ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 4, 1974 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1—5] и др.).

Для пластинок известно (см. [4], стр. 441), что с экспериментальными данными лучше согласуются теоретические значения критических нагрузок, найденные по деформационной теории пластичности без учета эффекта разгрузки.

В настоящей работе на основе деформационной теории пластичности [1] рассматривается устойчивость пластинок с учетом влияний поперечных сдвигов в условиях продолжающегося нагружения. Аналогичная задача на основе теории течения исследована в работе [5].

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h, отнесенную к системе прямоугольных декартовых координат xyz. В качестве механических соотношений примем уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого материала [1]

$$\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_x, \qquad \sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_y, \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} и e_x, e_y, e_{xy} — компоненты напряжения и деформаций,

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$$
$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_x^2 + e_xe_y + e_y^2 + \frac{1}{4}e_{xy}^2} \tag{1.2}$$

— интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига.

Пусть в пластинке, которая деформирована за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy} \tag{1.3}$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$, τ_{xz}, τ_{yz}. Принимая гипотезу непрерывного нагружения ([7, 8]), согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающих нагружение во всех ее точках, с помощью (1.1) для вариаций $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$ и $\delta\tau_{xy}$ получим

$$
\begin{aligned}
\delta\sigma_x &= a_{11}\delta e_x + a_{12}\delta e_y + a_{13}\delta e_{xy} \\
\delta\sigma_y &= a_{22}\delta e_y + a_{12}\delta e_x + a_{23}\delta e_{xy} \\
\delta\tau_{xy} &= a_{33}\delta e_{xy} + a_{13}\delta e_x + a_{23}\delta e_y
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_x + e_y)^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\
a_{22} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_y + e_x)^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\
a_{33} &= \frac{1}{9e_i}\left[3\sigma_i + e_{xy}^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\
a_{12} &= \frac{2}{9e_i}\left[3\sigma_i + 2(2e_x + e_y)(2e_y + e_x)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right] \\
a_{13} &= \frac{2}{9e_i} e_{xy}(2e_x + e_y)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right) \\
a_{23} &= \frac{2}{9e_i} e_{xy}(2e_y + e_x)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Будем исходить из уточненной теории пластинок С. А. Амбарцумяна [6], учитывающей влияние деформации поперечных сдвигов. В условиях отсутствия поверхностных нагрузок для тангенциальных напряжений по этой теории имеем

$$
\tau_{xz} = f(z)\,\varphi(x,\ y), \qquad \tau_{yz} = f(z)\,\psi(x,\ y) \tag{1.6}
$$

где $f(z)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, $\varphi(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$ — искомые функции.

Связь между касательными напряжениями (1.6) и соответствующими деформациями поперечных сдвигов пластинки имеет вид [1]

$$
\tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xz}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{yz} \tag{1.7}
$$

Пользуясь геометрическими соотношениями

$$
e_{xz} = \frac{\partial \delta u_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial x}, \qquad e_{yz} = \frac{\partial \delta u_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \tag{1.8}
$$

где u_x, u_y, u_z — перемещения по направлению осей координат x, y, z, соответственно, с учетом (1.6) и (1.7) получим

$$\frac{\partial \delta u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\varphi(x, y)$$
$$\frac{\partial \delta u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \delta u_z}{\partial y} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\psi(x, y) \tag{1.9}$$

Пренебрегая изменением нормальных перемещений точек пластинки по ее толщине и деформированием срединной плоскости ($u=v=0$), из (1.9) путем интегрирования по z находим

$$\delta u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3e_i}{\sigma_i} J_0(z)\varphi(x, y)$$
$$\delta u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3e_i}{\sigma_i} J_0(z)\psi(x, y) \tag{1.10}$$

Здесь

$$J_0(z) = \int_0^z f(z)\,dz \tag{1.11}$$

w — прогиб пластинки.

Используя известные геометрические соотношения, с учетом (1.10) для вариаций деформаций получим

$$\delta e_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3J_0(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)$$
$$\delta e_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3J_0(z)\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) \tag{1.12}$$
$$\delta e_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 3J_0(z)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]$$

Внеся (1.12) в (1.4) и присоединяя к ним (1.6), для приращений напряжений выпученной пластинки находим

$$\delta\sigma_x = -z\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{13}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$
$$\tag{1.13}$$
$$\delta\sigma_y = -z\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta\tau_{xy} = -z\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$

$$\left. + a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\} \tag{1.13}$$

$$\tau_{xz} = f(z)\varphi(x, y), \qquad \tau_{yz} = f(z)\psi(x, y)$$

Поступая как обычно, для приращений моментов и поперечных сил получим

$$\delta M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) +$$

$$+ 3J_1\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{13}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta M_y = -\frac{h^3}{12}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) +$$

$$+ 3J_1\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\} \tag{1.14}$$

$$\delta H = -\frac{h^3}{12}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) +$$

$$+ 3J_1\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$N_1 = J_2\varphi(x, y), \qquad N_2 = J_2\psi(x, y)$$

где

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} zJ_0(z)\,dz, \qquad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} f(z)\,dz \tag{1.15}$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид [5]

$$\frac{\partial\delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta H}{\partial y} = N_1, \qquad \frac{\partial\delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial\delta H}{\partial x} = N_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + T_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = 0 \tag{1.16}$$

где T_x^0, T_y^0, S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния —

$$T_x^0 = h\sigma_x, \qquad T_y^0 = h\sigma_y, \qquad S_0 = h\tau_{xy} \tag{1.17}$$

Подставляя (1.14) в (1.16), получим следующую систему относительно функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial x}\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{13}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial y}\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{12J_2}{h^3}\varphi=0$$

$$(1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial y}\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial x}\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{12J_2}{h^3}\psi=0$$

$$J_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+T_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

Это система устойчивости пластинки за пределами упругости материала.

Пренебрегая влиянием деформаций поперечных сдвигов, вместо системы (1.18) получим уравнение устойчивости неупругой пластинки в классической постановке.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости шарнирно опертой по всему контуру ($x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$) прямоугольной пластинки, сжатой в своей плоскости по направлениям x и y давлениями p и kp, соответственно. Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения материала [1]

$$\sigma_i=3G\left[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s\right],\qquad \lambda=1-\frac{1}{3G}\frac{d\sigma_i}{de_i}=\text{const}\tag{2.1}$$

где G — модуль сдвига, e_s — предел упругих деформаций материала.

Полагая

$$T_x^0=-ph,\qquad T_y^0=-kph,\qquad S^0=0\tag{2.2}$$

и используя (1.1), (1.2) и (2.1), находим

$$\sigma_i = \varkappa p, \qquad e_i = \frac{\varkappa p - \lambda p_s}{3G(1-\lambda)}, \qquad \varkappa = \sqrt{1-k+k^2}, \qquad p_s = 3Ge_s$$

$$2e_x + e_y = -\frac{\varkappa p - \lambda p_s}{2\varkappa G(1-\lambda)}, \qquad 2e_y + e_x = -k\frac{\varkappa p - \lambda p_s}{2\varkappa G(1-\lambda)}, \qquad e_{xy} = 0 \tag{2.3}$$

Из (1.5) с учетом (2.3) для коэффициентов a_{ij} получим

$$a_{11} = A\frac{4\varkappa^3 p - 3B}{\varkappa p - B}, \qquad a_{22} = A\frac{4\varkappa^3 p - 3k^2 B}{\varkappa p - B}, \qquad a_{33} = A\frac{\varkappa^3 p}{\varkappa p - B}$$

$$a_{12} = A\frac{2\varkappa^3 p - 3kB}{\varkappa p - B}, \qquad a_{13} = a_{23} = 0 \tag{2.4}$$

$$A = \frac{G(1-\lambda)}{\varkappa^2}, \qquad B = \lambda p_s, \quad \frac{e_i}{\sigma_i} = \frac{1}{3a_{33}}$$

Имея в виду, что коэффициенты a_{ij} не зависят от координат, из (1.18) получим систему устойчивости рассматриваемой шарнирно опертой пластинки

$$\frac{ph}{J_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_{12} + 2a_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12J_1}{h^3}\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \frac{12J_2}{h^3}\varphi - \frac{12J_1}{h^3}\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (a_{12} + 2a_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12J_1}{h^3}\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} -$$

$$- \frac{12J_1}{h^3}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \frac{12J_2}{h^3}\psi = 0$$

Граничные условия шарнирного опирания пластинки с учетом (1.10) и (1.14) представим в виде

при $x = 0, \ x = a$

$$w = 0, \quad u_y \text{ или } \psi = 0$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{J_1}{a_{33}}\left(a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.6}$$

при $y = 0, \ y = b$

$$w = 0, \quad u_x \text{ или } \varphi = 0$$

$$M_y = -\frac{h^3}{12}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{J_1}{a_{33}}\left(a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

Соблюдая эти граничные условия, решение системы (2.5) ищем в форме

$$
\begin{aligned}
w(x,\ y) &= C_w \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
\varphi(x,\ y) &= C_\varphi \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
\psi(x,\ y) &= C_\psi \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где C_w, C_φ, C_ψ — постоянные, m и n — целые числа, показывающие число полуволн искривленной пластинки. Подставляя (2.7) в (2.5), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных:

$$
\begin{aligned}
& ph\left(\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}\right)C_w-\frac{J_2 m}{\pi a}C_\varphi-\frac{J_2 n}{\pi b}C_\psi=0\\
& \frac{\pi m}{a}\left[a_{11}\frac{m^2}{a^2}+(a_{12}+2a_{33})\frac{n^2}{b^2}\right]C_w-\frac{12}{h^3}\left[\frac{J_2}{\pi^2}+J_1\left(\frac{n^2}{b^2}+\frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{m^2}{a^2}\right)\right]C_\varphi-\\
& \qquad -\frac{12}{h^3}J_1\left(1+\frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{mn}{ab}C_\psi=0\\
& \frac{\pi n}{b}\left[a_{22}\frac{n^2}{b^2}+(a_{12}+2a_{33})\frac{m^2}{a^2}\right]C_w-\frac{12}{h^3}J_1\left(1+\frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{mn}{ab}C_\varphi-\\
& \qquad -\frac{12}{h^3}\left[\frac{J_2}{\pi^2}+J_1\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{n^2}{b^2}\right)\right]C_\psi=0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Приравнивая нулю определитель этой системы (условие существования нетривиального решения), с учетом (2.4) для критического давления получим квадратное уравнение

$$A_1 p^2 - A_2 p + A_3 = 0 \tag{2.9}$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[\frac{1}{\pi^2}+4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\\
A_2 &= \frac{3B}{\varkappa^3}\frac{J_1}{J_2}\left\{k^2\frac{n^2}{b^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(4\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\right.\\
&\quad \left.+\frac{m^2}{a^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+4\frac{n^2}{b^2}\right)\right]-6\frac{J_1}{J_2}k\frac{m^2n^2}{a^2b^2}\right\}+\\
&\quad +\frac{B}{\varkappa}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[\frac{1}{\pi^2}+4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$+\frac{1}{3}Ah^2\varkappa^2\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]$$

$$A_3=\frac{ABh^2}{\varkappa}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}\right)\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{J_1}{J_2}(1-k)^2\frac{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\right\}+3\frac{J_1}{J_2}\frac{B^2}{\varkappa^4}\left\{k^2\frac{n^2}{b^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(4\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\right. \tag{2.10}$$

$$\left.+\frac{m^2}{a^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+4\frac{n^2}{b^2}\right)\right]-6\frac{J_1}{J_2}k\frac{m^2n^2}{a^2b^2}\right\}$$

Предположим, что пластинка теряет устойчивость в пределах упругости ($\lambda=0$). Тогда с учетом (2.1), (2.4) и (2.10) имеем

$$B=0,\qquad A=\frac{G}{\varkappa^2},\qquad A_3=0 \tag{2.11}$$

Соответствующее значение критического давления p_e из (2.9) определится однозначно

$$p_e=\frac{A_2}{A_1}=\frac{Gh^2}{3}\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\frac{1}{\frac{1}{\pi^2}+4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \tag{2.12}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\sigma_i\big|_{p=p_e}=\varkappa p_e>\sigma_s=3Ge_s \tag{2.13}$$

то есть пластинка теряет устойчивость за пределами упругости. С учетом (2.13) и (2.4) для этого случая имеем

$$p_{\text{кр.}}>\frac{\sigma_s}{\varkappa}>\frac{B}{\varkappa}=\frac{\lambda\sigma_s}{\varkappa} \tag{2.14}$$

С учетом (2.10) для значения функции

$$\Phi(p)=A_1p^2-A_2p+A_3 \tag{2.15}$$

в точке $p=\frac{B}{\varkappa}$ получим

$$\Phi\left(\frac{B}{\varkappa}\right)=-\frac{1}{12\varkappa}\frac{ABh^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{m^4}{a^4}(1-2k)^2+\frac{n^4}{b^4}(2-k)^2+\right.\right.$$

$$\left.+2\frac{m^2n^2}{a^2b^2}(4-7k+4k^2)\right]+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left[\frac{m^2}{a^2}-2\frac{n^2}{b^2}+\right.$$

$$\left.\left.+k\left(\frac{n^2}{b^2}-2\frac{m^2}{a^2}\right)\right]^2\right\}<0 \qquad (2.16)$$

Так как функция $\Phi(p)$ отрицательные значения принимает только на отрезке, ограниченном корнями уравнения (2.9), то в силу (2.16) заключаем, что значение $p=\frac{B}{\varkappa}$ находится между корнями этого уравнения, то есть

$$p_1<\frac{B}{\varkappa}<p_2 \qquad (2.17)$$

Очевидно, что первый корень уравнения (2.9) p_1 не может быть решением задачи, так как для него нарушается условие (2.14).

Таким образом, критическое значение давления $p_{кр}$ определится большим корнем уравнения (2.9)

$$p_{кр}=p_2=\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1} \qquad (2.18)$$

Введя понятие секущего модуля

$$E_c=\frac{\sigma_i}{e_i}=3A\varkappa^3\frac{p}{\varkappa p-B} \qquad (2.19)$$

квадратному уравнению (2.9) можно придать формально линейный вид и для критического значения давления записать

$$p_{кр}=\frac{1}{A_1BE_c}\left[A_2BE_c+A_3\varkappa(3A\varkappa^2-E_c)\right] \qquad (2.20)$$

Однако, выражение (2.20) не является окончательным, так как секущий модуль E_c зависит от неизвестного $p_{кр}$. В этом смысле предпочтение следует отдать выражению (2.18).

Отбрасывая из (2.10) члены, содержащие $\frac{J_1}{J_2}$, получим выражения коэффициентов A_i по классической постановке задачи устойчивости

$$A_1=1, \qquad A_2=\frac{B}{\varkappa}+\frac{\pi^2}{3}Ah^2\varkappa^2\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}} \qquad (2.21)$$

$$A_3 = \frac{\pi^2}{4\varkappa} ABh^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2} \right) \tag{2.21}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Для квадратной пластинки $(a=b)$, сжимающейся со всех сторон равномерным давлением $p(k=\varkappa=1)$, из (2.10) получим

$$A_1 = 1 + 8 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \qquad A_2 = B + \frac{2}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2}$$
$$A_3 = \frac{1}{2} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.22}$$

б) Полагая в (2.10) $k=0$, $\varkappa=1$ и переходя к пределу при $b \to \infty$, получим выражения коэффициентов A_i для шарнирно опертой бесконечной полосы, сжимающейся равномерным давлением p

$$A_1 = 1 + 4 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \qquad A_2 = B + \frac{1}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2}$$
$$A_3 = \frac{1}{4} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.23}$$

3. Рассмотрим численный пример. Имея в виду, что произвол в разумном выборе закона распределения касательных напряжений по толщине пластинки $f(z)$ не может внести недопустимых погрешностей [6], положим

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \tag{3.1}$$

С учетом (1.11) и (1.15) имеем

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{h^2}{10} \tag{3.2}$$

Пусть

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}, \qquad \lambda = \frac{1}{6}, \qquad G = 7 \cdot 10^5 \ кг/см^2, \qquad \tau_s = 2 \cdot 10^3 \ кг/см^2 \tag{3.3}$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления значений критического давления для бесконечной полосы, сжимающейся в направлении коротких сторон. С целью сравнения в последних трех столбцах таблицы приводятся значения критического давления по теории течения [5], подсчитанные для этого же случая (3.3).

Таблица 1

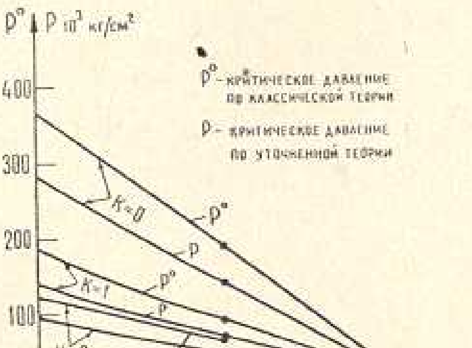
m	$p_д^0$ в 10^3 *кг/см*^{2}	$p_д$ в 10^3 *кг/см*^{2}	$p_д^0/p_д$	$p_т^0$ в 10^3 *кг/см*^{2}	$p_т$ в 10^3 *кг/см*^{2}	$p_т^0/p_т$
1	76.769	66.334	1.157	80.524	70.759	1.138
2	306.827	188.135	1.631	322.096	207.536	1.552

Из этой таблицы видно, что относительные поправки, вносимые со стороны уточненной теории пластинок [6], для обеих теорий пластичности примерно одинаковы. Разница между абсолютными значениями критического давления обусловлена характерами теорий пластичности и существенно не зависит от учета влияния деформаций поперечного сдвига. Как и обычно, здесь тоже теория течения дает завышенные значения для критического давления.

Рассмотрим численный пример шарнирно опертой квадратной пластинки, сжимающейся давлениями p и kp. Варьируя значения параметров λ и k, приходим к результатам, представленным в табл. 2.

Таблица 2

k \ λ	0			0.5			1.0		
	p^0 в 10^3 *кг/см*^{2}	p	p^0/p	p^0	p	p^0/p	p^0	p	p^0/p
0	368.47	280.03	1.32	185.05	140.87	1.31	2.00	2.00	1.00
1	184.23	140.01	1.32	92.37	70.44	1.31	2.00	2.00	1.00
2	122.82	93.34	1.32	61.66	47.00	1.31	1.15	1.15	1.00



Фиг. 1.

С помощью этих данных на фиг. 1 построены графики изменения критических давлений и их отношений в зависимости от параметра λ, характеризующего пластические свойства материала. Из графиков замечаем, что наибольшее расхождение между значениями критических давлений по классической и уточненной теориям имеет место для линейно упругого материала $\lambda=0$. С увеличением пластических свойств это расхождение монотонно убывает и при стремлении материала к идеально-пластическому (при $\lambda\to 1$) оно полностью исчезает.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 XI 1973

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՑ ԱՅՆ ԿՈՂՄ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության հիման վրա շարունակվող բեռնավորման պայմաններում դիտարկվում է սալերի կայունությունը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ։ Ստացվում է սալերի կայունության հավասարումների սիստեմը և բերվում է վերջինիս լուծումը մի քանի մասնավոր դեպքերի համար։

ON STABILITY OF PLATES OUTSIDE ELASTICITY WITH DUE REGARD FOR TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

Summary

The stability of plates outside elasticity with due regard for transversal displacements in conditions of continued loading in terms of deformation theory of plasticity is considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Физматгиз, М., 1969.
3. *Хорн М.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, № 1, 1965.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. Физматгиз, М., 1967.
5. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, т. XXVII, в. 4, 1963.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Физматгиз, М., 1967.
7. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, v. XIV, № 5, 1947.
8. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, т. XXI, в. 3, 1957.