

Л. Д. АЗАТЯН

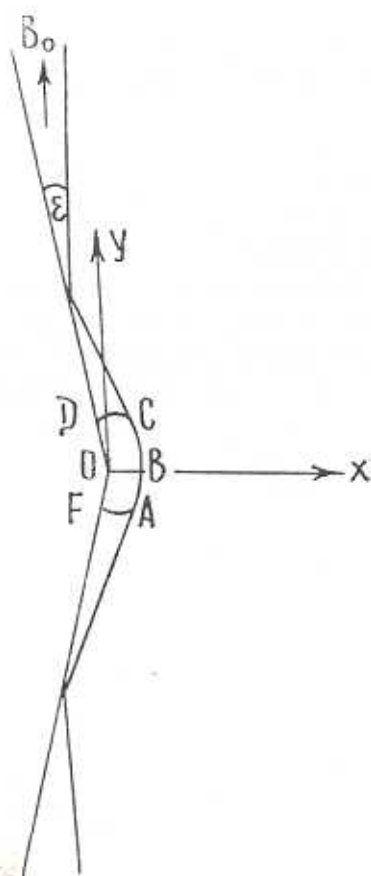
ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОЙ МАГНИТОГАЗО-
ДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО КЛИНА

В настоящей работе рассматривается нестационарная пространственная задача о движении электропроводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле при дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к π . При отсутствии магнитного поля задача о дифракции сильной ударной волны около тупого угла рассмотрена в [1]. Методом, отличным от [1], решение соответствующих плоской и осесимметричной дифракционных задач рассмотрено в [2], [3]. Одномерные задачи с магнитогазодинамическими ударными волнами рассмотрены довольно подробно в [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Пространственные задачи неустановившегося движения в магнитной газодинамике изучены сравнительно мало. Задачи о распространении слабых ударных волн в магнитной газодинамике рассмотрены в [10], [11], [12]. Задача о проникании тупого клина в электропроводящую жидкость при наличии слабой магнитогазодинамической ударной волны рассмотрена в [13]. Как указано в [14], в магнитной газодинамике почти отсутствуют результаты по решению пространственных нестационарных задач, вместе с тем решение задач по отражению магнитогазодинамических ударных волн от преград представляет как теоретический, так и практический интерес.

В § 1 настоящей работы решается задача об отражении сильной магнитогазодинамической ударной волны, распространяющейся в электропроводящей жидкости или газе, от тупого клина при наличии однородного начального магнитного поля. Возникающее возмущенное движение будет плоским, причем плоскость основного движения перпендикулярна ребру клина (линии пересечения граней). Начальное магнитное поле параллельно линии пересечения ударной волны с плоскостью основного движения. Определены параметры газа позади падающей и плоской отраженной от клина ударных волн. Показано, что индуцированное магнитное поле за отраженным скачком параллельно клину. Далее методом [15] граничная задача в области неравномерного течения приводится к граничной задаче для определения аналитической функции, которая решается методом [1]. Приведены результаты расчетов параметров за падающей и отраженной плоскими волнами, а также распределение давления вдоль стенки.

В § 2 приведены окончательные результаты задачи об отражении сильной магнитогазодинамической ударной волны от тупого клина при начальном магнитном поле, параллельном ребру клина.

1. Пусть фронт плоской ударной волны движется в идеально проводящем газе в магнитном поле со скоростью V_0 и в момент времени $t=0$ сталкивается с углом, стороны которого образуют со скачком малый угол ε . Движение предположено плоским. Начало координат поместим



Фиг. 1.

в вершине угла, ось Ox направим по оси клина вправо, а ось Oy — вертикально вверх. Начальное магнитное поле B_0 параллельно линии пересечения плоскости скачка с плоскостью основного течения, направление же движения скачка совпадает с отрицательным направлением оси Ox . Для некоторого значения $t \neq 0$ картина движения показана на фиг. 1. Ввиду малости параметра ε влияние угла можно рассматривать как малое возмущение отраженного скачка. Прямолинейные участки отраженной волны, исходящие из точек на стенках, до которых дошла падающая волна в данный момент, будут соединены криволинейной частью отраженной ударной волны, которая является результатом дифракции от вершины. Обозначим индексом 0 параметры покоящегося газа впереди падающей волны, индексами 1 и 2 — значения этих параметров соответственно за фронтом падающей волны и прямолинейной части отраженной волны. Значения параметров газа в области возмущенного течения снабдим индексом 3. Определим течение за падающей ударной волной. Параметры потока за падающим скачком постоянны и определяются из соотношений на прямом скачке уплотнения. Исключая из этих условий давление p_1 , плотность ρ_1 , магнитное поле B_1 , получим следующее кубическое уравнение для скорости частиц газа g_1 за падающим скачком:

$$g_1^3 + \frac{[2\gamma p_0 + \gamma a_1^2 \rho_0 - (\gamma + 3)\rho_0 V_0^2]}{(\gamma + 1)\rho_0 V_0} g_1^2 - \frac{2[\gamma p_0 + a_1^2 \rho_0 - \rho_0 V_0^2]}{(\gamma + 1)\rho_0} g_1 - \frac{a_1^2 V_0}{3} = 0 \quad (1.1)$$

где

$$a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$$

Уравнение (1.1) имеет три вещественных корня g_1 , из которых физически осуществимо одно значение корня, равное при $a_1=0$ скорости частиц газа за падающим скачком в газовой динамике

$$g_1 = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)M^2} V_0$$

Здесь $M = \frac{V_0}{c_0}$ — число Маха падающего скачка, c_0 — скорость звука перед падающей ударной волной. Условия на скачке уплотнения дают значения остальных параметров за падающим скачком

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\rho_0 V_0}{(g_1 - V_0)}, & B_1 &= -\frac{B_0 V_0}{(g_1 - V_0)} \\ p_1 &= p_0 + \rho_0 V_0 g_1 + \frac{(g_1 - 2V_0) B_0^2 g_1}{8\pi (g_1 - V_0)^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Определим течение за отраженным плоским скачком. За отраженной ударной волной и стенками угла вне области возмущенного течения влияние дифракции вершины не сказывается. В этой части отражение происходит так же, как от твердой бесконечной стенки. Параметры потока здесь постоянны и определяются из соотношений на косом скачке уплотнения [16]

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \rho_1 (g_{1n} - V_{00}) &= \rho_2 (g_{2n} - V_{00}) \\ p_1 + \rho_1 (g_{1n} - V_{00})^2 + \frac{B_{1n}^2}{8\pi} &= p_2 + \rho_2 (g_{2n} - V_{00})^2 + \frac{B_{2n}^2}{8\pi} \\ \rho_1 (g_{1n} - V_{00}) g_{1\tau} - \frac{B_{1n}^2}{4\pi} B_{1\tau} &= \rho_2 (g_{2n} - V_{00}) g_{2\tau} - \frac{B_{2n}^2}{4\pi} B_{2\tau} \\ (g_{1n} - V_{00}) B_{1\tau} - B_{1n} g_{1\tau} &= (g_{2n} - V_{00}) B_{2\tau} - B_{2n} g_{2\tau} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{(g_{1n} - V_{00})^2}{2} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{g_{1\tau}^2}{2} + \frac{B_{1\tau}^2}{4\pi\rho_1} - \frac{B_{1n} B_{1\tau} g_{1\tau}}{4\pi\rho_1 (g_{1n} - V_{00})} &= \\ = \frac{(g_{2n} - V_{00})^2}{2} + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{g_{2\tau}^2}{2} + \frac{B_{2\tau}^2}{4\pi\rho_2} - \frac{B_{2n} B_{2\tau} g_{2\tau}}{4\pi\rho_2 (g_{2n} - V_{00})} \end{aligned}$$

Здесь n — направление внешней нормали, τ — касательной к скачку, V_{00} — нормальная скорость отраженного скачка. Скорость газа g_2 за отраженной ударной волной параллельна стенке и направлена к точке N . Из условия неотрывности в точке N падающей и отраженной ударных волн имеем

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon V_{00}}{V_0} \quad (1.4)$$

где ε' — угол отражения плоской ударной волны от клина, который согласно (1.4) является величиной порядка ε . Записывая в (1.3)

$$\begin{aligned} g_{1n} &= -g_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon') \approx -g_1, & g_{1z} &= g_1 \sin(\varepsilon + \varepsilon') \approx g_1(\varepsilon + \varepsilon') \\ B_{1z} &= B_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon') \approx B_1(\varepsilon - \varepsilon'), & B_{1n} &= B_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon') \approx B_1 \end{aligned}$$

и исключая из второго, третьего и шестого уравнений (1.3) p_2 , p_2 , B_{2z} , в порядке ε получим кубическое уравнение для V_{00}

$$V_{00}^3 - \frac{(\gamma - 3)g_1}{2} V_{00}^2 - \left[\frac{(\gamma - 1)g_1^2}{2} - \frac{\gamma p_1}{\rho_1} - a_2^2 \right] V_{00} - \frac{(2 - \gamma)a_2^2 g_1}{2} = 0 \quad (1.5)$$

где

$$a_2^2 = \frac{B_1}{4\pi\rho_1}$$

По соображениям, что и выше, берется тот корень уравнения, который близок к значению

$$U_0 = \frac{2(\gamma - 1)M^2 - (\gamma - 3)}{(\gamma - 1)M^2} V_0 \quad (1.6)$$

дающему скорость отраженного скачка в газовой динамике и определяющемуся из (1.3) при $B=0$. Далее в том же приближении из (1.3) получим значения остальных параметров за плоским отраженным скачком:

$$t_2 = \frac{\rho_1(g_1 - V_{00})}{V_{00}}, \quad B_{2n} = B_1(\varepsilon + \varepsilon'), \quad B_{2z} = \frac{\rho_2 B_1}{\rho_1} \quad (1.7)$$

$$p_2 = p_1 + \rho_1 g_1 (g_1 + V_{00}) - \frac{B_1^2 (g_1 + 2V_{00}) g_1}{8\pi V_{00}}$$

И, наконец, четвертое уравнение системы (1.3) позволяет определить величину скорости газа $g_2 \approx g_2$ в области за прямолинейной частью отраженного скачка. С использованием (1.2), (1.4) и (1.7) для проекции вектора \hat{B}_2 на нормаль к стенке получим

$$B_{2N} = B_{2x} + \varepsilon B_{2y} = \frac{B_0}{\rho_0} |\varepsilon \rho_1 + \varepsilon'(\rho_1 - \rho_2)| = \varepsilon B_0$$

то есть силовые линии наддуцированного магнитного поля в области постоянного течения за плоским отраженным скачком не проникают в клин. Вообще говоря, для падающей ударной волны должны быть две отраженные ударные волны, быстрая и медленная. Но можно показать

что в порядке ε медленная ударная волна дает те же направления векторов \vec{B} и \vec{g} , что и быстрая ударная волна, причем угол наклона ее к стенке $\sim \varepsilon^2$, поэтому можно принять, что в основном порядке медленная ударная волна отсутствует.

Учет конечной (хотя и большой) электропроводности σ показывает на наличие узкого токового слоя вблизи поверхности клина шириной порядка \sqrt{L} , где $L \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Полагая $L \sim \varepsilon^2$, получим, что в указанном слое ускорения или сила Лоренца, действующие на частицы жидкости в направлении, касательном к стенке, конечны. Действительно,

$$J_z \sim \frac{K}{\sqrt{L}}, \quad J_z B_{zx} \approx KB_0$$

K — поверхностная плотность тока.

В области возмущенного течения, заключенной между скачком ABC , стенкой DEF и дугами DC и FA , представляющими фронт быстрой магнитозвуковой волны, порожденной вершиной угла, параметры потока выпишем в виде

$$p_3 = p_2 + p, \quad \rho_3 = \rho_2 + \rho, \quad \vec{g}_3 = \vec{g}_2 + \vec{g}, \quad \vec{B}_3 = \vec{B}_2 + \vec{b} \quad (1.8)$$

где p, ρ, g, b имеют порядок ε . Как следует из четвертого уравнения системы (1.3), $\vec{g}_2 \sim \varepsilon$, следовательно, $\vec{g}_3(u, \omega)$ также будет иметь порядок ε . При подстановке (1.8) в основную систему уравнений магнитной газодинамики и линеаризации по ε получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial t} &= B_2 \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial b_y}{\partial t} &= -B_2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{B_2}{4\tau\rho_2} \left(\frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_2 c_2^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

С учетом автомодельности задачи уравнения (1.9) можно записать в переменных

$$\xi = \frac{x}{c_2 t}, \quad \tau = \frac{y}{c_2 t}, \quad \text{где } c_2 = \left(\frac{\tau \rho_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

В плоскости ξ, η стенку DEF и скачок ABC можно аппроксимировать прямолинейными отрезками (фиг. 2); причем на стенке ξ будет равно нулю, а на искривленном скачке

$$\xi = \frac{V_{\infty} x'}{c_2} = \frac{V_{\infty}}{c_2} = k_0 \quad (1.10)$$

Как и в задаче газовой динамики, здесь $k_0 < 1$, что видно также из расчетов, приведенных далее. На стенке из условия $g_{\xi\xi} = 0$ следует, что

при $\xi = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. Из первого уравнения системы (1.9) имеем: при $x = \xi = 0$, $b_x \rightarrow \text{const}$.

Поскольку на дугах DC и FA возмущения отсутствуют, то есть в точках D и F $b_x = 0$, следует принять $b_x = 0$ на всей стенке DEF . И, наконец, из системы (1.9) следует, что можно полагать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } x = \xi = 0 \quad (1.11)$$

На дугах DC и FA возмущения отсутствуют, следовательно, на этих дугах

$$p = 0 \quad (1.12)$$

Для нахождения граничного условия на $\xi = k_0$ представим возмущенный фронт ударной волны в виде

$$\xi = k_0 + f(\eta)$$

где $f(\eta)$ — функция, определяющая неизвестную форму ударной волны.

Линеаризуя относительно параметров с индексом 2 соотношения вида (1.3) для искривленной части скачка, получим некоторую систему уравнений, решение которой после исключения функции f имеет вид

$$u = D_0 p_0^*, \quad \gamma \frac{\partial w}{\partial \gamma} = E_0 \frac{\partial p_0^*}{\partial \gamma}, \quad \gamma \frac{\partial b_{0x}}{\partial \gamma} = L_0 \frac{\partial p_0^*}{\partial \gamma}, \quad b_{0y} = C_0 p_0^* \quad \text{на } \xi = k_0 \quad (1.13)$$

где коэффициенты следующие:

$$D_0 = \frac{[4\pi V_{\infty} g_1 p_2^2 (\gamma - 1) - (\rho_2 - \rho_1) (4\pi \gamma \rho_2 V_{\infty}^2 + 4\pi \gamma p_2 + B_2^2)] c_2}{(\gamma - 1) (4\pi \rho_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) g_1 \rho_2 - V_{\infty} (\rho_2 - \rho_1) [4\pi (\gamma - 1) \rho_2 V_{\infty}^2 + 8\pi \gamma p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$E_0 = \frac{[B_2 (B_2 - B_1) - 4\pi \rho_2 V_{\infty} g_1] (B_2^2 - 4\pi \gamma p_2 - 4\pi \rho_2 V_{\infty}^2)}{4\pi V_{\infty} (\gamma - 1) (4\pi \rho_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) g_1 \rho_2 - V_{\infty} (\rho_2 - \rho_1) [4\pi (\gamma - 1) \rho_2 V_{\infty}^2 + 8\pi \gamma p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$L_0 = \frac{(B_2 - B_1) (B_2^2 + 4\pi \gamma p_2 - 4\pi \rho_2 V_{\infty}^2) \rho_2^{\frac{1}{2}}}{(\gamma - 1) (4\pi \rho_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) g_1 \rho_2 - V_{\infty} (\rho_2 - \rho_1) [4\pi (\gamma - 1) \rho_2 V_{\infty}^2 + 8\pi \gamma p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$C_0 = \frac{4\pi\gamma_2^{\frac{1}{2}}c_2B_2[(\gamma_1 - 1)\rho_2g_1 - (\gamma_1 + 1)(\rho_2 - \rho_1)V_{00}]}{(\gamma_1 - 1)(4\pi\rho_2V_{00}^2 - B_2^2)g_1\rho_2 - V_{00}(\rho_2 - \rho_1)[4\pi(\gamma_1 - 1)\rho_2V_{00}^2 + 8\pi\gamma_1\rho_2 - (\gamma_1 - 1)B_2^2]}$$

$$\rho_0^* = \frac{p_2 - p_1}{c_2^2\rho_2}, \quad b_0 = \frac{b}{\rho_2^{\frac{1}{2}}} - \text{вариации давления и магнитного поля,}$$

имеющие размерность скорости.

Уравнение (1.13) на ударной волне можно написать для одной только функции ρ_0^* , если использовать уравнения (1.9), записанные в переменных ξ, η

$$\frac{\partial \rho_0^* / \partial \xi}{\partial \rho_0^* / \partial \eta} = \frac{M_1 \eta - M_2 \eta^{-1}}{M_3}$$

$$M_1 = D_0 + k_0 - \frac{B_2 C_0}{4\pi k_0 c_2^2 \rho_2^{\frac{1}{2}}} - \frac{B_2^2}{4\pi k_0 c_2^2 \rho_2} \quad (1.15)$$

$$M_2 = E_0 k_0 - \frac{B_2^2 E_0}{4\pi k_0 c_2^2 \rho_2} - \frac{B_2 L_0}{4\pi c_2 \rho_2^{\frac{1}{2}}}, \quad M_3 = 1 - k_0^2 + \frac{B_2^2}{4\pi c_2^2 \rho_2}$$

Наряду с условием (1.15) берется условие, заключающееся в том, что изменение ω вдоль скачка от центра до вершины равно g_2 ,

$$\int \frac{\partial \omega}{\partial \eta} d\eta = \int \frac{E_0}{\eta} d\rho_2^* = g_2 \quad (1.16)$$

Для решения сформулированной граничной задачи по решению системы уравнений (1.9) при граничных условиях (1.11), (1.12), (1.15) и (1.16) применяется метод Смирнова-Соболева, который справедлив для произвольной гиперболической системы с постоянными коэффициентами для 3-х независимых переменных x, y, t и согласно которому можно искать решение системы (1.9) в виде

$$u = \operatorname{Re} V_x(z), \quad \omega = \operatorname{Re} V_y(z), \quad b_x = \operatorname{Re} B_x(z) \quad (1.17)$$

$$b_y = \operatorname{Re} B_y(z), \quad p = \operatorname{Re} P(z)$$

где $V_x(z), V_y(z), B_x(z), B_y(z), P(z)$ — аналитические функции переменной z , зависящей от x, y, t в виде

$$xy + \beta(z)x = t \quad (1.18)$$

Подставляя (1.17) в (1.9), получим уравнения, из которых можно получить соотношения

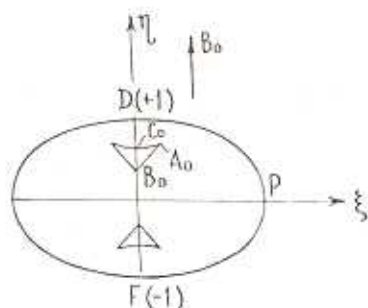
$$V_x'(z) = \frac{\beta}{\rho_2^{\frac{1}{2}}} P'(z), \quad V_y'(z) = \frac{x}{\rho_2} P'(z), \quad B_x'(z) = -\frac{\alpha\beta}{\rho_2^{\frac{1}{2}}} P'(z)$$

$$B_y'(z) = \frac{\beta^2}{\rho_2^{\frac{1}{2}}} P'(z), \quad \mu_0 = 1 - \frac{B_2^2}{4\pi\rho_2} (x^2 + \beta^2)$$

и дисперсионное уравнение для $\beta(\alpha)$, решение которого в переменных $z_1 = \alpha c_2$, $\xi_1 = \xi c_2$ имеет вид

$$\beta(z) = \sqrt{\frac{(1 - a_1'^2 z^2)(1 - z^2)}{(1 + a_1'^2 - a_1'' z^2)}}, \quad \text{где } a_1'^2 = \frac{B_0^2}{4\pi^2 c_2^2} \quad (1.19)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 отбрасывается. Подставляя значение $\beta(\alpha)$ в (1.18), получим относительно α уравнение четвертого порядка. Путем графического построения можно показать, что это уравнение имеет два вещественных корня α_1, α_2 , остальные же два значения α комплексно сопряженные. Из них мы берем одно значение α в нижней полуплоскости. В плоскости α функция $\beta(\alpha)$ имеет точки ветвления:



Фиг. 3.

$$\alpha = +1, \quad \pm \frac{1}{a_1'}, \quad \pm \frac{1}{a_1'} \sqrt{1 + a_1'^2}$$

Как известно, уравнение точечных волн, произведенных в момент $t = 0$ в вершине угла, дается огибающей плоских волн в виде

$$\begin{aligned} z_0 z_1 + \beta(z_0) \xi &= -1 \\ z_1 + \beta'(z_0) \xi &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

причем $z_0, \beta(z_0)$ действительны.

Здесь быстрой магнитозвуковой волне (Фиг. 3) соответствует отрезок $(-1, +1)$; состоящий из двух берегов, причем на нижнем берегу разреза берем $\beta(\alpha) > 0$, тогда согласно выбору ветви $\beta(\alpha)$ волне DPF будет соответствовать нижний берег разреза (Фиг. 4). На верхнем берегу разреза $(-1, +1)$, $\beta(\alpha) < 0$, так как при полном обходе точки $\alpha = +1$ в положительном направлении $\arg \beta(\alpha)$ становится равным π . Исследования, которые можно провести для медленной магнитозвуковой волны, показывают, что $\beta(\alpha)$ действительное (отрицательное на нижнем берегу, положительное, на верхнем), причем точке $\alpha = \frac{1}{a_1'} \sqrt{1 + a_1'^2}$ (Фиг. 4) соответствует точка B_0 , точке $z = \frac{1}{a_1'} - C_0$, а точке $\alpha = \alpha_1$ соответствует точка A_0 , в которой $\beta'(\alpha_1) = 0$, что соответствует бесконечной кривизне волны в точке A_0 (Фиг. 3).

Значит в нашей задаче при магнитном поле, параллельном оси Oy , можно полагать для всех функций, в том числе для p_0

$$p_0 = \operatorname{Re} \psi(z) \quad (1.21)$$

где α определяется из уравнения

$$\alpha z_1 + \beta(z) \xi = -1 \quad (1.22)$$

Решение (1.21) будет описывать все поле неравномерного течения, включая окрестность медленной магнитозвуковой волны, хотя, строго

говоря, в окрестности особых точек медленной магнитозвуковой волны нужно учитывать нелинейные эффекты.



Фиг. 4.

Вообще говоря, можно найти решение поставленной задачи для произвольного вида функции $\beta(\alpha)$, однако для получения замкнутой аналитической формы решения нужно иметь сравнительно простую форму кривой в плоскости $\frac{1}{z}$, представляющей образ скачка $\xi = k_0$ в плоскости ξ, η . Для эффективного конформного отображения образа области возмущенного движения в плоскости $\frac{1}{z}$ на каноническую область предполагаем параметр a_1^{*2} малым и разлагаем $\beta(z)$ в ряд по параметру a_1^{*2}

$$\beta(z) \approx \beta_0(z) + \frac{\partial \beta(z)}{\partial a_1^{*2}} \Big|_{a_1^{*2}=0} a_1^{*2} = \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right) \sqrt{1-z^2} \quad (1.23)$$

Это разложение верно всюду, кроме окрестности точек

$$z = \pm \frac{1}{a_1^*}, \quad z = \pm \frac{\sqrt{1-a_1^{*2}}}{a_1^*}$$

В статье оно используется лишь вблизи ударной волны. Подставляя (1.23) в (1.22), определяя из полученного уравнения $\frac{1}{z} = \zeta + i\eta$ и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\zeta = \frac{\eta}{1-\zeta^2}, \quad \eta = \frac{\zeta \sqrt{1-\zeta^2-\eta^2}}{1-\zeta^2} \quad (1.24)$$

где

$$\zeta = z \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right)$$

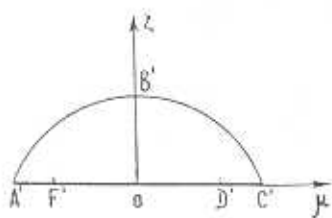
Область плоскости ζ, η переходит в плоскости ξ, η в область между частью $A'C'$ действительной оси ξ и эллипсом (фиг. 5)

$$\frac{k_0^{*2} \eta^2}{k_0^{*2}} + k_0^{*2} \xi^2 = 1 \quad (1.25)$$

где

$$k_0^* = k_0 \left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right), \quad k_0^{*2} = \sqrt{1-k_0^{*2}}$$

Промежутки $-\frac{1}{k_0^*} < \zeta < -1$, $-1 < \zeta < 1$, $1 < \zeta < \frac{1}{k_0^*}$ действительной оси соответствуют дуге AF , стенке DEF и дуге DC . Эллипс (1.25) соответствует ударной волне ABC . Теперь применяем конформное преобразование



Фиг. 5.

$$K = \frac{2i\omega}{1-\omega^2}, \quad K \equiv \zeta + i\eta \quad (1.26)$$

и вводим плоскость $z = \bar{\omega}$, причем $z = \lambda + i\nu$. Отделяя в (1.26) действительную и мнимую части, получим

$$\zeta = \frac{2(1 + \lambda^2 + \nu^2)\nu}{(1 + \lambda^2 + \nu^2)^2 - 4\lambda^2}, \quad \eta = \frac{2(1 - \lambda^2 - \nu^2)\lambda}{(1 + \lambda^2 + \nu^2)^2 - 4\lambda^2} \quad (1.27)$$

Преобразование (1.27) переводит область $A'B'C'$ в область $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на плоскости $\lambda = \gamma \cos \theta$, $\nu = \gamma \sin \theta$. Отрезок $D'F'$ перейдет в часть $-1 < \nu < 1$ мнимой оси, отрезки $F'A'$ и $D'C'$ перейдут в дуги окружности единичного радиуса, а эллипс (1.25) преобразуется в дугу окружности (фиг. 6)

$$2\gamma \cos \theta = k_0^* (1 + \gamma^2) \quad (1.28)$$

которая пересекает окружность $\gamma = 1$ в точке (k_0^*, k_0^*) под прямым углом.

Преобразуем соотношение (1.15) для производных давления по направлению нормали и касательной к дуге окружности (1.28), соответствующей ударной волне; при последующем конформном преобразовании они перейдут в производные по нормали и касательной к контуре, в который переходит окружность (1.28) при преобразовании. Используя упрощенную формулу (1.23) вблизи ударной волны, можно для перехода от плоскости ξ, η к плоскости ρ, θ воспользоваться преобразованием Буземана

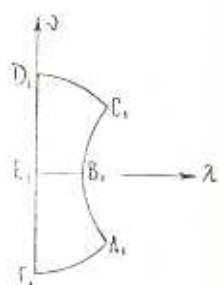
$$\xi' = \frac{2\gamma \cos \theta}{1 + \gamma^2}, \quad \eta' = \frac{2\gamma \sin \theta}{1 + \gamma^2} \quad (1.29)$$

что следует из (1.24) и (1.27). Так как на дуге ABC

$$\sin \theta = k_0^* \cos \alpha_0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial \nu} = \frac{\partial p_0}{\partial s} \cos \alpha_0 + \frac{\partial p_0}{\partial n} \sin \alpha_0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\partial p_0}{\partial s} \sin \alpha_0 - \frac{\partial p_0}{\partial n} \cos \alpha_0$$

где α_0 — угол между направлением касательной в произвольной точке дуги ABC и лучом, проведенным из начала координат в точку касания, то условие (1.15) в плоскости ρ, θ будет иметь вид



Фиг. 6.

$$\frac{\partial p_0 / \partial n}{\partial p_0 / \partial s} = \frac{(M_2 k_0^{*2} k_0^* - M_1 k_0^{*2}) \operatorname{tg} \theta - M_2 k_0^{*2} k_0^{*-1} \operatorname{ctg} \theta}{M_2 (1 - k_0^{*2} \sec^2 \theta)^{1/2}} \quad (1.30)$$

где

$$k_1^* = 1 - \sqrt{1 - k_0^{*2}}, \quad k_0^* = k_0^* - \frac{a_1^2 k_0^{*2}}{4k_0^*}$$

На дугах $\zeta = 1$, $\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$, а на прямой $D_1 E_1 F_1$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$),

$\frac{\partial p_0}{\partial n} = 0$. Функция

$$z_1 = \ln \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \pi i, \quad \text{где } z = \zeta e^{i\theta} \quad (1.31)$$

переводит область $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ в прямоугольник (фиг. 7)

$$0 < x_1 < x_2, \quad 0 < y_1 < \pi \quad (1.32)$$

причем на $A_1 B_1 C_1$ значение z_1 будет равно

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k_0^*}{1-k_0^*} + i \left(\frac{1}{2} \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\epsilon \sin \theta}{1-\zeta^2} \right) = x_1 - i y_1 \quad (1.33)$$

Условие (1.30) на ударной волне перейдет в

$$-\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial p_0}{\partial y_1} \left[\left(\frac{M_1 k_0^{*2}}{M_2} - k_0^* \right) \cos^2 y_1 - \frac{M_2 k_0^{*2}}{k_0^{*2} M_3} \right] \quad (1.34)$$

на $D_1 C_1$, $F_1 A_1$ и $D_1 E_1 F_1$ имеем

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_1} = 0 \quad (1.35)$$

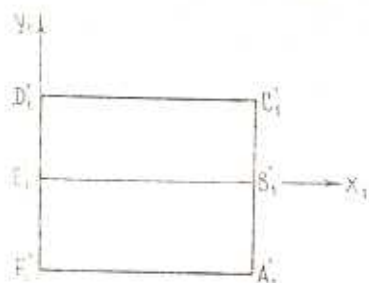
Итак, задача заключается в определении функции p_0^* , удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри прямоугольника (1.32) и граничным условиям (1.34), (1.35). Далее задача решается методом Лайтхилла [1].

Решение окончательно находится в виде [1]

$$\omega(z_1) = K_0 \int \frac{\vartheta_2(-iz_1, g^0)}{\vartheta_1(-iz_1, g^0)} W(z_1) \quad (1.36)$$

где ϑ_2 , ϑ_1 — тета-функции [18]

$$W(z_1) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2-a^n - b^n) n^{-1} \operatorname{csch} 2n\pi \operatorname{ch} 2nz_1 \right\} \quad (1.37)$$



Фиг. 7.

$$a = \frac{x^* - 1}{x^* + 1}, \quad b = \frac{g^* - 1}{g^* + 1}, \quad g^* = \frac{1 - k_0^*}{1 + k_0^*}$$

а K_0 определяется из условия (1.16). Для распределения давления на стенке имеем

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial y_1} \right)_{y_1=0} = -K_0 \frac{\partial_2(y_1)}{\partial_4(y_1)} W'(iy_1)$$

По формулам

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{p_1}{p_0} = -\frac{1}{(\bar{g}_1 - 1)}, & \bar{B}_1 &= \frac{B_1}{B_0} = \bar{g}_1 \\ \bar{p}_1 &= \frac{p_1}{\rho_0 V_0^2} = \frac{1}{\gamma M^2} \bar{g}_1 = \frac{\bar{a}_1^2 \bar{g}_1 (\bar{g}_1 - 2)}{2(\bar{g}_1 - 1)^2} \\ \bar{p}_2 &= \frac{p_2}{p_0} = \frac{\bar{g}_1 (\bar{g}_1 + \bar{V}_{00})}{\bar{V}_{00}}, & \bar{B}_2 &= \frac{B_2}{B_0} = \bar{g}_2 \\ \bar{p}_2 &= \frac{p_2}{\rho_0 V_0^2} = \bar{p}_1 - \bar{g}_1 \bar{g}_2 (\bar{g}_1 + \bar{V}_{00}) - \frac{\bar{a}_1^2 \bar{B}_1^2 \bar{g}_1 (\bar{g}_1 + 2\bar{V}_{00})}{2\bar{V}_{00}^2} \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $\bar{a}_1^2 = \frac{B_2^2}{4\pi\rho_0 V_0^2}$, $\bar{g}_1 = \frac{g_1}{V_0}$ и $\bar{V}_{00} = \frac{V_{00}}{V_0}$ определяются из уравнений (1.1) и (1.5), записанных в безразмерных параметрах для $\gamma = \frac{7}{5}$. Кроме того, подсчитано значение

$$\frac{K_0}{\rho_0 V_0} = \frac{\bar{g}_2 k_0^{**}}{E_0}$$

$$; \int_0^{\beta_0} \frac{\partial_2(y_1)}{\partial_4(y_1)} |W'(x - iy_1)| \frac{(x_0 + \beta_0) \sin y_1 dy_1}{|\cos^2 y_1 + x_0^2 \sin^2 y_1| \sqrt{\cos^2 y_1 + \beta_0^2 \sin^2 y_1}}$$

где x_0 и β_0 определяются из уравнений

$$\frac{1}{x_0 + \beta_0} = \frac{M_1 k_0^{**2}}{M_3} - k_0^* - \frac{M_2 k_0^{**2}}{k_0^{**2} M_3}, \quad \frac{x_0 \beta_0}{x_0 + \beta_0} = \frac{M_2 k_0^{**2}}{k_0^{**2} M_3}$$

Вычислено также безразмерное давление \bar{p} на стенке по формуле

$$\bar{p} = p_2 - p_0^{1/2} (p_2 - p_0) \quad (1.39)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$M = 1.5$ $\tilde{a}_1 = 0$	$M = 1.5$ $\tilde{a}_1 = 0.01$	$M = 3$ $\tilde{a}_1 = 0$	$M = 3$ $\tilde{a}_1 = 0.01$	$M = \infty$ $\tilde{a}_1 = 0$	$M = \infty$ $\tilde{a}_1 = 0.01$
\tilde{p}_1	0.7804	0.7801	0.8201	0.8191	0.8333	0.8311
\tilde{r}_1	1.8621	1.8612	3.8571	3.8522	5.9999	5.9839
\tilde{g}_1	0.4630	0.4627	0.7407	0.7404	0.8333	0.8329
\tilde{B}_1	1.8621	1.8612	3.8571	3.8522	5.9999	5.9839
\tilde{p}_2	1.7223	1.7206	4.1005	4.0890	6.6667	6.6272
\tilde{r}_2	3.2312	3.2287	10.8701	10.8458	21.0000	20.9012
\tilde{g}_2	0.7544	0.7539	1.0425	1.0415	1.1111	1.1094
\tilde{B}_2	3.2312	3.2287	10.8701	10.8458	21.0000	20.9012
\tilde{c}_2	0.8638	0.8637	0.7267	0.7265	0.6667	0.6663
$K_0 = U_0$	0.1713	0.1711	0.1599	0.1566	0.1346	0.1343
$\tilde{p}(0)$	0	0	0	0	0	0
$\tilde{p}(\pi/6)$	0.1856	0.1855	0.2128	0.2113	0.2269	0.2222
$\tilde{p}(\pi/3)$	0.3444	0.3442	0.3851	0.3833	0.3941	0.3894
$\tilde{p}(\pi/2)$	0.4088	0.4085	0.4461	0.4445	0.4468	0.4428
$p_3(0)$	1.7223	1.7206	4.1005	4.0891	6.6667	6.6272
$p_3(\pi/6)$	1.6962	1.6946	4.0149	4.0043	6.5151	6.4800
$p_3(\pi/3)$	1.6739	1.6723	3.9457	3.9353	6.4039	6.3692
$p_3(\pi/2)$	1.6649	1.6633	3.9211	3.9108	6.3688	6.3341

Как показывают численные расчеты, основные параметры движения, то есть давление, плотность и т. д. уменьшаются с ростом параметра \tilde{a}_1^2 , характеризующего магнитное поле при фиксированном числе Маха падающей ударной волны. Расчеты для распределения безразмерного давления \tilde{p} на стенке показывают, что качественно сохраняется картина, имеющая место в газовой динамике [1], и, кроме того, снова имеет место уменьшение давления \tilde{p} при увеличении параметра \tilde{a}_1^2 . По формуле (1.39) рассчитано также для $\varepsilon = \frac{1}{10}$ распределение полного давления p_3 на стенке, причем с увеличением \tilde{a}_1^2 давление p_3 уменьшается.

Из табл. 1 также видно, что основные параметры движения \tilde{p} и p_3 на стенке увеличиваются с ростом числа Маха при фиксированном значении параметра \tilde{a}_1^2 .

2. Подобным же образом решена задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны относительно клина при начальном магнитном поле, параллельном ребру клина. Не приводя выкладок, резюмируем окончательные результаты в виде табл. 2.

Таблица 2

	$M=1.5$ $\bar{a}_1=0$	$M=1.5$ $\bar{a}_1=0.01$	$M=3$ $\bar{a}_1=0$	$M=3$ $\bar{a}_1=0.01$	$M=\infty$ $\bar{a}_1=0$	$M=\infty$ $\bar{a}_1=0.01$
\bar{p}_1	0,7804	0,7801	0,8201	0,8191	0,8333	0,8311
\bar{z}_1	1,8621	1,8612	3,8571	3,8523	5,9999	5,9840
\bar{z}_1	0,4630	0,4627	0,7407	0,7404	0,8333	0,8329
\bar{B}_1	1,8621	1,8612	3,8571	3,8523	5,9999	5,9840
\bar{p}_2	1,7223	1,7206	4,1005	4,0891	6,6667	6,6272
\bar{z}_2	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
\bar{z}_2	0,7545	0,7541	1,0425	1,0424	1,1111	1,1110
\bar{B}_2	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
$K_0=U_0$	0,1713	0,1712	0,1569	0,1568	0,1346	0,1345
$\bar{p}(0)$	0	0	0	0	0	0
$\bar{p}(\tau=6)$	0,1857	0,1858	0,2128	0,3016	0,2269	0,2292
$\bar{p}(\tau=3)$	0,3445	0,3446	0,3851	0,4720	0,3941	0,3962
$\bar{p}(\tau=2)$	0,4089	0,4091	0,4461	0,5180	0,4468	0,4487
$p_3(0)$	1,7223	1,7206	4,1005	4,0891	6,6667	6,6272
$p_3(\tau=6)$	1,6962	1,6946	4,0150	3,9681	6,5154	6,4753
$p_3(\tau=3)$	1,6739	1,6723	3,9457	3,8998	6,4039	6,3647
$p_3(\tau=2)$	1,6649	1,6633	3,9211	3,8814	6,3688	6,3298

Из табл. 2 видно, что основные параметры движения (давление, плотность и т. д.) за падающей и отраженной плоскими ударными волнами уменьшаются с ростом параметра \bar{a}_1^2 при фиксированном числе Маха падающей волны. Расчеты для распределения безразмерного давления \bar{p} и полного давления p_3 на стенке показывают, что с увеличением \bar{a}_1^2 значение \bar{p} увеличивается, в то время как полное давление p_3 снова уменьшается.

Автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи, обсуждение результатов и ценные советы.

Լ. Դ. ԱԶԱՏԻԱՆ

ՄԵՊԻ ՄՈՏ ՈՒԺԵՂ ԻՄԱԳԵՆՍԱԳԱԶԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱՆԱՅԻՆ ԱՐԺԻ
ԳԻՅՐԱԿՅԻՄՆԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԳԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ու ի մ

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է անհավասարաչափ հոսանքի տիրույթը π -ին մոտ անկյունից ուժեղ մագնիսագազադինամիկական հարվածային ալիքի անդրադարձման խնդրում բնկետդ ալիքին զուգահեռ մագնիսական դաշտի առկայությամբ: Անհավասարաչափ հոսանքի տիրույթում խնդիրը Ամիրնով-Սորոլեի մեթոդով բերված է ճնշումը բնորոշող անալիտիկ ֆունկցիայի համար եզրային խնդրին: Ենդիրը յուժված է կայթխիչի մեթոդով: Որոշված է ճնշման բաշխումը պատի վրա: Կատարված են թվային հաշվումներ:

THE PROBLEM ON DIFFRACTION OF A STRONG
MAGNETOGASDYNAMIC SHOCK WAVE AT A WEDGE

L. D. AZATIAN

S u m m a r y

A region of non-uniform flow is investigated in the problem on reflection of a magnetogasdynamics strong shock wave from an angle close to π in the presence of a magnetic field parallel to incident shock.

The problem for the above region is reduced by the Smirnov—Sobolev method to a boundary problem for analytic function (pressure). The solution is obtained by the Lighthill method. Wall-pressure distribution is determined and numerical calculation is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. Proc. Roy. Soc., London, A 201, 1950, 554—566.
2. Жигалко Е. Ф. Отражение ударной волны, близкое к нормальному, в линейном приближении. Вестник ЛГУ, 1970, № 13, вып. 3, 92—99.
3. Жигалко Е. Ф. Отражение ударной волны от жесткой стенки, близкое к нормальному, в линейном приближении (асесимметричный случай). Вестник ЛГУ, 1971, № 7, вып. 2, 77—83.
4. Куликовский А. Г. и Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика, М., Физматгиз, 1962.
5. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, т. 128, № 4, 1959.
6. Косан М. Н. Ударные волны в магнитной газодинамике. ПММ, т. XXIII, № 3, 1959.
7. Гогосов В. В. Взаимодействие магнетогидродинамических волн. ПММ, т. XXV, № 3, 1961.

8. Голосов В. В. Взаимодействие магнитогидродинамических волн с контактным и вихревым разрывом. ИММ, т. XXV, № 2, 1961.
9. Jeffrey A., Taniuti T. Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics. New-York, London, 1964.
10. Коробейникова В. П. Распространение слабых магнитозвуковых волн. Магн. гидродинамика, 1967, № 2, 25—31.
11. Минасян М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН АрмССР, т. LV, № 5, 1972.
12. Луговской Б. А. Распространение ударной волны. ПМТФ, № 3, 1952.
13. Минасян М. М. Проникание тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
14. Косин М. Н., Коробейникова В. П., Кузиковский А. Г., Любимов Г. А. Механика разреженного газа и магнитная гидродинамика. Механика в СССР за 50 лет, механика жидкости и газа, т. 2, 423—454.
15. Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. 12. ОНТИ, Л.—М., 1937.
16. Калихман Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1964.
17. Ваттсен Е. и Ватсон Г. Курс современного анализа, т. II. ОНТИ, М., 1934.