравнений (1.4) и (1.5) при сверхкритическом режиме течения будет гиперболического типа.

2. Если сверхкритический поток в горизонтальном канале возмущается только со стороны стенок, благодаря чему путем соответствующего подбора их очертания можно добиться того, чтобы одно семейство характеристик на некотором его участке было прямолинейным, то в водотоках с продольным уклоном этого нельзя делать, так как в последнем случае поток возмущается как со стороны стенок, так и со стороны дна. Следовательно, в последнем случае характеристики обоих семейств будут криволинейными.

Так как рассматриваем непрерывное сверхкритическое движение, то возмущения, порожденные стенками будут распространяться только по характеристикам и не будут проникать во всю область течения.

Так что характеристики, исходящие из точек $(0, b_0)$ и $(0, -b_0)$, уходя вниз по течению, будут отделять в плане область одномерного течения от области двумерного течения. Так как вплоть до этих характеристик движение одномерное, то их уравнение можно вывести на основании теории одномерного течения.

Вследствие симметричности движения относительно оси Ox в дальнейшем будем ограничиваться рассмотрением той части плана водотока, которая расположена выше оси Ox .

Уравнение характеристики, исходящей из точки $(0, b_0)$, можно написать в форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Fr}_{(0)} - 1}} \quad (2.1)$$

где $\operatorname{Fr}_{(0)} = \frac{u_0^2}{gh_{(0)} \cos \gamma}$ — число Фруда одномерного течения.

Используя интеграл Бернулли (1.6), уравнение неразрывности одномерного движения и заменяя в полученном из них уравнении скорость через число Фруда, находим, что

$$\text{Fr}_{v(x)} - 2\text{Fr}_{v_0}^{-1/2} \left(1 + \frac{\text{Fr}_{v_0}}{2} + \frac{x}{h_0} \text{tg } \nu \right) \text{Fr}_{v(x)}^{3/2} + 2 = 0 \quad (2.2)$$

Полученное кубическое уравнение (2.2) относительно $\text{Fr}_{v(x)}$ имеет три действительных корня, так как его дискриминант (D) меньше нуля. В самом деле, если ввести обозначения

$$q = 1, \quad p = -\frac{2}{3} \text{Fr}_{v_0}^{-1/2} \left(1 + \frac{\text{Fr}_{v_0}}{2} + \frac{x}{h_0} \text{tg } \nu \right) \quad (2.3)$$

то

$$D = q^2 + p^3 = 1 - \frac{8}{27} \text{Fr}_{v_0}^{-1} \left(1 + \frac{\text{Fr}_{v_0}}{2} + \frac{x}{h_0} \text{tg } \nu \right)^3 < 0$$

(Fr_{v_0} значение $\text{Fr}_{v(x)}$ при $x = 0$, то есть в начальном сечении), так как выражение $\text{Fr}_{v_0}^{-1} \left(1 + \frac{\text{Fr}_{v_0}}{2} + \frac{x}{h_0} \text{tg } \nu \right)^3$ самое меньшее значение принимает при $x = 0$, $\text{Fr}_{v_0} = 1$, равное $27/8$. Нас интересует тот корень, который больше единицы. Этот корень можно представить в следующей форме [12]

$$\text{Fr}_{v(x)} = 8|p|^{1/3} \left[\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-1/3}}{3} \right]^3 \quad (2.4)$$

Подставляя в (2.1) вместо $\text{Fr}_{v(x)}$ его значение из (2.4) и интегрируя полученное уравнение, находим, что

$$y = b_0 - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{8|p|^{1/3} \left[\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-1/3}}{3} \right]^3 - 1}} \quad (2.5)$$

Переходя в интеграле (2.5) от переменной t к p по формуле (2.3), получаем

$$y = b_0 - \frac{3}{2} h_0 \text{Fr}_{v_0}^{1/2} \text{ctg } \nu \int_{p_0}^p \frac{d|p|}{\sqrt{8|p|^{1/3} \cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-1/3}}{3} \left[\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-1/3}}{3} \right]^3 - 1}} \quad (2.6)$$

($p_0 = p|_{x=0}$)

Совершая замену переменной

$$\gamma = 3 \left[\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-1/3}}{3} \right]^{-2} - 4$$

в выражении (2.6), находим

$$y = b_0 + \frac{1}{6} h_0 Fr_0^{3/2} \operatorname{ctg} \nu \int_{\gamma_0}^{\gamma} \gamma^{-3/2} (8 - \gamma)^{1/2} d\gamma, \quad (\gamma_0 = \gamma|_{\rho=\rho_0}) \quad (2.7)$$

Известно [11], что полученный интеграл в формуле (2.7) через элементарные функции не выражается. Но в рассматриваемом случае течение бурное, то есть $Fr_0 \gg 1$ и в подынтегральном выражении (2.6) единицей по сравнению с числом Фруда можно пренебречь. После отбрасывания в подынтегральном выражении (2.6) единицы и проведения той же замены переменной получаем

$$y = b_0 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} h_0 Fr_0^{3/2} \operatorname{ctg} \nu \gamma_0^{-1/2} \left\{ 8 \left[\left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{3/2} - 1 \right] + \frac{1}{5} \gamma_0 \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{5/2} - 1 \right] \right\} \quad (2.8)$$

При больших уклонах дна водотока уравнение (2.8) можно еще упростить непосредственным разложением его правой части в ряд по степеням $\delta = \frac{\pi}{2} - \nu$.

Разлагая выражение p и $\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-3/2}}{3}$ в ряды по степеням δ , получаем, что

$$p = -\frac{2}{3} \delta^{-3/2} Fr_0^{-1/2} (m + \delta + \dots) \quad (2.9)$$

и

$$\cos \frac{\pi - \arccos |p|^{-3/2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{Fr_0^{3/2}} (m + \delta)^{-3/2} + \dots \right] \quad (2.10)$$

где

$$Fr_0 = \frac{a_0^2}{g h_0}, \quad m = \frac{1}{2} Fr_0 + \frac{x}{h_0}$$

На основании формул (2.8), (2.9) и (2.10) находим, что

$$y = b_0 - 2h_0 Fr_0^{3/2} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 Fr_0} \right)^{1/2} - 1 \right] \delta^{1/2} - \left\{ h_0 Fr_0^{3/2} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 Fr_0} \right)^{1/2} - 1 \right] - \frac{2h_0 Fr_0^{3/2}}{5} \left[\left(1 + \frac{2x}{h_0 Fr_0} \right)^{-1/2} - 1 \right] - \frac{2x}{Fr_0^{3/2} \left(1 + \frac{2x}{h_0 Fr_0} \right)} \right\} \delta^{3/2} + \dots \quad (2.11)$$

Таким образом, в водотоках с большим продольным уклоном характеристика, исходящая из точки $(0, b_0)$, располагается весьма близко к прямой $y = b_0$. Следовательно, в этом случае характеристики, принадлежащие к тому же семейству, что и характеристика (2.8), достаточно далеко идут вниз по течению.

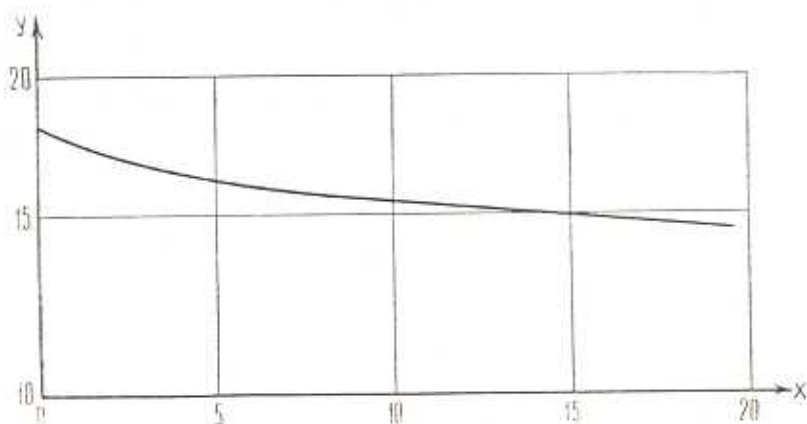
В качестве примера рассмотрим водоток со следующими геометрическими и гидравлическими данными

$$Q = 327 \text{ м}^3/\text{сек}, \quad \nu = 53, \quad 2b_0 = 35 \text{ м}, \quad L = 21 \text{ м}, \quad 2B = 56 \text{ м}$$

где Q —секундный расход, $2B$ —ширина подводящего канала. (Приведены данные водосливной платины на реке Воротан в Армении). На основании известных гидравлических формул [8] находим, что

$$h_0 = 0.99 \text{ м}, \quad u_0 = 5.65 \text{ м/сек}, \quad Fr_0 = 3.25$$

На фиг. 2 приводится график характеристики (2.8), построенный по приведенным данным.



Фиг. 3.

3. Так как поток в области двумерного течения по условию задачи слабо возмущается со стороны стенок, то в этой области параметры u , v , h течения можно разложить в асимптотические ряды

$$u(x, y, \varepsilon) = u_{(0)}(x) + \varepsilon u_{(1)}(x, y) + \dots \quad (3.1)$$

$$v(x, y, \varepsilon) = \varepsilon v_{(1)}(x, y) + \dots \quad (3.2)$$

$$h(x, y, \varepsilon) = h_{(0)}(x) + \varepsilon h_{(1)}(x, y) + \dots \quad (3.3)$$

где $\varepsilon = 0\left(\frac{dy_{cr}}{dx}\right)$ — малый параметр в изучаемой задаче.

При произвольном безотрывном расширении эти разложения справедливы в окрестности характеристики $y = b_0 - \int_0^x \frac{dx}{1 - Fr_{(0)} - 1}$. Первые члены (нулевое приближение) в написанных рядах соответствуют одномерному стационарному движению (случай прямоугольного водовода $\varepsilon = 0$).

Подставляя ряды (3.1), (3.2), (3.3) в уравнения (1.4), (1.5), (1.6) и приравнявая в обеих частях получаемых равенств коэффициенты при

одинаковых степенях ε , получаем систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения членов разложения. В частности, для определения величин $u_{(1)}$, $v_{(1)}$ и $h_{(1)}$ (первого приближения) получаем

$$(gh_{(0)} \cos \gamma - u_{(0)}^2) \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} - gh_{(0)} \cos \gamma \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} + gh_{(1)} \sin \gamma + \\ + (gh_{(1)} \cos \gamma - 2u_{(0)} u_{(1)}) \frac{du_{(0)}}{dx} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v_{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial h_{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{u_{(0)} u_{(1)}}{g \cos \gamma} + h_{(1)} = 0 \quad (3.6)$$

Уравнения нулевого приближения не выписали, так как получаются известные уравнения одномерного стационарного движения и их первый интеграл.

Подставляя в дифференциальное уравнение (3.4) вместо $\frac{du_{(0)}}{dx}$ свое выражение из нулевого приближения, исключая затем величину $h_{(1)}$ с помощью (3.6) и заменяя везде $\frac{u_{(0)}^2}{gh_{(0)} \cos \gamma}$ числом Фруда, а $h_{(0)} = h_0 \left(\frac{Fr_{(0)}}{Fr_{(0)}} \right)^{1/3}$, получаем

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{Fr_{(0)} - 1} \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} - \frac{2Fr_{(0)} + 1}{(Fr_{(0)} - 1)^2} \frac{\operatorname{tg} \gamma}{h_0} \left(\frac{Fr_{(0)}}{Fr_{(0)}} \right)^{1/3} u_{(1)} = 0 \quad (3.7)$$

При маленьком уклоне (в первом приближении) уравнение (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} - \frac{1}{Fr_0 - 1} \frac{\partial v_{(1)}}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

решение которого записывается в простой форме Даламбера. Из-за недостатка места решения последующих приближений не приводятся.

Подставляя разложения (3.1), (3.2) в начальные условия (1.7) и в граничные условия (1.8), (1.9) и приравнявая в обеих частях полученных равенств коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем те начальные

$$u_{(1)}(0, y) = 0, \quad v_{(1)}(0, y) = 0, \quad (0 \leq y \leq b_0) \quad (3.9)$$

и граничные условия

$$v_{(1)}(x, y_c) = u_{(0)} \frac{dy_c}{dx} \quad (3.10a)$$

$$v_{(1)}(x, 0) = 0 \quad (0 < x \leq L) \quad (3.106)$$

которым удовлетворяют функции $u_{(1)}$, $v_{(1)}$.

Из уравнения (3.5) следует, что вместо функций $u_{(1)}$ и $v_{(1)}$ можно ввести в рассмотрение функцию φ , частные производные которой по x и y соответственно равны $u_{(1)}$ и $v_{(1)}$. После замены $u_{(1)}$ и $v_{(1)}$ соответственно через $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ дифференциальное уравнение (3.7) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{Fr_{s(0)} - 1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2Fr_{s(0)} + 1}{(Fr_{s(0)} - 1)^2} \frac{tg \nu}{h_0} \left(\frac{Fr_{s(0)}}{Fr_{s(0)}} \right)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

Так как в рассматриваемом случае поток бурный, то на всей протяженности водотока число Фруда будет намного больше единицы. Следовательно,

$$\frac{1}{Fr_{s(0)} - 1} = Fr_{s(0)}^{-1} + O(Fr_{s(0)}^{-2}), \quad \frac{2Fr_{s(0)} + 1}{(Fr_{s(0)} - 1)^2} = 2Fr_{s(0)}^{-1} + O(Fr_{s(0)}^{-2}) \quad (3.12)$$

На основании формул (2.3), (2.4) и (2.10) можем написать, что

$$Fr_{s(0)} = 3^{1/2} |\rho|^{1/2} [1 + O(Fr_{s(0)}^{-1})], \quad |\rho|^{-1/2} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} Fr_{d(0)} (h_0 ctg \nu)^{1/2} \xi^{-1/2}$$

где $\xi = x + h_0 ctg \nu \left(1 + \frac{1}{2} Fr_{d(0)} \right)$, $q_0 = u_0 h_0$ — удельный расход в начальном сечении.

Значит,

$$\frac{1}{Fr_{s(0)} - 1} \approx \frac{q_0 ctg \nu}{2 \sqrt{2g \sin \nu}} \xi^{-1/2}, \quad \frac{2Fr_{s(0)} + 1}{(Fr_{s(0)} - 1)^2} Fr_{s(0)}^{-1} \approx \frac{1}{2} Fr_{d(0)} h_0 ctg \nu \xi^{-1/2} \quad (3.13)$$

Подставляя выражения $\frac{1}{Fr_{s(0)} - 1}$, $\frac{2Fr_{s(0)} + 1}{(Fr_{s(0)} - 1)^2} Fr_{s(0)}^{-1}$ из (3.13) в дифференциальное уравнение (3.11), после отбрасывания членов более высокого порядка и замены переменной

$$\eta = \left(\frac{2}{q_0} \sqrt{2g \sin \nu} \right)^{1/2} y$$

получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} = 0^* \quad (3.14)$$

Производя замену переменной $\zeta = \sqrt{\xi}$ в дифференциальном уравнении (3.14), получаем

* Так как решение дифференциального уравнения (3.11) непрерывно зависит от его коэффициентов, то оно будет достаточно близко к решению дифференциального уравнения (3.14).

$$\zeta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.15)$$

Легко проверить, что после перехода от переменных ζ, η к характеристическим переменным α, β по формулам

$$\alpha = 4\zeta^{1/4}, \quad \beta = \eta$$

уравнение (3.15) сводится к уравнению Дарбу со значением $m = -\frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{-\nu_1}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{-\nu_1}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi_{-\nu_1}}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.16)$$

(Для удобства дальнейшей записи φ заменили через $\varphi_{-\nu_1}$)

Начальные и граничные условия для функции $\varphi_{-\nu_1}$ соответственно записываются в следующей форме:

$$\varphi_{-\nu_1}(z_0, \beta) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{-\nu_1}(z_0, \beta)}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.17)$$

$$\left(\alpha_0 = 4 \left[h_0 \left(1 + \frac{1}{2} Fr_0 \right) \operatorname{ctg} \nu \right]^{1/4}, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0 = \left(\frac{2}{q_0} \sqrt{2g \sin \nu} \operatorname{tg} \nu \right)^{1/4} b_0 \right)$$

$$\frac{\partial \varphi_{-\nu_1}(z, \beta_0)}{\partial \beta} = \frac{A}{z} \frac{d\beta_{cr}^*}{dz}, \quad \frac{\partial \varphi_{-\nu_1}(z, 0)}{\partial \beta} = 0 \quad (\varphi(z, \beta) = \varphi(z, -\beta)) \quad (3.18)$$

$$\left(A = 2q_0 \operatorname{ctg} \nu, \quad z_0 \leq z \leq z_1 = \left[L + h_0 \left(1 + \frac{1}{2} Fr_0 \right) \operatorname{ctg} \nu \right]^{1/4} \right)$$

Покажем, что характеристика уравнения (3.16), исходящая из точки (α_0, β_0) , при переходе в физическую плоскость совпадает с характеристикой (2.11). Используя формулы перехода от характеристических координат (α, β) к координатам физической плоскости (x, y) , уравнение рассматриваемой характеристики можно записать в форме

$$\left(\frac{2}{u_0 h_0} \sqrt{2g \cos \delta} \operatorname{ctg} \delta \right)^{1/4} y = \left(\frac{2}{u_0 h_0} \sqrt{2g \cos \delta} \operatorname{ctg} \delta \right)^{1/4} b_0 - 4 \left(\frac{1}{2} \frac{h_0 Fr_0}{\cos \delta} \right)^{1/4} \times \\ \times \left[\left(1 + \frac{2x \cos \delta}{h_0 Fr_0} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{h_0 \operatorname{tg} \delta}{x + \frac{1}{2} \frac{h_0 Fr_0}{\cos \delta}} \right)^{1/4} - \left(1 - \frac{2}{Fr_0} \sin \delta \right)^{1/4} \right]$$

* Из выражения $u_{(0)} = u_0 \left(\frac{Fr_{(0)}}{Fr_0} \right)^{1/4}$ с помощью формул $Fr_{(0)} \approx 3^{1/2} |p|^{1/2}$ и

$|p| = \frac{2}{3} (Fr_0)^{-1/2} \frac{\operatorname{tg} \nu}{h_0}$ легко получить, что $u_{(0)} \approx \frac{\sqrt{2g \sin \nu}}{15} s^2$.

Разделив в полученном равенстве обе части на величину $\left(\frac{2}{u_0 h_0} \sqrt{2g \cos \delta} \operatorname{ctg} \delta\right)^{3/2}$ и разлагая выражения $\sin \delta$, $\sec \delta$, $\operatorname{tg} \delta$, $\left(1 - \frac{h_0 \operatorname{tg} \delta}{x + \frac{1}{2} \frac{h_0^2 \operatorname{tg} \delta}{\cos \delta}}\right)^{3/2}$, $\left(1 + \frac{2}{Fr_0} \sin \delta\right)^{3/2}$ в степенные ряды по δ после несложных вычислений получаем

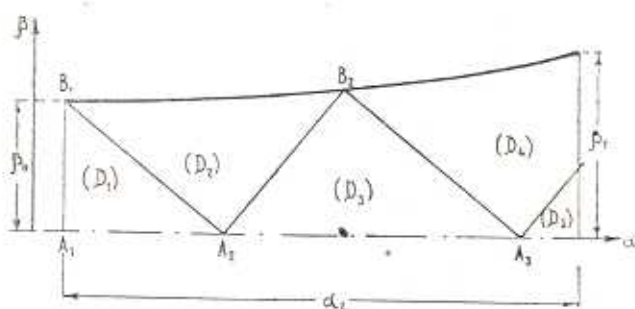
$$y = b_0 - 2h_0 Fr_0^{-1} \left[\left(1 - \frac{2x}{h_0 Fr_0}\right)^{3/2} - 1 \right] \delta^{3/2} + O(\delta^{5/2}) \quad (3.19)$$

Общее решение уравнения (3.16) записывается в форме [10]

$$\varphi_{-1,0} = \int_0^1 [J(x + \beta - 2\alpha t) + \Psi(x - \beta - 2\alpha t)] t^{-1/2} (1-t)^{-1/2} dt \quad (3.20)$$

Если провести из точки B_1 в плоскости (α, β) характеристику $B_1 A_2: \alpha + \beta = \alpha_0 + \beta_0$ (фиг. 3), то в подобласти $A_1 B_1 A_2$, которую обозначим через (D_1) , согласно теореме единственности линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа [9], решение уравнения (3.16) при начальных условиях (3.17) и условии на оси (3.18) равно нулю, то есть

$$\varphi_{-1,0}(x, \beta) = 0 \quad (3.21)$$



Фиг. 3.

В подобласти (D_2) , ограниченной характеристиками $B_1 A_2$, $A_2 B_2$ и частью $B_1 B_2$ стенки (точка B_2 является точкой пересечения характеристики $A_2 B_2: \alpha - \beta = \alpha_0 + \beta_0$ по стенкой), нахождение функций J и Ψ сводится к решению интегрально-функциональных уравнений, что аналитически невозможно осуществлять.

Если в формуле (3.12) величину $2Fr_{(0)}^{-1}$ один раз заменим через $\frac{3}{2} Fr_{(0)}^{-1}$, а другой раз — через $\frac{5}{2} Fr_{(0)}^{-1}$ (в рассматриваемом случае оба этих значения близки), то соответственно получим волновое уравнение и уравнение Дарбу со значением $m = -1$.

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \beta^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{-1}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{-1}}{\partial \beta^2} + \frac{2}{\alpha} \frac{\partial \varphi_{-1}}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

Функции φ_0 и φ_{-1} удовлетворяют тем же начальным и граничным условиям, что и функция z_{-1} . Общее решение полученных уравнений

$$\varphi_0 = F(z - \beta) + G(\alpha - \beta) \quad (3.24)$$

$$\varphi_{-1} = \frac{1}{\alpha} [\chi(z + \beta) + \Omega(z - \beta)] \quad (3.25)$$

В подобласти (D_1) согласно вышесказанному

$$\varphi_{0(D_1)} = 0, \quad \varphi_{-1(D_1)} = 0 \quad (3.26)$$

В подобласти (D_2) , используя решения (3.24), (3.25) и (3.26), можем написать

$$G_{(D_2)} = \text{const} = -F(\alpha_0 + \beta_0), \quad \Omega_{(D_2)} = \text{const} = -\chi(\alpha_0 + \beta_0)$$

Учитывая последние соотношения и граничное условие (3.1) на стенке, найдем, что

$$\varphi_{0(D_2)} = A\mathcal{L}(z + \beta), \quad \varphi_{-1(D_2)} = \frac{A}{\alpha} I(z - \beta) \quad (3.27)$$

где

$$\mathcal{L}(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{\omega} \frac{d\beta_{cr}}{dz} \Big|_{z=\alpha} d\eta, \quad I(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\beta_{cr}}{dz} \Big|_{z=\alpha} d\eta$$

$$\eta = z + \beta, \quad \eta(\beta_{cr}) = \beta_{cr}^{-1}$$

(при $z_0 - \alpha \leq \alpha_0 + \beta_0$, $z_0 + \beta_0 - \alpha \leq \beta \leq \beta_{cr}(\alpha_0 + \beta_0)$)

и при $z_0 - \beta_0 \leq z \leq z_0 + \beta_0 + \beta_{cr}$, $z - \alpha_0 - \beta_0 \leq \beta \leq \beta_{cr}$)

Отметим, что $\frac{\partial \varphi_{0(D_2)}}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial \varphi_{-1(D_2)}}{\partial z} > 0$.

В подобласти (D_3) , ограниченной характеристиками A_2B_2 и B_2A_3 и частью оси A_2A_3 , используя общие решения (3.24), (3.25) и полученные в подобласти (D_2) решения (3.27), находим, что вдоль характеристики A_2B_2 : $\alpha - \beta = \alpha_0 + \beta_0$ имеют место соотношения

$$F(2\alpha - z_0 - \beta_0) + G(\alpha_0 + \beta_0) = \varphi_{0(D_3)}(z, \alpha - z_0 - \beta_0)$$

$$\frac{1}{\alpha} [\chi(2\alpha - z_0 - \beta_0) + \Omega(\alpha_0 + \beta_0)] = \varphi_{-1(D_3)}(z, \alpha - z_0 - \beta_0)$$

отсюда получаем

$$F_{(D_2)}(z + \beta) = z_{0(D_2)} \left(\frac{z + \beta + z_0 + \beta_0}{2}, \frac{z + \beta + z_0 + \beta_0}{2} - z_0 - \beta_0 \right) - G(z_0 + \beta_0) \quad (3.28)$$

$$z_{-1(D_2)}(z + \beta) = \frac{z + \beta + z_0 + \beta_0}{2} z_{-1(D_2)} \times \\ \times \left(\frac{z + \beta + z_0 + \beta_0}{2}, \frac{z + \beta + z_0 + \beta_0}{2} - z_0 - \beta_0 \right) - G(z_0 + \beta_0) \quad (3.29)$$

Используя общие решения (3.24), (3.25) и условие на оси, получаем, что

$$G_{(D_2)}(z - \beta) = F(z - \beta) + c_1, \quad \Omega_{(D_2)}(z - \beta) = \chi_{(D_2)}(z - \beta) + c_2 \quad (3.30)$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Из соотношения (3.27), (3.28), (3.29) и (3.30) окончательно находим, что

$$z_{0(D_2)} = A[g(z + \beta) + g(z - \beta)] \quad (3.31)$$

$$z_{-1(D_2)} = \frac{A}{\alpha} [I(z + \beta) + I(z - \beta)] \quad (3.32)$$

(при $z_0 + \beta_0 \leq z < z_0 + \beta_0 + \beta_{D_2}$, $0 \leq \beta < z - z_0 - \beta_0$;

а при $z_0 + \beta_0 + \beta_{D_2} \leq z < z_{D_2} + \beta_{D_2}$, $0 \leq \beta < z_{D_2} + \beta_{D_2} - z$)

В остальных подобластях решения находятся точно так, как в подобластях (D_2) и (D_3) .

Из непрерывной зависимости решений z_0, z_{-1}, φ_1 от коэффициентов тех уравнений, которым они удовлетворяют, следует, что значение z_{-1} находится между значениями φ_0 и φ_1 . Но так как во всей рассматриваемой области $\frac{\partial z_0}{\partial z}$ и $\frac{\partial z_{-1}}{\partial z}$ положительны, то $\frac{\partial \varphi_{-1}}{\partial z}$ также будет положительной. Следовательно, можно утверждать, что в открытом расширяющемся водотоке с произвольным продольным уклоном в любом его поперечном сечении величина скорости идеального потока вблизи стенки больше, чем внутри канала, а глубина — наоборот. При бурном режиме для коротких участков водотока аналогичное утверждение верно и для реальных жидкостей.

Покажем, что решение φ_{-1} во всей рассматриваемой области удовлетворяет неравенству:

$$\varphi_{-1} \leq z_{-1} \leq z_0 \quad (3.33)$$

С этой целью рассмотрим смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial \beta^2} + k_0(z) \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (3.34)$$

при следующих начальных

$$w_0(0, \beta) = 0, \quad \frac{\partial w_0(0, \beta)}{\partial z} = 0 \quad (0 \leq \beta \leq \beta_0) \quad (3.35)$$

и граничных условиях:

$$\frac{\partial w_0(x, z_0)}{\partial z^2} = T(x), \quad \frac{\partial w_0(x, 0)}{\partial z^2} = 0 \quad (z_0 \leq x \leq x_2) \quad (3.36)$$

Кроме уравнения (3.34) рассмотрим два других уравнения

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + k_1(x) \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + k_2(x) \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (3.38)$$

Функции w_1, w_2 удовлетворяют тем же начальным и граничным условиям, что и функция w_0 .

Теорема. Если все функции k_0, k_1, k_2 и $\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_2}{\partial x}$ в рассматриваемой области положительны и имеет место неравенство

$$k_0 \leq k_1 \leq k_2 \quad (3.39)$$

$$w_2 \leq w_1 \leq w_0 \quad (3.40)$$

Из уравнений (3.34), (3.37) и неравенства (3.39) следует, что

$$\frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial z^2} + k_0 \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} < 0 \quad (3.41)$$

Рассмотрим вспомогательное выражение

$$2 \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial z^2} + k_0 \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \right] \quad (3.42)$$

Интегрируя выражение (3.42) по области (D) (см. фиг. 3) и применяя формулу Грина, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{(D)} 2 \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (w_1 - w_0)}{\partial z^2} + k_0 \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \right] dx dz = \\ & = \int_0^{x_1} \left[\left| \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \right|^2 - \left[\frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial z} \right]^2 \right] dz - \int_0^{x_2} c(x) \left| \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \right|^2 dx + \\ & \quad + \int_{(D)} k_0 \left[\frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \right]^2 dx dz \end{aligned}$$

Следовательно, $\frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial x} \leq 0$, но так как $w_1 - w_0 = \int_{z_0}^z \frac{\partial (w_1 - w_0)}{\partial z} dz$,

то $w_1 < w_0$. Точно таким же путем доказывается, что во всей рас-

смаатриваемой области $w_2 \leq w_4$. Из доказанной теоремы следует справедливость неравенства (3.33).

Таким образом, задавая подходящую, гидравлически рациональную форму боковых стенок (то, что делается при решении прямых задач), при этом так, чтобы они удовлетворяли условиям рассматриваемой задачи, получим соответствующее распределение скоростей и глубин. Для ясности рассмотрим один пример.

По постановке задачи должны иметь место следующие условия:

$$\begin{aligned} \text{а) } y_{cr}(0) &= b_0, & \frac{dy_{cr}(0)}{dx} &= 0, \\ \text{б) } \frac{dy_{cr}}{dx} &> 0, & \frac{d^2y_{cr}}{dx^2} &> 0, & \frac{dy_{cr}}{dx} = 0 \text{ (з) } &= 0 \text{ (Fr}_{cr}^2) \end{aligned}$$

где $n = n(\text{Fr}_{cr}, L)$ и в каждом конкретном случае определяется при помощи подбора.

Зададим очертание стенки в форме

$$y_{cr} = b_0 + kax^2 \quad (3.43)$$

где k —положительное рациональное число, лежащее в интервале (1.2), $a > 0$ —произвольная размерная постоянная.

Очевидно, что написанное уравнение удовлетворяет всем условиям, входящим в а). Отметим, что если положить $k = \frac{3}{2}$, $z = \frac{1}{\text{Fr}_{cr}^2}$ и

$a = \frac{1}{81} \frac{1}{2} b_0^{-2}$, то получим эмпирическое уравнение, приведенное в [6],

которое описывает граничную линию тока свободно растекающегося бурного потока в горизонтальном русле. Видимо, уравнение, приведенное в [6], можно при расширениях использовать в качестве очертания стенки при любом угле дна водотока, если в нем число Фруда заменить числом Фруда для наклонных каналов.

В области (D_2) из формул (3.27) получаем

$$\varepsilon u_{(1)}^{(0)} = \frac{\partial z_0}{\partial x} = \frac{A}{\omega} \frac{d^2 z_{cr}}{dx^2} \Big|_{z_{cr}} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \varepsilon v_{(1)}^{(0)} = \frac{\partial z_0}{\partial y} = \frac{A}{\omega} \frac{d^2 z_{cr}}{dx^2} \Big|_{z_{cr}} \frac{\partial y}{\partial y} \quad (3.44)$$

$$\varepsilon u_{(1)}^{(1)} = \frac{\partial z_{(-1)}}{\partial x} = -\frac{A}{\omega^2} \frac{dz}{dx} \Big|_{z_{cr}} \frac{d^2 z_{cr}}{dx^2} \Big|_{z_{cr}} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{A}{\omega} \frac{d^2 z_{cr}}{dx^2} \Big|_{z_{cr}} \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.45)$$

$$\varepsilon v_{(1)}^{(-1)} = \frac{A}{\omega} \frac{d^2 z_{cr}}{dx^2} \Big|_{z_{cr}} \frac{\partial y}{\partial y}$$

Переходя в уравнении (3.43) к координатам (α, β) , получаем, что

$$\beta_{cr}^2 = \beta_0^2 + \bar{a} \frac{(x^2 - \beta_0^2)^2}{4\beta_0^2}, \quad \bar{a} = a \frac{\beta_0}{b_0} \quad (3.46)$$

Имея в виду, что $r_{cr} = x + \beta_{cr}(z)$ и $\omega(r_{cr})$ является обратной функцией от r_{cr} , а также используя уравнение (3.46), находим, что

$$\omega = r - \beta_0 - \bar{\alpha} \bar{a} \left[\frac{(r - \beta_0)^4 - \alpha_0^4}{4^4} \right]^k \quad (3.47)$$

Подставляя в (3.44) и (3.45) вместо $\frac{d^2 r_{cr}}{dz^2}$, $\frac{\partial r_{cr}}{\partial x}$, $\frac{\partial r_{cr}}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dx}$ их выражения, окончательно получаем

$$u_{(1)}^{(0)} = \frac{A \bar{a} k \omega^2}{4^{4k}} (\omega^4 - \alpha_0^4)^{k-1} \left(x - \frac{\alpha_0^4}{4^4} \right)^{-1}, \quad v_{(1)}^{(0)} = \frac{A \bar{a} k}{4^{4k}} \frac{\beta_0}{b_0} \omega^2 (\omega^4 - \alpha_0^4)^{k-1} \quad (3.48)$$

$$u_{(1)}^{(-1)} = \frac{A}{4^{4k}} \bar{a} \left(x - \frac{\alpha_0^4}{4^4} \right)^{-1} (\omega^4 - \alpha_0^4)^{k-1} \left(-\frac{\omega^4 - \alpha_0^4}{x} + k \omega^4 \right) \quad (3.49)$$

$$v_{(1)}^{(-1)} = \frac{A \bar{a} k}{4^{4k}} \frac{\beta_0}{b_0} \frac{\omega^2}{x} (\omega^4 - \alpha_0^4)^{k-1}$$

Из формул (3.31), (3.32), (3.48) и (3.49) ясно, как будут записываться решения в остальных подобластях.

4. Частное решение уравнения (3.16) ищем в автомодельной форме

$$\varphi_{-1} = z^\lambda f(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{|\beta| - \alpha_0 - \beta_0} \quad (4.1)$$

и находим ту форму стенок, которая соответствует этому решению.

Из формул (4.1) находим, что

$$\frac{\partial \varphi_{-1}}{\partial z} = z^{n-1} (n f + \lambda f'), \quad \frac{\partial^2 \varphi_{-1}}{\partial z^2} = z^{n-2} [(n-1) n f + 2 \lambda f' + \lambda^2 f''] \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{-1}}{\partial z^2} = z^{n-2} \lambda^2 (2 f' + \lambda f'')$$

Подставляя выражения производных из (4.2) в уравнение (3.16), получаем для определения f обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\lambda^2 (1 - \lambda^2) f'' + (2n + 1 - 2\lambda^2) \lambda f' + n^2 f = 0 \quad (4.3)$$

Выберем степень автомодельности так, чтобы $2n + 1 = 2$, отсюда $n = 1/2$. Подставляя в уравнение (4.3) значение n и производя замену переменных $t = \lambda^2$, получаем

$$(1 - t) t^2 f'' + \frac{3}{2} (t - 1) t f' + \frac{1}{16} f = 0 \quad (4.4)$$

Если заменить функцию f через z с помощью формулы

$$f = t^{-1} z(t) \quad (4.5)$$

то дифференциальное уравнение (4.4) сведется к гипергеометрическому уравнению [13]

$$(t-1)tz'' + (t-1)z' - \frac{1}{16}z = 0 \quad (4.6)$$

Совершая в уравнении (4.5) замену переменной

$$s = 1 - t \quad (4.7)$$

получаем

$$s(1-s)z'' - sz' + \frac{1}{16}z = 0 \quad (4.8)$$

Нас интересует то решение уравнения (4.8), которое при $\lambda=1$ ($s=0$) обращается в нуль. Это решение записывается в форме [11]

$$z = c s F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, s\right), \quad (c = \text{const}) \quad (4.9)$$

Сопоставляя формулы (4.1), (4.5), (4.7) и (4.9), находим что

$$\varphi_{\text{ст}} = c x^{\lambda} (-i)^{-1/2} (1-i^2) F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, 1-i^2\right) \quad (4.10)$$

Вычислив производную $\frac{\partial \varphi_{\text{ст}}}{\partial |\beta|}$ и используя граничное условие (3.18), получаем дифференциальное уравнение для определения очертающей стенок

$$\begin{aligned} \frac{d|\beta_{\text{ст}}|}{dx} = & \frac{\text{ctg } \gamma}{4g_0} x^{-1/2} (-i)^{1/2} \left[(1+3i^2) F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, 1-i^2\right) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{8} i^2 (1-i^2) F\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}, 3, 1-i^2\right) \right] \quad (4.11) \end{aligned}$$

с условием

$$|\beta_{\text{ст}}| = |\beta_0| \quad \text{при } x = x_0$$

Таким образом, уравнение (4.11) в дифференциальной форме определяет ту форму стенок, при которой решение уравнения (3.17) можно представить в автомодельной форме. В общем случае интегральные кривые дифференциального уравнения (4.11) находятся численно.

Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳՅԱՆ

ԲՈՒՌՆ ԸՈՍԱՆՔԻ ԸԱՇՎԱՐԿԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԵՍ ԹԵՔՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ
ԲԱՑ, ԼԱՅՆԱՑՈՂ ՉՐՇՈՒՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Հետազոտվում է հարթ, թեթևահատակ ունեցող և հոսանքի ուղղությամբ թեթևահատակ լայնացող բաց ջրատարում գերկրիտիկական հոսանքի բնթացքը: Գտնվում են բերվում միաչափ և երկչափ հոսանքների տիրույթները պլանում միաչափից սահմանադատող խարտիտերիտիկների հավասարումները:

Ցույց է տրվում, որ այդ հավասարումներով որոշվող կորերը մոտ են մոտափոր կարվածքի ծայրերից եկող և սիմետրիայի առանցքային զուգահեռ ուղիղներին:

Հոսանքի պարամետրերը (արագության բաղադրիչները, խորությունը) վերածվում են ախմպտոտիկ շարքերի և հաշվում են այդ շարքերի առաջին և մոտավոր երկրորդ անդամները:

Գտնվում է առաջին մոտավորությամբ ստացված հավասարման ավտոմոդիլ լուծումը և որոշվում է այդ լուծմանը համապատասխանող պատերի ձևը:

CALCULATION OF TURBULENT FLOW IN AN EXPANDING
OPEN CHANNEL WITH A STEEP LONGITUDINAL SLOPE

G. S. BEZIRGUENIAN

S u m m a r y

The behaviour of supercritical flow in an open channel with a plane sloping bed, expanding slightly downstream, is examined. The equations of characteristics, dividing in plan the region of one-dimensional flow from that of two-dimensional flow, are derived. These are shown to be quite close to the straight lines, passing from the ends of the inlet section, parallel to the channel's axis of symmetry. The parameters of the flow (components of velocity, depth) are expanded into asymptotic series and the first, and approximately the second terms of these series, are calculated. A homogeneous solution for the equation, obtained in a first approximation, is found and the shape of the walls, corresponding to this solution, is defined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мелещенко Н. Г. Плоская задача гидравлики открытых водотоков. Известия ВНИИТ, т. 36, 1948.
2. Франкль Ф. И. Теоретический расчет неравномерного бурного течения на быстротоке. Киргизский гос. университет. Тр. физ.-мат. факультета. Вып. 3, 1956.

3. Шериков И. А. О плоской задаче растекания бурного потока несжимаемой жидкости. Известия АН СССР, отд. техн. наук, № 1, 1958.
4. Вумерон С. П. Плоская задача гидравлики открытых водотоков в случае бурного нереверсного течения. Известия ВНИИТ, т. 40, 1949.
5. Irpen A. T., Dawson J. H. Design of channel contraction. Transactions of ASCE, vol. 116, 1951.
6. Rouse Hunter, Bhoota B. V. and En-Jan-Hsu. Design of channel expansions. Transactions of ASCE, vol. 116, 1951.
7. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. Изд. «Энергия», М., 1967.
8. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Изд. «Энергия», Л., 1971.
9. Куропт Р. Уравнения с частными производными. Изд. «Мир», М., 1961.
10. Проблемы механики, т. 1 ИЛ, М., 1955.
11. Рыжик Н. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. тех.теорет. литер. М.-Л., 1951.
12. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике. Изд. тех.теор. литер. М., 1957.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. «Наука», фи-матлит., М., 1965.