

С. И. КУКУДЖАНОВ

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ,
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ВСЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Исследуется влияние предварительно действующей изгибающей поперечной нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности консольной цилиндрической оболочки, на собственные частоты и формы собственных колебаний. Предполагается, что свободный край закреплен жестким кольцом, причем соединенные кольца с оболочкой шарнирные. Основное внимание уделяется наименьшим частотам, практически наиболее важным и наиболее чувствительным к внешним воздействиям.

При решении задачи для метода Бубнова-Галеркина использовался предложенный нами путь определения оптимальных начальных приближений собственного числа [2], с помощью которого можно избежать значительных трудностей, связанных с учетом большого числа членов искомого ряда. Начальные приближения были получены в виде формул. При учете же более высоких приближений использовалась ЭВМ. Получены кривые изменения низших частот в зависимости от геометрических параметров. Проведено сравнение с известным случаем колебания, когда на оболочку действует радиальное внешнее давление. Сравнение показало, что расхождение между низшими частотами для этих случаев будет существенным по мере возрастания интенсивности внешней нагрузки. Кроме того, необходимо отметить, что наличие зоны растяжения окружного напряжения влияет на некоторые частоты в сторону их увеличения при возрастании интенсивности предварительно действующей нагрузки. Высшие частоты практически не зависят от внешней нагрузки для приемлемого интервала (то есть когда нагрузка не превосходит своего критического значения).

Путь отыскания оптимальных начальных приближений собственного числа и главных гармоник ряда для методов Бубнова-Галеркина и Рунца заключается в следующем. В отличие от обычно используемого приема, индексы координатных функций заранее не фиксируются и представляют собой некоторую наперед неизвестную последовательность (n_k). Поэтому для искомой функции φ берется следующее представление:

$$\varphi = a_{n_1} \varphi_{n_1} + \dots + a_{n_l} \varphi_{n_l} \quad (*)$$

Тогда определение оптимальных начальных приближений собственного числа и главных гармоник ряда сводится к отысканию индексов (n_k), реализующих минимум соответствующего приближения собственного

числа при фиксированном числе гармоник; иначе говоря, наименьшее расхождение δ между точным значением собственного числа P и фиксированным k -ым приближением $P^{(k)}$ будет для тех индексов (n_k) , при которых $P^{(k)}$ принимает минимальное значение

$$\delta = |P - P^{(k)}|, \quad P^{(k)} = \min P^{(k)}(n_1, \dots, n_k)$$

так, если в ряде (*) ограничиться двумя членами, то наилучшим вторым приближением будет

$$\min P^{(2)}(n_1, n_2) = P^{(2)}(n_1^0, n_2^0)$$

а индексам n_1^0, n_2^0 , реализующим этот минимум, соответствует пара главных гармоник, наилучшим образом приближающаяся к точному решению по сравнению со всеми возможными парами.

Переходя к решению задачи, как обычно, предполагаем, что предварительно-напряженное состояние безмоментно, тогда

$$T_1^0 = pRz^2 \cos \varphi, \quad T_2^0 = -pR \cos \varphi, \quad S_0 = -2pRz \sin \varphi \quad (1)$$

Rz, Rz — координаты в осевом и окружном направлениях; R — радиус оболочки, p — интенсивность внешней нагрузки; T_1^0, T_2^0, S^0 — осевая, окружная и сдвигающее усилия безмоментного состояния.

Уравнение колебаний предварительно-напряженной оболочки в форме Батдорфа [1] имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma \nabla^4 \omega - \gamma^{-1} \frac{\partial^4 \omega}{\partial z^4} - \frac{1}{Eh} \left(T_1^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + T_2^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - 2S^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \varphi} \right) + \frac{\gamma R^2}{Lg} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \\ \gamma = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad \gamma^{-1} \nabla^4 = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

∇^2 — лапласиан, ω — прогиб, L, h — длина и толщина оболочки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; γ — удельный вес материала оболочки.

Подставляя (1) в (2), получаем уравнение с переменными коэффициентами.

Будем искать решение в виде следующего двойного ряда:

$$\omega = \cos \omega t \sum_{m, n} A_{mn} \sin \frac{m\pi R}{l} z \cos n_k \varphi \quad (3)$$

который удовлетворяет условиям свободного опирания. Индексы m , как обычно, принимают значения 1, 2, 3, ..., а индексы (n_k) представляют собой некоторую наперед неизвестную последовательность целых чисел. Отметим, что общность при этом не нарушается, так как каждое n_k (для фиксированного m) может пробегать все значения натурального ряда чисел.

Используя метод Бубнова-Галеркина в сочетании с данным подходом, получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_{mnk} :

$$A_{mnk}(M_{mnk} - i) + \frac{p_0}{2} \left\{ -A_{m(n_k+1)} d_{m(n_k+1)} - A_{m(n_k-1)} d_{m(n_k-1)} + \right. \\ \left. + \sum_l (\Delta_{n_k}^{lm} - 1) A_{l(n_k-1)} - \Delta_{n_k-1}^{lm} A_{l(n_k-1)} \right\} = 0 \quad (4)$$

$$M_{mnk} = \frac{m^2}{\gamma^2} (\alpha \beta_{mnk} + \beta \delta_{mnk}^{-1}), \quad \beta_{mnk} = \frac{(m^2 + \gamma^2 n_k^2)^2}{\gamma^2 m^2}, \quad \gamma = \frac{l}{\pi R} \\ \alpha = [12(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad d_{m(n_k \pm 1)} = (n_k \pm 1)(n_k \pm 1) - r_m \\ r_m = \frac{m^2 \pi^2}{3} - \frac{1}{2}, \quad \delta = \left(\frac{R}{h}\right)^2, \quad p_0 = \frac{\rho}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \quad (5)$$

$$\Delta_{n_k \pm 1}^{lm} = (-1)^{m-l} \frac{8lm}{l^2 - m^2} \left[\frac{l^2}{l^2 - m^2} \mp (n_k \pm 1) \right], \quad \lambda = \Omega_0 \sigma^2, \quad \Omega_0 = \frac{\gamma R^2}{E g} \delta$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta = 0$.

Ограничиваясь в начальном приближении шестью членами ряда (3), получаем систему шести уравнений относительно коэффициентов A_{mnk} . Последовательность (n_k) сразу выявляется на основании вида системы (4), а именно при $m=1$ ($n_1=n$, $n_2=n+1$, $n_3=n-1$), аналогично и для $m=2$. Это нетрудно усмотреть из следующего рассуждения, например, если в ряде (3) ограничиться двумя членами с неизвестными индексами n_1 и n_2 (причем $n_2 \neq n_1 \pm 1$), то получим систему двух несвязанных уравнений

$$A_{mn_1}(M_{mn_1} - i) = 0, \quad A_{mn_2}(M_{mn_2} - i) = 0$$

Поэтому, чтобы получить связанную систему, необходимо взять $n_2 = n_1 + 1$ (чтобы учесть коэффициент $A_{m(n+1)}$), либо $n_2 = n_1 - 1$ (для учета коэффициента $A_{m(n-1)}$).

Таким образом, определение оптимального приближения λ для данной задачи сводится к нахождению наименьшего значения λ только по одному индексу n .

Ограничимся в первом приближении двумя членами $m=1$ ($n_1=n$, $n_2=n+1$). После раскрытия соответствующего определителя для квадратного уравнения относительно λ получаем следующее выражение для меньшего корня:

$$\lambda = \frac{1}{2} (F_n^+ - \sqrt{(F_n^-)^2 + p_0^2 x^+}) \quad (6)$$

$$F_n^+ = M_{1n} \pm M_{1(n+1)}, \quad x^+ = (n^2 - 3.8)(n^2 + 2n - 2.8) \quad (7)$$

Определим стационарную точку для функции M_{1a} , при этом n будем считать непрерывным аргументом. Получаем единственную стационарную точку

$$n_0 = \left[\frac{\pi R}{l} \left(\varepsilon^{-1} - \frac{\pi R}{l} \right) \right]^{1/2}.$$

Легко показать, что это — точка минимума. Далее, учитывая интервалы возрастания и убывания составляющих функций, нетрудно получить, что минимум выражения (6) реализуется в интервале

$$n_0 - \gamma_1 \leq n_* \leq (n_0 + 1) + \gamma_2$$

γ_1, γ_2 — дополнения до целого числа.

Отметим следующее: если мы обычным способом будем брать индексы $n_1=0, n_2=1, \dots$ и просчитаем частоту, учитывая два члена, то получим значение λ_i , которое отличается от λ , просчитанного по формуле (6) (например, для случая $R/h = 170, l/R = 1, p = 0.25p_{cr}$) более, чем в 25 раз.

Это обусловлено тем, что обычным способом, ограничиваясь небольшим числом членов ряда, мы не в состоянии уловить главные гармоники, расположенные адали от мало существенных начальных гармоник, тогда как при рекомендуемом подходе берутся главные гармоники, за счет чего достигаются хорошие начальные приближения.

В данном примере пара главных гармоник $n_1^0 = 8, n_2^0 = 9$; в случае же более тонкой оболочки такой же длины, например, $R/h = 500$ $n_1^0 = 11, n_2^0 = 12$ по мере уменьшения толщины значения главных гармоник будут увеличиваться.

Еще более отдалены главные гармоники для второй частоты ($m=2$) и тем более для третьей ($m=3$) и т. д.

Первое приближение для второй частоты, аналогично предыдущему, получаем при $m=2$ ($n_1 = n, n_2 = n + 1$), а для третьей частоты при $m=3$ ($n_1 = n, n_2 = n + 1$), тогда

$$\lambda_i = \frac{1}{2} (F_{1a}^+ - \sqrt{(F_{1a}^-)^2 + p_0^2 \alpha_i^2}) \quad (i = 2, 3)$$

$$F_{1a} = M_{1a} \pm M_{1(n-1)}, \quad \alpha_i^2 = (n^2 - \gamma_1) [(n+1)^2 - \gamma_1]$$

$$\gamma_2 = 13.8, \quad \gamma_3 = 30.2$$

Аналогично предыдущему получаем, что $\min \lambda_2$ реализуется при

$$n^0 - \gamma_3 \leq n_* \leq (n_0 + 1) + \gamma_4, \quad n^0 = \left(\frac{2\pi R}{l} \left(\varepsilon^{-1} - \frac{\pi R}{l} \right) \right)^{1/2}$$

и для третьего собственного значения λ_3 в интервале

$$n^{00} - \gamma_3 \leq n_* \leq (n^{00} + 1) + \gamma_6, \quad n^{00} = \left[\frac{3\pi R}{l} \left(\varepsilon^{-1} - \frac{\pi R}{l} \right) \right]^{1/2}$$

где γ_k — соответствующие дополнения до целого.

Далее учитывая три члена ряда (3), после раскрытия соответствующего определителя получаем кубическое уравнение относительно λ .

Для получения дальнейших приближений с учетом данного подхода на ЭВМ система алгебраических уравнений записывалась в матричном виде

$$(B - \lambda E)A = 0, \quad A = \{A_{mk}\}, \quad B = \{B_{mk}^{iq}\}, \quad E = \{1\}$$

$$B_{mk}^{iq} = \delta_{q,k} M_{mk} - \delta_{|q-k|,1} \left\{ (q-k)[(n+\Delta n) + q] \left[(q-k)[(n+\Delta n) + q] - 2 \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{m^2 - 1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right\} 0,1 p_0 \Delta r \quad (m=i)$$

$$B_{mk}^{iq} = (-1)^{m+i} \delta_{|q-m|,1} \frac{8im}{i^2 - m^2} \left\{ \frac{i^2}{i^2 - m^2} - (q-k)[(n+\Delta n) - q] \right\} 0,1 p_0 \Delta r \\ (m \neq i)$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i=j), \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \Delta r = 0, 1, 2, \dots$$

При этом n_k и n_q представляются в виде

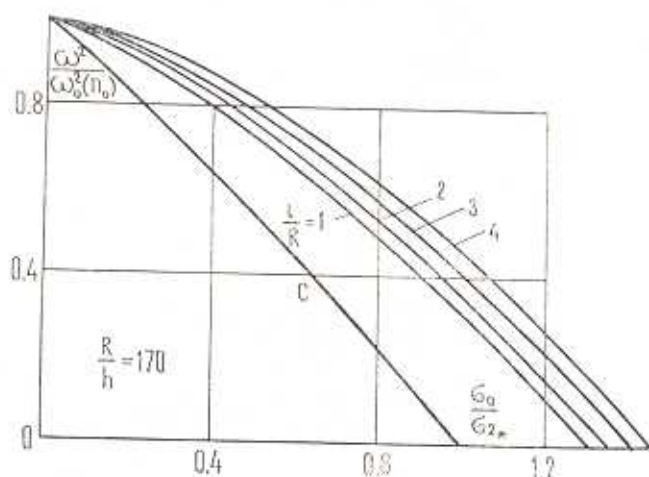
$$\begin{Bmatrix} n_k \\ n_q \end{Bmatrix} = (n + \Delta n) + \begin{Bmatrix} k \\ q \end{Bmatrix}, \quad \Delta n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{Bmatrix} k \\ q \end{Bmatrix} = 0, -1, +1, -2, +2, \dots$$

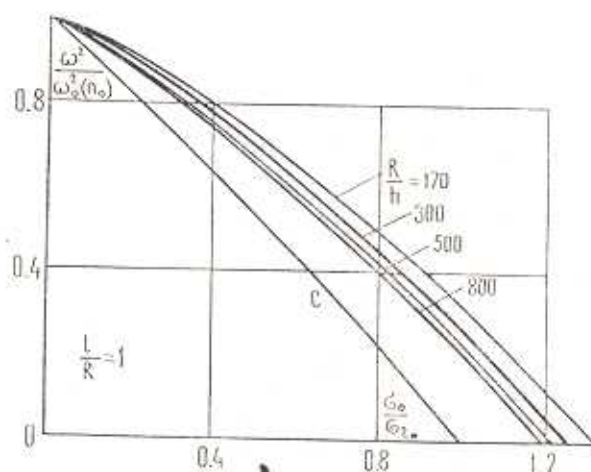
В данном представлении $(n+\Delta n)$ играет роль начального фиксированного значения n_1 (Δn характеризует перемещение n от точки k к точке q в интервале (8), начиная от $n = n_0 - \gamma_1$), k соответствует членам $n-1, n+1, n-2, n+2, \dots$

При решении брались члены $m=1, 2$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, -3$), $m=3, 4$ ($k=0, \pm 1$) то есть 20 главных гармоник. В зависимости от величины внешней нагрузки p_0 необходимое число главных гармоник для получения достаточно хороших результатов (таких, когда расхождение между предыдущим и последующим приближением составляет величина порядка 0,5%) различное. Так для малых значений $p_0 \leq 0,3 p_{кр}$ достаточно учесть шесть членов $m=1, 2$ ($k=0, \pm 1$), ибо добавление последующих членов несущественно. По мере увеличения p_0 увеличивается и необходимое число главных гармоник. При наибольших значениях p_0 , то есть близких к $p_{кр}$, учет всех вышеотмеченных 20 главных гармоник дает достаточно хорошее приближение, такое, что добавление дальнейших членов при увеличении m и $|k|$ не приводит к сколько-нибудь существенным изменениям. В частности, добавление соседних членов $m=1, 2$ ($k=\pm 4$), $m=3, 4$ ($k=\pm 2$), $m=5$ ($k=0$) изменяет значения минимального собственного числа матрицы на величину порядка 0,5%.

На фиг. 1 и 2 представлены графики изменения наименьшей частоты в зависимости от величины интенсивности поперечной нагрузки для



Фиг. 1.

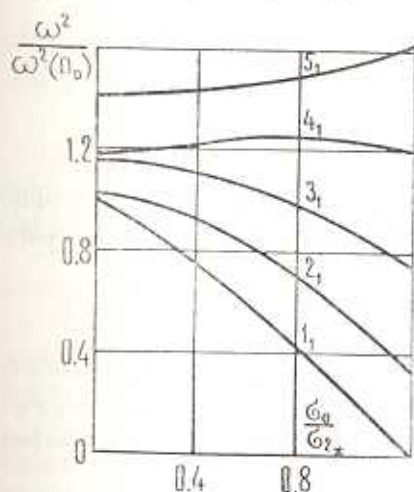


Фиг. 2.

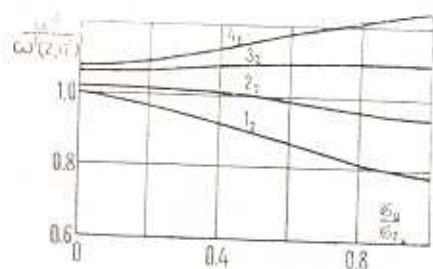
различных геометрических параметров. По оси ординат отложено отношение $\omega^2/\omega_0^2(n_0)$, а по оси абсцисс — величины σ_0/σ_{2*} . При этом σ_0 — максимальное окружное напряжение для данной задачи, σ_{2*} — постоянное окружное напряжение (σ_{2*} — соответствующее критическое напряжение в случае действия радиального внешнего давления q); $\omega_0(n_0)$ — наименьшая частота в случае отсутствия нагрузки ($p = 0$); n_0 — соответствующее число окружных волн. Заметим, что $\sigma_0 = pR/h$, $\sigma_{2*} = qR/h$ и, следовательно, $\sigma_0/\sigma_{2*} = p/q$. На этих фигурах для сравнения приведена универсальная кривая (c) изменения наименьшей частоты для оболочек средней длины в случае постоянного окружного напряжения (при этом по оси абсцисс отложена величина σ_0/σ_{2*}). Из приведенных графиков, нетрудно видеть, что при равных напря-

жениях (или при равных абсолютных значениях интенсивности поперечной и радиальных нагрузок) наименьшие частоты могут существенно различаться по мере возрастания нагрузки. Кроме того, из полученных кривых (фиг. 1, 2) легко заметить, что изменения геометрических параметров (l/R , R/h) для оболочек средней длины приводит к сравнительно небольшим изменениям наименьшей частоты.

При $p \rightarrow p_*$ (p_* — критическая величина задачи устойчивости [2]) получаем $\omega \rightarrow 0$.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 3 для оболочки ($l/R = 1$, $R/h = 300$) приведены первые пять наименьших частот (кривые 1_1 , 2_1 , 3_1 , 4_1 , 5_1), которые при $p = 0$ стремятся соответственно к наименьшим частотам незагруженной оболочки ω_0 ($m = 1$, $n = n_0$), ω_0 ($m = 1$, $n = n_0 + 1$), ω_0 ($m = 1$, $n = n_0 + 2$), ω_0 ($m = 1$, $n = n_0 - 1$), ω_0 ($m = 1$, $n = n_0 + 3$) (в частности, для рассматриваемой оболочки $n_0 = 9$). Отсюда нетрудно видеть, что если при отсутствии нагрузки расхождение между частотами сравнительно небольшое, то по мере увеличения приложенной нагрузки расхождения между ними существенно изменяются. Кроме того, необходимо заметить, что наличие зоны растяжения окружного напряжения (от действия внешней нагрузки) влияет на некоторые частоты в сторону их увеличения при возрастании интенсивности действующей нагрузки.

На фиг. 3 по оси ординат отложена величина $\omega^2/\omega_0^2(n_0)$, при этом $\omega_0(n_0) = \omega_0$ ($m = 1$, $n = n_0$) — наименьшая частота свободной оболочки, когда в продольном направлении образуется одна полуволна (n_0 — соответствующее число окружных полн).

На фиг. 4 для той же оболочки приведены графики изменения частот (кривые 1_2 , 2_2 , 3_2 , 4_2), которые при $p = 0$ стремятся соответственно к частотам незагруженной оболочки ω_0 ($m = 2$, $n = n^0$), ω_0 ($m = 2$, $n = n^0 - 1$), ω_0 ($m = 2$, $n = n^0 + 1$), ω_0 ($m = 2$, $n = n^0 - 2$) (для рассматриваемой оболочки $n^0 = 13$). На фиг. 4 по оси ординат отложена величина $\omega^2/\omega_0^2(2, n^0)$, где ω_0 ($m = 2$, $n = n^0$) — наименьшая частота незагруженной оболочки, когда в продольном направлении

образуются две полуволны: n^0 — соответствующее число окружных волн.

Высшие же частоты, соответствующие частотам незагруженной оболочки для $m=3, 4, \dots$, практически не зависят от внешней нагрузки для приемлемого интервала, то есть, когда нагрузка не превосходит своего критического значения.

Институт математики АН ГССР

Поступила 9 VII 1973

Ա. Ն. ԿՈՒԿՈՋՅԱՆՈՎ

ԱՄԲՈՂԶ ՄԱԿԵՐԵԼՈՒԹՅՈՒ ՎՐԱ ՀԱՎԱՍԱՐԱԶՈՒԹ ԹԱՇԵՎԱԾ ԼՈՅՆՅԱՆ ԱՅԻՐ ԱԶԲԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԿՏԵՎՈՂ ԳԼՆԱՅԻՆ ԹՈՂԱՆՈՒ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒԹՅՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվում է կոնսոլայրանային թաղանթի սեփական տատանումների ձևի և սեփական հաճախականությունների վրա նախապես գործող թաղանթի ամբողջ մակերևույթով հավասարաչափ բաշխված ծուղ լայնական բեռի ազդեցությունը:

Հիմնական ուշադրությունը հատկացվում է ամենափոքր հաճախականություններին, որոնք համարվում են գործնականորեն ավելի կարևոր և ավելի դժարան արտաբերելի ազդեցությունների նկատմամբ:

EIGENVIBRATION OF CYLINDRICAL SHELLS UNDER TRANSVERSAL LOAD UNIFORMLY DISTRIBUTED THROUGHOUT THE SURFACE

S. N. KUKUJANOV

S u m m a r y

The effect of a preliminary acting bending transversal load, uniformly distributed throughout the surface of a console cylindrical shell on the eigenfrequencies and the patterns of eigenvibrations is investigated.

The emphasis is laid upon the lowest frequencies which are practically most significant and most sensitive to external effects.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batdorf S. B. A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells. NACA Rep., 1947, № 847.
2. Кукуджанов С. Н. Устойчивость цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой, равномерно распределенной по всей поверхности или приложенной на конце. МТТ, № 3, 1971.