

А. А. БАБЛОЯН, М. Г. МЕЛКОНЯН

О КОНТАКТЕ ДВУХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ БЕЗ СЦЕПЛЕНИЯ  
 С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

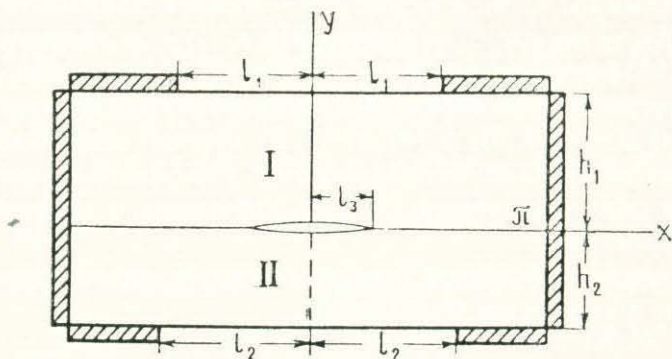
Рассматривается плоская задача для упругого тела, составленного из двух изотропных прямоугольников одинаковой длины, прижатых друг к другу без трения двумя жесткими захватами у краев.

Предполагается, что под действием внешних усилий и температуры возможен отрыв материалов на некоторых участках линии контакта.

Основная цель работы заключается в определении размера зоны отрыва между двумя материалами в зависимости от внешних нагрузок, температуры и геометрических параметров задачи. Помимо этого определяются также напряженное и деформированное состояния материалов.

Для неограниченных областей вопросы определения длины зоны контакта (отрыва) подробно рассматривались в работах Кир, Дандерс и Цзай [4], Вейцмана [3], Пу и Хусейна [8] и др.

Задача решается методом Фурье [1], при этом коэффициенты разложения и неизвестный размер зоны отрыва определяются из бесконечных систем нелинейных уравнений. Доказывается, что систему уравнений можно решать методом последовательных приближений.



фиг. 1

Получены формулы для определения контактных напряжений и перемещений вне контактов, а также выражения сил и моментов, действующих на захваты.

1. Рассмотрим плоскую задачу термоупругости для прямоугольника, составленного из двух, имеющих одинаковую длину, прямоугольных слоев из различных материалов с толщинами  $h_1$  и  $h_2$  (фиг. 1).

Слои наложены друг на друга без сцепления вдоль линии контакта  $y=0$  и сжимаются П-образными клещами. Прямоугольник находится в стационарном температурном поле  $T_i = a_i + b_i y$  ( $i = 1, 2$ ). При этом возможны такие сочетания внешних воздействий, что берега материалов, находящихся до нагружения в соприкосновении, на определенных участках линии контакта могут удаляться друг от друга, то есть могут возникнуть участки отрыва между материалами. В рассматриваемом случае предположено, что возникает только один участок отрыва в центре линии контакта, берега которого могут быть дополнительно нагружены давлением  $\sigma_y(x, \pm 0) = f(x)$ . Справедливость сделанного предположения можно легко проверить после решения задачи, то есть после определения контактных напряжений и перемещений в зоне отрыва [4, 11].

В силу симметрии задачу будем решать только для половины основной области ( $0 \leq x \leq \pi$ ,  $-h_2 \leq y \leq h_1$ ) при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(i)}(0, y) &= \tau_{xy}^{(i)}(\pi, y) = \tau_{xy}^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] = \tau_{xy}^{(i)}(x, 0) = 0 \\ u_i(0, y) &= 0, \quad u_r(\pi, y) = a_0 + b_0 y \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_y^{(i)}[x, (-1)^{i-1} h_i] &= f_i(x) \quad (0 \leq x < l_i) \\ v_i[x, (-1)^{i-1} h_i] &= \psi_i(x) \quad (l_i < x \leq \pi) \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0); \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0) \quad (l_3 \leq x \leq \pi) \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) = f_3(x) \quad (0 \leq x < l_3) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем индекс «1» соответствует верхней подобласти с характеристиками  $E_1, \nu_1, \alpha_1$ , а индекс «2» — нижней подобласти с характеристиками  $E_2, \nu_2, \alpha_2$ , где  $E_i$  — модуль Юнга,  $\nu_i$  — коэффициент Пуассона, а  $\alpha_i$  — коэффициент линейного расширения материала. Принимается, что значения этих параметров не зависят от температуры, а функции  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\psi_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) кусочно непрерывные в соответствующих интервалах. Отметим также, что длина  $l_3$ , которой характеризуется область контакта  $L = \pi - l_3$  неизвестна и подлежит определению в дальнейшем.

Бигармоническую функцию Эри для каждой подобласти (I и II) ищем отдельно в виде рядов Фурье [1, 9]

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, y) &= \Phi_0^{(i)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{ch } \lambda_k}{2k\delta_k} \left\{ \frac{(-1)^i \mu^{i-1}}{\text{ch } \lambda_k^{(i)}} \left[ (-1)^i \mu^{3-2i} \left( 1 + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_k^{(i)}}{\text{th } \lambda_k^{(i)}} - \frac{\lambda_k}{\text{cth } \lambda_k} \right) \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(3-i)}}{\text{sh } 2\lambda_k^{(3-i)}} \right) + \frac{\lambda_k^{(i)} \lambda_k \text{ch } (\lambda_k^{(i)} + (-1)^i \lambda_k)}{\text{sh } \lambda_k^{(i)} \text{ch } \lambda_k \text{cth } \lambda_k^{(3-i)}} - \\ &\left. \left. \left. - \text{th } \lambda_k^{(3-i)} \left( \text{th } \lambda_k - \lambda_k + \frac{\lambda_k^{(i)} \text{th } \lambda_k}{\text{th } \lambda_k^{(i)}} \right) \right] X_k^{(i)} + \left[ 1 + \frac{(-1)^i \text{th } \lambda_k}{\text{cth } \lambda_k^{(i)}} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-1)^i \lambda_k^{(i)} \operatorname{sh}(\lambda_k^{(i)} + (-1)^i \lambda_k)}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(i)} \operatorname{ch} \lambda_k} + \frac{2\lambda_k^{(i)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(i)}} \left\| \left[ \frac{\mu^{i-1} (1 + \lambda_k^{(3-i)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(3-i)})}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(3-i)}} X_k^{(3-i)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(3-i)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(3-i)}} \right) X_k^{(3)} \right] \right\} \cos kx \quad (i=1, 2) \quad (1.2)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{(i)}(x, y) &= P_1^{(i)} x^2 + P_2^{(i)} y^3 + P_3^{(i)} y^2 + P_4^{(i)} y \\
\delta_k &= \mu \operatorname{th} \lambda_k^{(1)} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right) + \operatorname{th} \lambda_k^{(2)} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \\
\lambda_k &= ky, \quad \lambda_k^{(i)} = kh_i, \quad \mu = E_2/E_1
\end{aligned} \quad (1.3)$$

Напряжения и перемещения выражаются через бигармоническую функцию Эри известными соотношениями [9].

При выборе функций  $\Phi_i(x, y)$  ( $i=1, 2$ ) в виде (1.2) некоторые из условий (1.1) удовлетворяются тождественно. Удовлетворив остальным (смешанным) граничным условиям, для определения неизвестных коэффициентов  $X_k^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3; k=1, 2, \dots$ ) получим следующие парные уравнения:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k X_k^{(i)} \cos k\varphi &= g_i(\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \cos k\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq l_i) \\
\sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)} \cos k\varphi &= \tau_i(\varphi), \quad (l_i \leq \varphi \leq \pi)
\end{aligned} \quad (1.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
g_i(\varphi) &= 2[2P_1^{(i)} - f_i(\varphi)], \quad g_3(\varphi) = -2(1 + \mu)[2P_1^{(1)} - f_3(\varphi)], \quad (i=1, 2) \\
\tau_1(\varphi) &= 2h_1 P_1^{(1)} - \nu_1(3h_1^2 P_2^{(1)} + 2h_1 P_3^{(1)} + P_4^{(1)}) - E_1 \psi_1(\varphi) + \\
&+ E_1 x_1 h_1 (a_1 + 0.5 b_1 h_1) + E_1 (C_1 - 0.5 x_1 b_1 \varphi^2) \\
\tau_2(\varphi) &= 2h_2 P_1^{(2)} + \nu_2(3h_2^2 P_2^{(2)} - 2h_2 P_3^{(2)} + P_4^{(2)}) + E_2 \psi_2(\varphi) + \\
&+ E_2 x_2 h_2 (a_2 - 0.5 b_2 h_2) - E_2 (C_1 - 0.5 x_2 b_2 \varphi^2) \\
\tau_3(\varphi) &= \nu_2 P_4^{(2)} - \mu \nu_1 P_4^{(1)} + 0.5 E_2 (x_2 b_2 - x_1 b_1) \varphi^2 \\
\gamma_k^{(i)} &= X_k^{(i)} - a_k^{(i)} X_k^{(1)} - b_k^{(i)} X_k^{(2)} - c_k^{(i)} X_k^{(3)}, \quad (i=1, 2, 3)
\end{aligned} \quad (1.5)$$

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{\delta_k} \left[ \frac{\operatorname{th} \lambda_k^{(2)}}{\operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}} \left( 1 - \frac{\lambda_k^{(1)^2}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(1)}} \right) + \mu \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right) \right]$$

$$a_k^{(2)} = \mu \frac{\lambda_k^{(1)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}}{\delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(2)}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_k^{(3)} &= -\mu(1+\mu) \frac{\lambda_k^{(1)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}}{\delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right) \\
b_k^{(1)} &= \frac{\lambda_k^{(2)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}}{\delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(1)}} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \right) \\
b_k^{(2)} &= \frac{1}{\delta_k} \left[ \frac{\mu \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}}{\operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}} \left( 1 - \frac{\lambda_k^{(2)^2}}{\operatorname{sh}^2 \lambda_k^{(2)}} \right) + \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right) \right] \\
b_k^{(3)} &= -(1+\mu) \frac{\lambda_k^{(2)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}}{\delta_k \operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \quad (1.5) \\
c_k^{(1)} &= -\frac{1}{\delta_k} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right) \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(1)}} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(1)}} \right) \\
c_k^{(2)} &= -\frac{1}{\delta_k} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k^{(2)}} + \frac{\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(2)}} \right) \\
c_k^{(3)} &= \frac{1+\mu}{\delta_k} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(1)}} \right) \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(2)}} \right)
\end{aligned}$$

2. Пользуясь известными методами решения парных уравнений полученного типа [2], для определения неизвестных коэффициентов  $X_n^{(i)}$  ( $i=1, 2, 3$ ) получим бесконечные системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
X_n^{(i)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(i)} X_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(i)} X_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}^{(i)} X_k^{(3)} + d_n^{(i)} \quad (2.1) \\
&(n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

и уравнения для определения коэффициентов, входящих в выражения  $\Phi_0^{(i)}(x, y)$  ( $i=1, 2$ ):

$$\begin{aligned}
P_1^{(2)} &= P_1^{(1)}, \quad 6P_2^{(i)} = E_i(b_0 - \alpha_i b_i \pi) / \pi, \quad 2P_3^{(i)} = 2\gamma_i P_1^{(i)} + E_i(a_0 - \alpha_i a_i \pi) / \pi \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} z_k(\cos l_i) + \int_0^{l_i} F_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{l_i}^{\pi} G_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = -2\gamma_i(\pi) \quad (2.2) \\
&(i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

В (2.1) и (2.2) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
2a_{nk}^{(1)} &= k(1 - a_k^{(1)}) J_{nk}(l_1), \quad 2b_{nk}^{(1)} = -kb_k^{(1)} J_{nk}(l_1), \quad 2c_{nk}^{(1)} = -kc_k^{(1)} J_{nk}(l_1) \\
2a_{nk}^{(2)} &= -ka_k^{(2)} J_{nk}(l_2), \quad 2b_{nk}^{(2)} = k(1 - b_k^{(2)}) J_{nk}(l_2), \quad 2c_{nk}^{(2)} = -kc_k^{(2)} J_{nk}(l_2) \\
2a_{nk}^{(3)} &= -ka_k^{(3)} J_{nk}(l_3), \quad 2b_{nk}^{(3)} = -kb_k^{(3)} J_{nk}(l_3), \quad 2c_{nk}^{(3)} = k(1 - c_k^{(3)}) J_{nk}(l_3) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$2d_n^{(i)} = \int_0^{l_i} F_i(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{l_i}^{\pi} G_i(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$F_i(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{g_i(\varphi) \cos \varphi/2 d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}}, \quad G_i(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{g_i'(\varphi) \cos \varphi/2 d\varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}}$$

$$J_{nk}(l_i) = \int_0^{l_i} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

причем

$$\int_0^{\pi} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{2}{k} \delta_{kn}$$

$$\bar{J}_{nk}(x) = \int_x^{\pi} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{kz_k(\cos x) y_n(\cos x) - nz_n(\cos x) y_k(\cos x)}{n^2 - k^2} \quad k \neq n \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{kk}(x) &= \frac{1}{2k} [2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x)P_k(\cos x)] + \\ &+ \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} P_m(\cos x) [P_m(\cos x) \cos x - P_{m-1}(\cos x)] \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{kn}$  — символ Кронекера,  $P_k(x)$  — полином Лежандра, а  $y_k(x)$  и  $z_k(x)$  имеют вид [2]

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \quad |x| \leq 1 \quad (2.5)$$

Учитывая оценки соответствующих рядов, полученных в работах [2, 9], нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{nk}^{(i)}| < A_i n^{-3/2} + B_i e^{-2hn} \quad (2.6)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где  $h = \min(h_1, h_2)$ , а  $A_i$  и  $B_i$  — постоянные, значения которых зависят от геометрических параметров задачи и физических свойств материалов.

Из оценки (2.6) следует, что система (2.1) квази-вполне регулярна при любом значении размера отрыва  $l_3$ . Свободные члены системы стремятся к нулю как  $O(n^{-3/2})$ . Следовательно, решение системы (2.1)

можно получить методом редукции или методом последовательных приближений.

Из формул (1.2) следует, что некоторые ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, на границе прямоугольника сходятся медленно. Улучшив сходимость этих рядов с помощью бесконечных систем (2.1) и выделив при этом соответствующие особенности для контактного напряжения  $\varpi_y^{(i)}$  и перемещения  $v_i$  вне контакта, получим формулы, удобные для определения искомых величин в окрестности особых точек

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \varpi_y^{(i)}(\varphi, H_i) = & S_i - \frac{F_i(0)}{4} + \frac{2^{-1.5} \sin \varphi/2}{\sqrt{|\cos l_i - \cos \varphi|}} \left[ F_i(l_i) + G_i(l_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} y_k(\cos l_i) \right] - \frac{\sin \varphi/2}{2\sqrt{2}} \left[ \int_{\varphi}^{l_i} \frac{F_i(\theta) d\theta}{\sqrt{|\cos \theta - \cos \varphi|}} - \right. \\ & \left. - \int_{l_i}^{\varphi} \frac{G_i(\theta) d\theta}{\sqrt{|\cos \theta - \cos \varphi|}} - \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \int_{l_i}^{\varphi} \frac{y_k(\cos \theta) d\theta}{\sqrt{|\cos \theta - \cos \varphi|}} \right] \\ & (l_i < \varphi \leq \pi) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} v_i|\varphi, (-1)^{i-1} h_i = & -\frac{(-1)^i \cos \frac{\varphi}{2}}{E_i \sqrt{2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \int_{\varphi}^{l_i} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} + \right. \\ & \left. + \int_{\varphi}^{l_i} \frac{F_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} - \int_{l_i}^{\pi} \frac{G_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} \right] + \frac{1}{2} \alpha_i h_i (\pi^2 - \varphi^2) + \psi_i(\pi) \\ & (0 < \varphi < l_i); \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^i E_i v_i(\varphi, 0) = & \frac{\eta_3(\pi)}{\delta_0} - (-1)^i \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^{(i)} \cos k\varphi + \right. \\ & \left. + \gamma_i P_3^{(i)} - E_i \left( C_1 - \frac{1}{2} \alpha_i h_i \varphi^2 \right) \right] + \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\delta_0 \sqrt{2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(i)} \int_{\varphi}^{l_i} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} + \right. \\ & \left. + \int_{\varphi}^{l_i} \frac{F_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} - \int_{l_i}^{\pi} \frac{G_i(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{|\cos \varphi - \cos \theta|}} \right] \\ & (0 \leq \varphi \leq l_i), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1 = S_2 = 2P_1^{(1)}, \quad S_3 = -2\delta_0 P_1^{(1)}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = -\delta_0 = -1 - \mu \\
 2H_i = (i-3) [(i-2)h_1 + 2(i-1)h_2] \quad (i=1, 2, 3) \\
 \omega_k^{(i)} = \frac{\mu^{i-1}}{\delta_k} \left[ \frac{(\lambda_k^{(1)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(1)}) X_k^{(1)}}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(2)}} - \frac{(\lambda_k^{(2)} + \operatorname{th} \lambda_k^{(2)}) X_k^{(2)}}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(2)} \operatorname{cth} \lambda_k^{(1)}} \right] + \\
 + (-i)^i \left[ \frac{1}{\delta_0} - \frac{\operatorname{th} \lambda_k^{(i)}}{\delta_k} \left( 1 + \frac{2\lambda_k^{(3-i)}}{\operatorname{sh} 2\lambda_k^{(3-i)}} \right) \right] X_k^{(3)} \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Длину области контакта между двумя материалами будем определять из условия непрерывности нормальных напряжений на концах зон областей контакта [11], то есть из условия  $\sigma_y(l_3, 0) = f_3(l_3)$ .

В силу первой из формул (2.7) при  $i=3$  это условие можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \gamma_k^{(3)} y_k(\cos l_3) + F_3(l_3) + G_3(l_3) = 0 \tag{2.9}$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов  $X_k^{(i)}$ ,  $P_1^{(1)}$ ,  $P_4^{(1)}$ ,  $P_4^{(2)}$  и  $C_1$ , входящих в выражения функций напряжений, а также длины области отрыва получаем бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (2.1), линейные уравнения (2.2) и трансцендентное относительно  $l_3$  уравнение (2.9). Решая эти уравнения относительно отмеченных неизвестных и подставляя найденные значения в выражения напряжений и перемещений, выразим последние через внешние нагрузки и перемещения точек под клещами. После определения напряжений и перемещений из условий статического равновесия отдельных звеньев клещей легко определяются значения сил и моментов, действующих на эти звенья. Для силы  $F$  и момента  $M$ , действующих на боковые грани прямоугольника, а также для сил  $P_i$  и моментов  $M_i$  ( $i=1, 2$ ), действующих на верхний и нижний штампы, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_x(\pi, y) dy = 3(h_1^2 P_2^{(1)} - h_2^2 P_2^{(2)}) + 2(h_1 P_3^{(1)} + h_2 P_3^{(2)}) \\
 M &= \int_{-h_2}^{h_2} y \sigma_x(\pi, y) dy = h_1^2(2P_2^{(1)}h_1 + P_3^{(1)}) + h_2^2(2P_2^{(2)}h_2 - P_3^{(2)}) - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} [(a_k^{(1)} - a_k^{(2)}) X_k^{(1)} + (b_k^{(1)} - b_k^{(2)}) X_k^{(2)} + (c_k^{(1)} - c_k^{(2)}) X_k^{(3)}] \\
 P_i &= \int_{l_i}^{\pi} \sigma_y^{(i)}(x, H_i) dx = 2\pi P_1^{(i)} - \int_0^{l_i} f_i(x) dx \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$M_i = \int_{l_i}^{\pi} (x - l_i) \sigma_y^{(i)}(x, H_i) dx = 2\pi(\pi - l_i) P_1^{(i)} - \Phi_i(x, H_i) \Big|_{l_i}^{\pi} \quad (2.10)$$

которые являются связями между силой и моментом, действующими на соответствующих гранях боковых П-образных зажимов и параметрами перемещений этих же граней.

3. В качестве числового примера рассмотрим две прямоугольные пластинки одинаковой толщины  $h_1 = h_2 = h = \frac{2\pi}{3}$ , составленные из меди и стали, находящиеся в контакте одной кромкой и сжимаемые у краев жесткими клещами, симметрично расположенными относительно главных осей прямоугольника. Внешние нагрузки и перемещения под штампами задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) = p, \quad f_3(x) = -q, \quad b_0 = 0, \\ \psi_1(x) = -\psi_2(x) = -\delta \frac{1 + \cos x}{1 + \cos l} \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\delta$  — заданное перемещение под штампом в точке  $x = l_1 = l_2 = l = \frac{\pi}{2}$ , а  $p$  и  $q$  — положительные величины. Физико-механические характеристики выбранных материалов имеют значения

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}, \quad E_1 = 1.12 \cdot 10^6 \text{ кг см}^{-2}, \quad \nu_1 = 0.34 \\ \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}, \quad E_2 = 2E_1, \quad \nu_2 = 0.28 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Целью вычислений является определение длины участка отрыва  $2l_3$  в зависимости от параметров  $p, q, \delta, a_0, T_1, T_2$ . Отметим, что наличие нелинейного уравнения (2.9) в совокупности систем (2.1), (2.2) и (2.9) затрудняет получение численных значений неизвестных величин. Эту систему можно решать методом последовательных приближений, задавая при этом приближенное значение  $l_3$ , затем в ходе следующих приближений уточнить как значение  $l_3$ , так и значения остальных неизвестных.

Однако, такой подход связан с большим объемом вычислений.

Избегая отмеченных затруднений, систему (2.1), (2.2), (2.9) будем решать следующим образом: задаем значение  $l_3$  и решаем систему уравнений (2.1) и (2.2) относительно остальных неизвестных, затем подставляя найденные значения в уравнение (2.9), получаем следующую связь между параметрами:

$$\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 \beta + \gamma_4 F_0 + \gamma_5 T_1 + \gamma_6 T_2 = 0 \quad (3.3)$$

при которой длина участка отрыва  $2l_3$  имеет данную величину.

Такой же прием вычисления неизвестной длины зоны контакта был применен также в работе [4].



Коэффициенты  $\gamma_i$  ( $i = 1 \div 6$ ) зависят от физико-геометрических параметров задачи. Для рассматриваемого нами случая значения  $\gamma_i$  для различных длин  $l_3$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$l_3$	$-\gamma_1$	$-\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$
0	0.38652	0.46031	0.18820	0.00892	1.17220	0.79038
$\pi: 18$	0.38457	0.46106	0.19000	0.00922	1.20987	0.81679
$\pi: 9$	0.37865	0.46194	0.19525	0.01003	1.31825	0.88860
$\pi: 6$	0.36866	0.46325	0.20488	0.01136	1.49243	1.00631
$2\pi: 9$	0.35495	0.46482	0.21686	0.01301	1.70908	1.15239
$5\pi: 18$	0.33703	0.46694	0.23218	0.01488	1.95609	1.31894
$\pi: 3$	0.31561	0.47070	0.24939	0.01686	2.21516	1.49363
$7\pi: 18$	0.29086	0.47592	0.26786	0.01880	2.47033	1.66569
$4\pi: 9$	0.26309	0.48403	0.28107	0.02039	2.67980	1.80692
$\pi: 2$	0.23437	0.49947	0.29825	0.02227	2.92645	1.97324
$5\pi: 9$	0.20466	0.52198	0.30593	0.02371	3.11499	2.10036
$11\pi: 18$	0.17366	0.54660	0.30478	0.02472	3.24807	2.19010
$2\pi: 3$	0.14261	0.58755	0.29835	0.02601	3.41761	2.30441
$13\pi: 18$	0.11347	0.63937	0.28189	0.02687	3.53143	2.38116
$7\pi: 9$	0.08502	0.70957	0.25759	0.02758	3.62423	2.44373
$5\pi: 6$	0.05971	0.81437	0.22940	0.02813	3.69595	2.49209
$8\pi: 9$	0.03808	0.97029	0.20105	0.02848	3.74232	2.52335
$17\pi: 18$	0.02213	1.26379	0.17737	0.02899	3.80944	2.56861

Отметим, что в соотношении (3.3)  $\beta$  и  $F_0$  связаны с перемещениями  $\delta$  и  $a_0$  следующими формулами:

$$2\beta = E_1\delta, \quad F_0 = -E_1a_0$$

Табл. 1 составлена для случая, когда известно значение перемещения боковых граней  $a_0$ . Если вместо  $a_0$  известно значение силы  $F$ , действующей на боковых гранях, то, определяя  $a_0$  из первого уравнения (2.10) для каждого значения  $l_3$  отдельно и подставляя в соотношение (3.3), получим связь между параметрами  $p$ ,  $q$ ,  $\delta$ ,  $F$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ :

$$\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 \beta + \beta_4 F + \beta_5 T_1 + \beta_6 T_2 = 0 \quad (3.4)$$

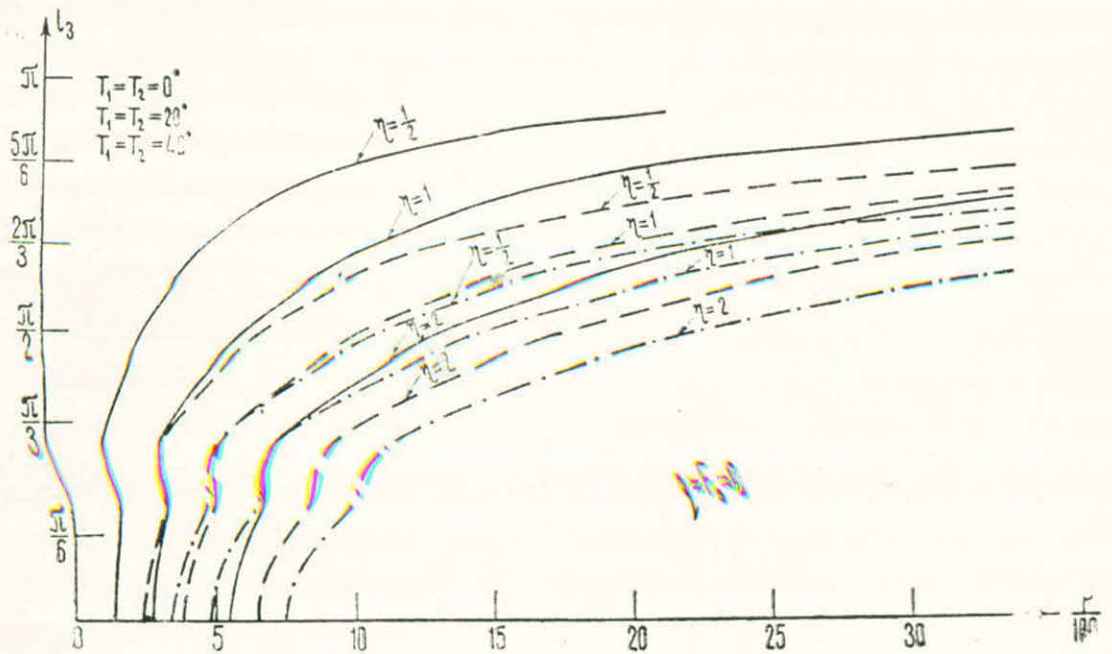
при которой длина области отрыва  $2l_3$  имеет данную величину. Значения коэффициентов  $\beta_i$  ( $i = 1 \div 6$ ) для рассматриваемого случая приведены в табл. 2.

На основе приведенных табл. 1 и 2 построены графики зависимостей длины участков контакта от различных комбинаций параметров  $p$ ,  $q$ ,  $\delta$ ,  $a_0(F)$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ . На фиг. 2 дается график функции  $l_3 = l_3(p)$  для различных значений перемещения под штампами ( $\beta = 0.5\beta_0$ ,  $\beta_0$ ,  $2\beta_0$ , где  $\beta_0 = 10^{-3}$  см) и температур материалов ( $T_1 = T_2 = T = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ\text{C}$ ), когда внутреннее

давление и боковые перемещения равны нулю ( $q = a_0 = 0$ ). Как видно из приведенных графиков, начиная с некоторого значения растягивающей нагрузки  $p = p_0$ , между материалами возникает отрыв слоев и длина зоны отрыва увеличивается при увеличении нагрузки  $p$ .

Таблица 2

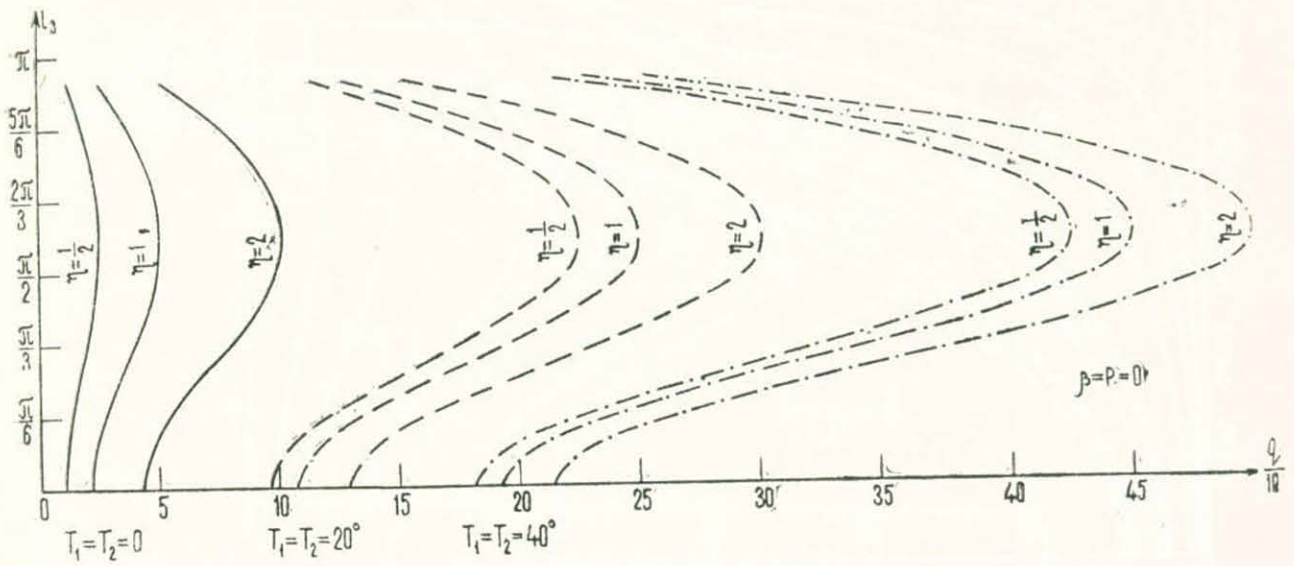
$l_3$	$-\beta_1$	$-\beta_2$	$\beta_3$	$-\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
0	0.38433	0.46031	0.18372	0.00422	0.94112	0.51043
$\pi : 18$	0.38232	0.46104	0.18539	0.00435	0.97154	0.52805
$\pi : 9$	0.37622	0.46185	0.19023	0.00475	1.05848	0.57411
$\pi : 6$	0.36595	0.46303	0.19922	0.00538	1.19834	0.64988
$2\pi : 9$	0.35192	0.46438	0.21043	0.00616	1.37256	0.74435
$5\pi : 18$	0.33371	0.46620	0.22492	0.00705	1.57180	0.85257
$\pi : 3$	0.31207	0.46960	0.24135	0.00799	1.78092	0.96585
$7\pi : 18$	0.28725	0.47442	0.25922	0.00892	1.98823	1.07833
$4\pi : 9$	0.25960	0.48216	0.27222	0.00969	2.16045	1.17179
$\pi : 2$	0.23114	0.49729	0.28925	0.01061	2.36433	1.28233
$5\pi : 9$	0.20185	0.51961	0.29726	0.01131	2.52159	1.36752
$11\pi : 18$	0.17134	0.54417	0.29677	0.01185	2.64080	1.43223
$2\pi : 3$	0.14083	0.58516	0.29110	0.01251	2.78931	1.51277
$13\pi : 18$	0.11216	0.63713	0.27557	0.01298	2.89455	1.56996
$7\pi : 9$	0.08411	0.70754	0.25223	0.01338	2.98359	1.61818
$5\pi : 6$	0.05911	0.81260	0.22498	0.01371	3.05630	1.65755
$8\pi : 9$	0.03770	0.96882	0.19753	0.01395	3.10908	1.68622
$17\pi : 18$	0.02188	1.26265	0.17473	0.01427	3.18096	1.72521



Фиг. 2.

Значение  $p_0$  зависит от температуры  $T$  и перемещения штампов  $\delta$ , причем в данном случае  $p_0 = p_0(T, \delta)$  является возрастающей функцией

от каждого аргумента. Нетрудно видеть, что в этом примере соотношения между  $l_3$  и  $p$ ,  $p_0$  и  $T$ ,  $p_0$  и  $\delta$  являются взаимно однозначными.



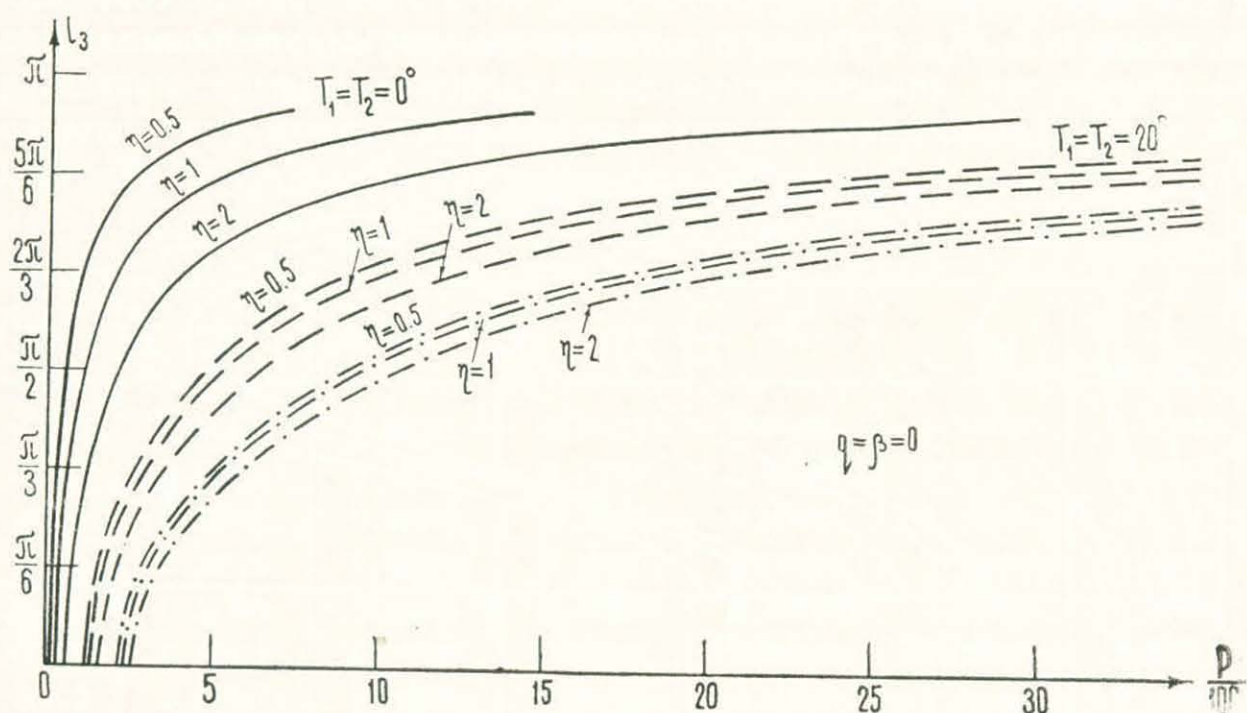
Фиг. 3.

На фиг. 3 приведен график функции  $l_3=l_3(q)$  в зависимости от боковых перемещений ( $F_0=0.5u_0$ ;  $u_0$ ;  $2u_0$ , где  $u_0=10^{-3}$  см) и температур материалов ( $T_1=T_2=T=0^\circ$ ;  $20^\circ$ ;  $40^\circ\text{C}$ ), когда  $p=\delta=0$ . В этом случае отрыв возникает при некотором значении  $q=q_0(T, a_0)$  и при увеличении внутреннего давления  $q$  до значения  $q=q_{\max}(T, a_0)$  зона отрыва расширяется. Дальнейшее расширение зоны отрыва происходит без увеличения внутреннего давления. Значения величин  $q_0(T, a_0)$  и  $q_{\max}(T, a_0)$  увеличиваются при возрастании температуры материалов и боковых перемещений  $a_0$ . На основе графика  $l_3=l_3(q)$  легко составить график функции  $l_3=l_3(Q)$ , где  $Q$  — общее давление на участке отрыва ( $Q=2l_3q$ ). При возрастании  $Q$  от 0 до  $Q_{\max}$  зона отрыва расширяется, причем дальнейшее расширение происходит без увеличения  $Q$ . Отметим еще, что  $l_3(q_{\max}) < l_3(Q_{\max})$ .

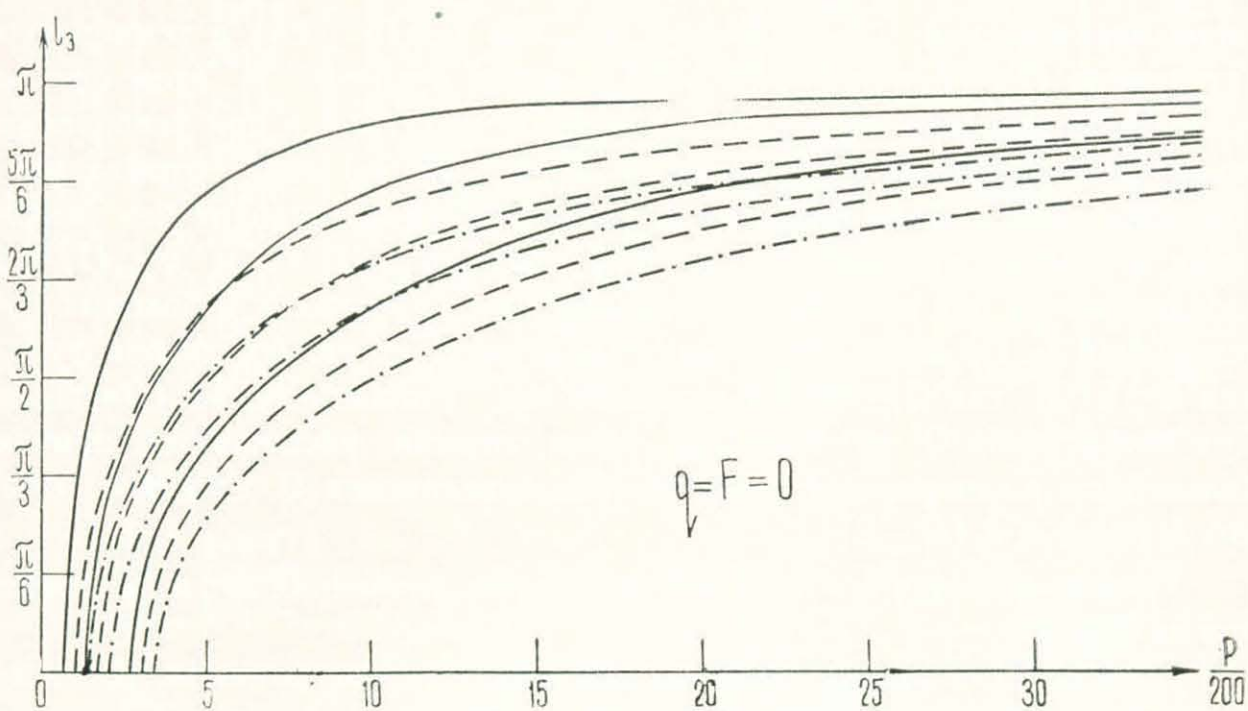
График функции  $l_3=l_3(p)$  при различных значениях  $a_0$  и  $T$  приведен на фиг. 4.

На фиг. 5—7 даются графики вышеприведенных функций, когда на боковых гранях прямоугольника вместо нормального перемещения  $a_0$  заданы значения нормальной силы  $F$ . На основе графиков 5—7 можно сделать соответствующие выводы относительно поведения функции  $l_3=l_3(p)$  и  $l_3=l_3(q)$  для аналогичных случаев, соответствующих графикам 2—4. Сравнение графиков 5—7 с графиками 2—4 показывает, что для выбранных значений геометрических параметров характер изменения длины зоны отрыва  $l_3$  в зависимости от нагружения в основном одинаков. Отметим, что при составлении графиков 5—7 для силы  $F$  приняты значения  $F=0,5f$ ;  $f$ ;  $2f$ , где  $f=2h \cdot 10^3$  кг.

При решении задачи было принято, что существует только одна область отрыва вдоль линии контакта материалов ( $y=0$ ).



Фиг. 4.

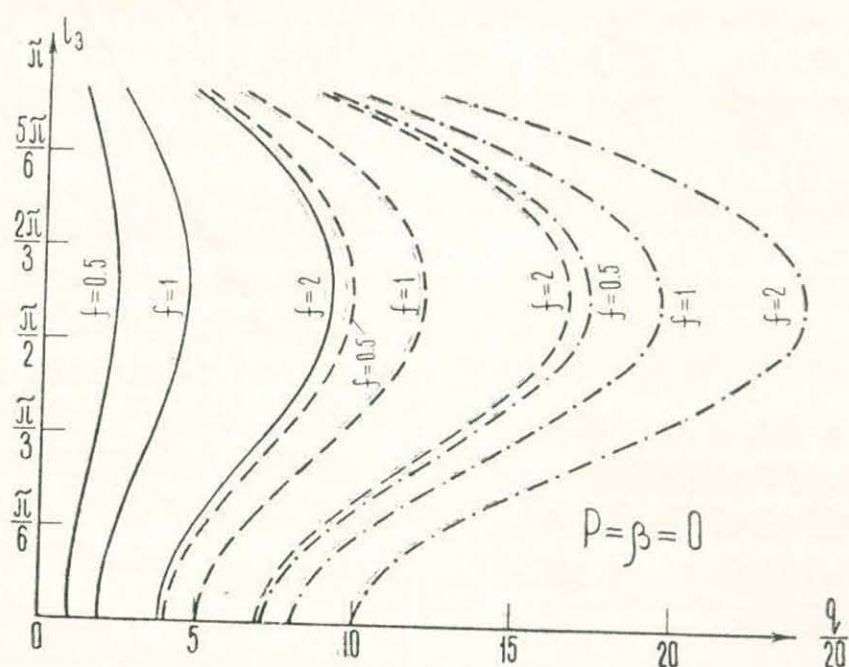


Фиг. 5.

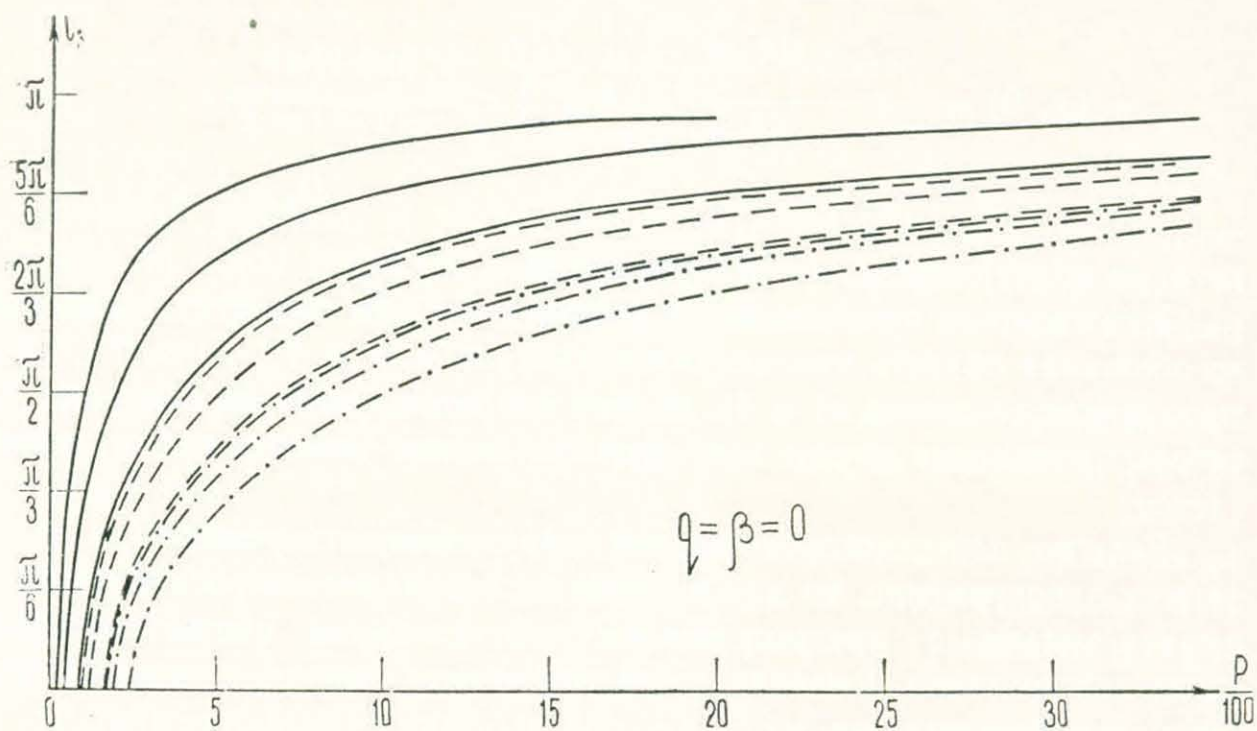
Такое допущение верно, если а) в участках контакта не возникают области растягивающих напряжений ( $\sigma_y > 0$ ) и б) берега отрыва не приходят в соприкосновение ( $v_1 - v_2 > 0$ ) [4, 11].

Проверка выполнения этих условий в каждом конкретном случае не представляет особых затруднений.

Приведем для случая (3.1) при  $l_3 = \frac{\pi}{3}$ ,  $l_1 = l_2 = \frac{2\pi}{3}$  некоторые значения контактных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  ( $l_3 \leq x < \pi$ ) и разности нормальных перемещений  $\delta(x) = E_1 [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)]$  ( $0 \leq x \leq l_3$ ):



Фиг. 6.



Фиг. 7.

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 5.7476p + 4.7351q + 19.2026T_1 + 12.9479T_2 + 0.3594\beta + 0.1486F_0 \\ \delta\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 4.8361p + 4.0299q + 15.2909T_1 + 10.3103T_2 + 0.2862\beta + 0.1183F_0 \\ \delta\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 0, \quad \sigma_y\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) = -q \\ \sigma_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= -0.1490p + 1.0620q - 1.6505T_1 - 1.1129T_2 - 0.0309\beta - 0.0128F_0 \\ \sigma_y\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) &= -0.4236p - 1.1630q - 4.9419T_1 - 3.3322T_2 - 0.0971\beta - 0.0401F_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\sigma_y \left( \frac{5\pi}{6}, 0 \right) = -0.7887p - 1.2786q - 9.5990T_1 - 6.4724T_2 - 0.1796\beta - 0.0742F_0 \quad (3.5)$$

$$\sigma_y (\pi, 0) = -1.1587p - 1.3917q - 14.5472T_1 - 9.8088T_2 - 0.2722\beta - 0.1125F_0$$

Вычисления сделаны по формулам

$$\begin{aligned} \delta(x) = 6(2P_1^{(1)} + q) \ln \frac{\cos \frac{x}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{l_3}{2}}}{\cos \frac{l_3}{2}} - \\ - \frac{\cos \frac{x}{2}}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k\gamma_k^{(3)} \int_x^{l_3} \frac{y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos \theta}} \quad (3.6) \end{aligned}$$

( $x < l_3$ )

$$\sigma_y(x, 0) = -q - \frac{\sin \frac{x}{2}}{6\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k\gamma_k^{(3)} \int_{l_3}^x \frac{y'_k(\cos \theta) d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos x}},$$

( $l_3 \leq x \leq \pi$ )

которые получаются из (2.7) с учетом (3.1) и (3.2).

Как видно из приведенных соотношений (3.5), существует достаточно обширная область изменения параметров  $p$ ,  $q$ ,  $\beta$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $a_0(F)$ , когда выполняются условия а) и б), то есть таких значений параметров, при которых появление других зон отрывов, кроме центрального, исключается.

Если же для некоторого случая нагружения эти условия не соблюдаются одновременно, то для полного исследования вопроса надо снова решать задачу с предположением существования соответствующего числа зон контакта. Решение последней задачи новых принципиальных затруднений не вызовет.

Институт механики АН АрмССР  
Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 3 IX 1973

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Մ. Գ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՌԱՆՑ ՇՓՄԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱՍԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ն փ ո լ մ

Դիտարկվում է հարթ կոնտակտային խնդիրը մի առաձգական մարմնի համար, որը բաղկացած է միևնույն երկարությամբ երկու իզոտրոպ ուղղան-

կյուններից: Ուղանկյունները իրար են սեղմվում առանց շփման սիմետրիկ դասավորված  $\Pi$ -ձևի երկու արջաններով: Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերի և ջերմության ազդեցության տակ հնարավոր է կոնտակտի տիրույթում նյութերի իրարից հեռացումը միայն կենտրոնական մասում:

Խնդիրը լուծվում է ֆուրյեի մեթոդով: Վերլուծության գործակիցները որոշվում են դժային հավասարումների անվերջ սիստեմներից: Ապացուցվում է, որ բացվածքի ցանկացած շափի համար անվերջ սիստեմները ընդհանուր դեպքում կվազի-լիովին ռեզուլյար են:

Բացվածքի շափը որոշելու համար ստացված է տրանսցենդենտ հավասարում: Երկրաշափական պարամետրերի որոշակի հարաբերությունների դեպքում դիտարկված է թվային օրինակ: Բերված են աղյուսակներ և գրաֆիկներ, որոնք ցույց են տալիս բացվածքի շափի և արտաքին բեռնավորման գործոնների միջև եղած կապերը:

## DETERMINATION OF DIMENSION OF INTERNAL SEPARATION IN A COMPOSITE RECTANGLE

A. A. BABLOYAN, M. G. MELKONIAN

### S u m m a r y

A plane problem of an elastic solid composed of two isotropic rectangles of equal length is considered. The rectangles are pressed to one another without friction with two symmetrically applied  $\Pi$ -shaped tongs.

It is assumed that under the action of external loads and temperature any separation of materials is possible only in the central part of the contact line.

The problem is solved by the Fourier method. The coefficients of expansion are determined from infinite systems of linear equations. It is proved that at any length of the crack the problem systems in the general case are quasi-quite regular.

A transcendental equation is derived to determine the crack length.

Some numerical examples are given for certain actual relations of geometric parameters. The tables and graphs, showing relation between a crack length and external factors of loading, are presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Баблоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
3. Вейцман. О контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. Прикл. мех., т. 36, № 2, 1969.
4. Кир, Дандерс, Цзай. Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. мех. т. 39, № 4, 1972.

5. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifting of a plate from the foundation due to axisymmetric pressure. *Developments in Mechanics. Proceedings of the 11th Midwestern Mechanics Conference*, vol. 5, 1969, pp. 577—590.
6. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. *Прикл. мех.*, т. 39, № 4, 1972.
7. *Рейс и Си.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границах двух различных сред. *ПМ*, т. 32, сер. Е, № 2, 1965.
8. *Пу, Хусейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластинкой и упругим полупространством. *Прикл. мех.*, т. 37, № 3, 1970.
9. *Мелконян М. Г.* Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. *Изв. АН Арм. ССР, Механика*, т. XXV, № 1, 1972.
10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в теории упругости. *Изд. Наука, Л.*, 1968.
11. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Теория упругости. *М.*, 1965.