

Ю. Н. НОВИЧКОВ

ИЗГИБ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ
 МЕЖДУ СЛОЯМИ

Начиная с работ, подытоженных в [1], теория слоистых стержней, пластин и оболочек развивается достаточно интенсивно. В настоящее время имеется несколько различных подходов к исследованию поведения слоистых конструкций. О современном состоянии теории можно судить по обзору [2]. Практически во всех предложенных теориях не учитывается возможность проскальзывания между слоями. В настоящей заметке дается распространение теории слоистых сред, предложенной в [3, 4], на случай учета проскальзывания между слоями. В качестве примера рассматривается задача изгиба опертого по концам трехслойного стержня. Заметим, что к рассматриваемому вопросу примыкают работы, связанные с расчетом составных стержней (см., например, [5]).

1. Рассмотрим многослойный стержень длиной $2l$ (пластину в условиях цилиндрического изгиба), состоящий из чередующихся слоев различной жесткости. Для простоты будем считать, что стержень по толщине имеет регулярную структуру и ограничен слоями повышенной жесткости. Жесткие слои толщины h , согласно [3, 4], подчиняются гипотезам Кирхгофа-Лява, а для мягких слоев существенны поперечные деформации и сдвиги. При этом считается, что по толщине мягкого слоя s они распределены равномерно. Уравнения равновесия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dN_x^x}{dx} - \frac{1}{s} (N_{xz}^{x-1} \gamma_{xz1} - N_{xz}^x \gamma_{xz2}) &= 0 \\ \frac{dQ^x}{dx} - \frac{1}{s} (N_z^x \gamma_{xz2} - N_z^{x-1} \gamma_{xz1}) &= q^x \\ \frac{dM^x}{dx} - Q^x + \frac{h+s}{s} (N_{xz}^x \gamma_{xz2} + N_{xz}^{x-1} \gamma_{xz1}) &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 1 - \delta_{xz}, \quad x = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.1)$$

Усилие Q^x из (1.1) может быть исключено. Усилия N_x^x , N_z^x и моменты M^x можно выразить через перемещения

$$N_x^x = A \frac{du_x}{dx}, \quad N_z^x = \frac{B}{s} (w_{x-1} - w_x), \quad M^x = D \frac{d^2 w_x}{dx^2} \quad (1.2)$$

где A — жесткость на растяжение, B — трансверсальная жесткость, D — жесткость на изгиб соответствующих слоев.

Если проскальзывание отсутствует, то усилие N_{xz}^{α} определяется по формуле

$$N_{xz}^{\alpha} = G_m \left[u_{z+1} - u_z + \frac{h+s}{2} \left(\frac{dw_{z+1}}{dx} + \frac{dw_z}{dx} \right) \right] \quad (1.3)$$

где G_m — модуль сдвига материала мягкого слоя.

Подстановка (1.2) и (1.3) в (1.1) после исключения Q^{α} приводит к уравнениям теории многослойных сред без проскальзывания [3, 4].

Предположим теперь, что в некоторых областях N_{xz}^{α} превысило допустимое значение. В силу принятия предположения о равномерном распределении деформаций в мягком слое проскальзывание будет происходить одновременно по обеим поверхностям мягкого слоя. Рассмотрим жесткий слой номера α . Зоны проскальзывания на поверхностях этого слоя с мягкими слоями номера α и номера $\alpha-1$ делят этот слой на ряд характерных областей. Возможны при этом области четырех типов: 1⁰ — на обеих сторонах жесткого слоя нет проскальзывания; 2⁰ — на обеих сторонах имеется проскальзывание; 3⁰ — проскальзывание есть только с мягким слоем номера α и 4⁰ — проскальзывание только с мягким слоем номера $\alpha-1$. Выяснение характера расположения возможных областей проскальзывания может быть проведено путем анализа решения задачи изгиба стержня заданной нагрузкой без учета проскальзывания и построения эюр распределения тангенциальных усилий N_{xz}^{α} .

В качестве критерия существования проскальзывания примем превышение усилием N_{xz}^{α} предельного значения N_T^{α} . Если $N_{xz}^{\alpha} < N_T^{\alpha}$, проскальзывание отсутствует. В зоне проскальзывания $N_{xz}^{\alpha} = N_T^{\alpha}$. При этом относительно N_T^{α} могут быть приняты различные предположения. Простейшим является предположение, что $N_T^{\alpha} = N_T^i = \text{const}$. Другим предположением может служить гипотеза о пропорциональности N_T^{α} нормальному (трансверсальному) усилию N_z^{α} , то есть $N_T^{\alpha} = f N_z^{\alpha}$, где $f = \text{const}$.

Для получения системы уравнений для перечисленных случаев 2⁰—4⁰ необходимо в системе (1.1) заменить для данного α $N_{xz}^{\alpha-1}$ и (или) N_{xz}^{α} в соответствии с данным случаем значением N_T^{α} .

Пусть $x = x_z^{\alpha}$ есть граница области проскальзывания α -го жесткого и α -го мягкого слоев. На этой границе должны выполняться условия непрерывности перемещений и касательных усилий

$$\begin{aligned} u_z^+ = u_z^-, \quad \frac{du_z^+}{dx} = \frac{du_z^-}{dx}, \quad w_z^+ = w_z^-, \quad \frac{dw_z^+}{dx} = \frac{dw_z^-}{dx} \\ \frac{d^2 w_z^+}{dx^2} = \frac{d^2 w_z^-}{dx^2}, \quad \frac{d^3 w_z^+}{dx^3} = \frac{d^3 w_z^-}{dx^3}, \quad N_{xz}^{\alpha-} = N_T^{\alpha} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Знаком „+“ отмечены величины, относящиеся к зоне проскальзывания $x > x_0^*$, „-“ отмечены величины для области $x < x_0^*$, где проскальзывания нет. Первых шести условий достаточно для стыковки решений на границе $x = x_0^*$, последнее служит для определения границы области проскальзывания x_0^* .

2. В качестве примера рассмотрим изгиб стержня, состоящего из двух жестких слоев и находящегося под действием равномерной нагрузки p . Для каждого слоя выполняются условия свободного опирания. Пусть проскальзывание отсутствует. Система (1.1), записанная в перемещениях, примет вид

$$\begin{aligned} a W_1^{IV} - b (W_2 - W_1) + \lambda [U_2' - U_1' + W_1' + W_2'] &= 2q \\ a W_2^{IV} + b (W_2 - W_1) + \lambda [U_2' - U_1' + W_1' + W_2'] &= 0 \\ U_1' + \lambda [U_2 - U_1 + W_1 + W_2] &= 0 \\ U_2' - \lambda [U_2 - U_1 + W_1 + W_2] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= w_\alpha / c, & U_\alpha &= u_\alpha / c, & 2c &= h + s \\ \lambda &= \frac{G_m c^2}{As}, & a &= \frac{D}{Ac^2}, & b &= \frac{Bc^2}{As} \\ 2q &= \frac{pc}{A}, & \xi &= x/c, & L &= l/c \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрихи в (2.1) означают производные по ξ . На краях стержня должны выполняться условия

$$W_1 = W_2 = W_1' = W_2' = U_1 = U_2 = 0 \quad \text{при } \xi = \pm L \quad (2.3)$$

Введение новых переменных

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (W_1 + W_2), & w^0 &= \frac{1}{2} (W_2 - W_1) \\ u &= \frac{1}{2} (U_2 - U_1), & u^0 &= \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

приводит к уравнениям

$$a w^{IV} + 2\lambda (u' + w'') = q, \quad u'' + 2\lambda (u + w') = 0 \quad (2.5)$$

$$u^{(4)} = 0, \quad a w^{(4)} + 2b w^0 = -q \quad (2.6)$$

и условиям

$$w = w'' = w^0 = w^{(4)} = u' = u^{(3)} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm L \quad (2.7)$$

Решение (2.6), удовлетворяющее (2.7) и условию отсутствия смещения как жесткого целого, будет

$$\omega^0 = -\frac{q}{2b} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \beta L \cos \beta L \operatorname{ch} \beta z \cos \beta z + \operatorname{sh} \beta L \sin \beta L \operatorname{sh} \beta z \sin \beta z}{\operatorname{ch}^2 \beta L \cos^2 \beta L + \operatorname{sh}^2 \beta L \sin^2 \beta L} \right] \\ u^0 = 0, \quad 2\beta^4 = b/a \quad (2.8)$$

Общее решение (2.5) записывается в виде

$$\omega = C_1 \cos \gamma z + C_2 z^2 + C_3 + \omega_r \\ u = -C_1 a \gamma \sin \gamma z - 2C_2 z + u_r \quad (2.9)$$

Параметр γ и частное решение (2.5), входящее в (2.9), определяются следующим образом:

$$\gamma = \left(2\lambda \frac{a+1}{a} \right)^{1/4}; \quad \omega_r = \frac{q}{a+1} \left[\frac{\xi^4}{24} + \frac{\xi^2(a+1)}{8\lambda} \right] \\ u_r = -\frac{q}{a+1} \left[\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi(a-1)}{4\lambda} \right] \quad (2.10)$$

Удовлетворяя условиям (2.7), найдем

$$C_1 = \frac{q}{2\gamma^4(a+1)a \cos \gamma L}, \quad C_2 = -\frac{q}{2(a+1)} \left[\frac{L^2}{2} + \frac{a^2 + 2a - 1}{4\lambda(a+1)} \right] \\ C_3 = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{a+1} + \frac{qL^2}{4\lambda(a+1)^2} - \frac{qa}{4\lambda^2(a+1)^3} \quad (2.11)$$

Полученные решения позволяют определить распределение сдвиговых и нормальных усилий вдоль стержня. С учетом (1.2) и (1.3) и обозначений (2.2) получим для безразмерных усилий

$$\bar{N}_{xz} = u + \omega', \quad \bar{N}_z = b\omega'' \quad (2.12)$$

Зависимость усилия \bar{N}_{xz} для стержня, характеризуемого параметрами $a=1/12$, $\chi=0.00675$, $L=100$ представлена на фиг. 1. Различными цифрами 1—3 отмечены кривые, соответствующие различным значениям нагрузки q .

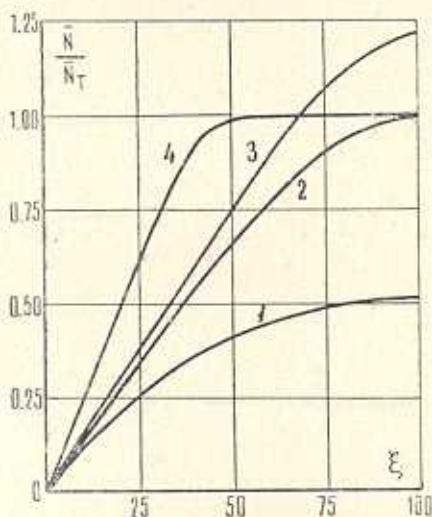
Возьмем в качестве критерия отсутствия проскальзывания условие

$$\bar{N}_{xz} < \bar{N}_\tau$$

Величину нагрузки q , соответствующую достижению $\max N_{xz}$ значения N_τ обозначим q_* . На фиг. 1 этой нагрузке соответствует кривая, отмеченная цифрой 2. Цифрой 1 отмечена кривая для $q < q_*$ и цифрой 3 — для $q > q_*$.

Исходя из решения задачи об изгибе без учета проскальзывания, найдем, что область проскальзывания при $q > q_*$ будет располагаться у краев стержня $\xi^* < |\xi| \leq L$, где ξ^* — граница области проскальзывания, подлежащая определению. В данном случае можно ограничиться только рассмотрением u и w . Для зоны $|\xi| < \xi^*$ u^- и w^- удовлетворяют (2.5), а для $\xi^* < |\xi| \leq L$ имеем

$$aw^{+IV} = q, \quad u^{+''} + 2\lambda \bar{N}_T = 0 \quad (2.13)$$



Фиг. 1.

Решением (2.13), удовлетворяющим условиям опирания (2.7) при $\xi = \pm L$, будет

$$w^+ = \frac{q(\xi - L)^4}{24a} + B_1 \frac{(\xi - L)^3}{6} + B_2(\xi - L) \quad (2.14)$$

$$u^+ = -2\lambda \bar{N}_T \frac{(\xi - L)^2}{2} + B_3$$

Константы $C_1, C_2, C_3, B_1, B_2, B_3$ и координату ξ^* находим из семи условий (1.4). Для определения ξ^* получим

$$\operatorname{tg} \gamma \xi^* = \frac{D}{R} \quad (2.15)$$

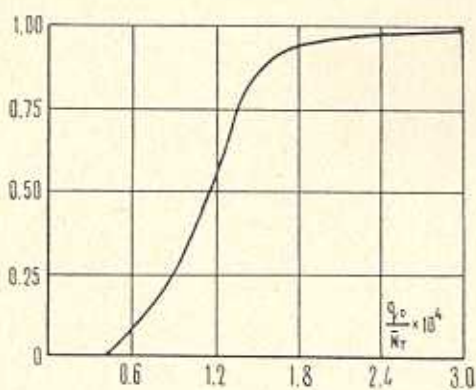
где

$$D = \frac{\xi^* \gamma}{2\lambda} + \frac{\bar{N}_T}{q} \gamma (a + 1)$$

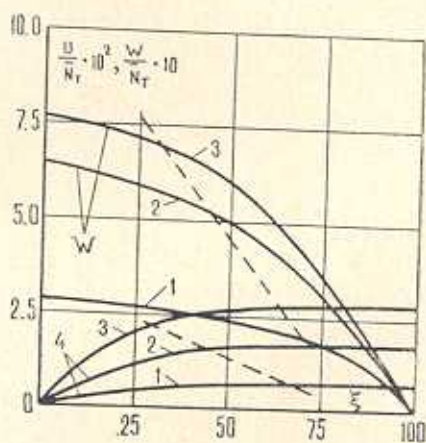
$$R = \frac{1}{2\lambda} + \frac{(L - \xi^*) \xi^{*3}}{6} + (L - \xi^*) \xi^* \left(\frac{a + 1}{4\lambda} + \frac{1}{a} \right) +$$

$$+ \frac{(L - \xi^*)^2 \gamma^2}{4\lambda} - (L - \xi^*) \gamma^2 (a + 1) \frac{\bar{N}_T}{q}$$

Зависимость величины зоны проскальзывания от q/\bar{N}_T показана на фиг. 2. При проскальзывании происходит перераспределение напряжений в слоях. Это перераспределение определяется полученным решением. На фиг. 1 приведен характер изменения зависимости \bar{N}_{xz} (кривая 3) при учете проскальзывания (кривая 4). В результате решения данной задачи определяется также и распределение перемещений u и w по длине стержня (фиг. 3). Штриховыми линиями отмечены границы



Фиг. 2.



Фиг. 3.

зон проскальзывания для данных серий кривых, построенных при различных значениях параметра χ . Цифрой 1 отмечены кривые, соответствующие $\chi=10^{-2}$; цифрой 2 — $\chi=0.00675$ и цифрой 3 — $\chi=10^{-4}$. Используя полученные зависимости, можно определить в каждом случае величину относительного проскальзывания.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 6 XII 1972

ՀՈՒՆ Ե. ՆՈՎԻՉԿՈՎ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՉՈՂԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՍԱՀՔԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ռ լ մ

Բազմաշերտ ձողերի ծաման խնդրի օրինակի վրա տրվում է Վ. Վ. Բոլոտինի շերտավոր միջավայրերի տեսության տարածումը այն դեպքում երբ հաշվի է առնվում սահքը շերտերի միջև: Մանրամասն դիտարկվել է եռաշերտ ձողի ծոռմը նավթի և կրաչին պայմանների ժամանակ: Այդ դեպքի համար որոշվել են շերտերի միմյանց վրայով սահքի, ճիգերի բաշխման և տեղափոխումների միջակայքերը:

THE BENDING OF LAMINATED BEAMS WITH
SLIP BETWEEN LAYERS

Yu. N. NOVICHKOV

S u m m a r y

In the paper Bolotin's theory of laminated media is extended for the case of possible slip between layers. Various criteria of slip are discussed. The bending of a freely supported sandwich beam is chosen to demonstrate the application of the above theory. The distribution of forces and displacements is also found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механика, т. 8, вып. 6, 1972.
3. Болотин В. В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР, ОТН, «Механика и машиностроение», № 3, 1963.
4. Болотин В. В. Прочность, устойчивость и колебания многослойных пластин. В сб. «Расчеты на прочность». Машгиз, вып. 11, 1965.
5. Калинин Н. Г. Составные стержни. В кн. «Прочность, устойчивость, колебания». Справочник под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Изд. «Машиностроение», т. 1, гл. 14, 1968.