

В. Х. СИРУНЯН

## ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ТРЕЩИНА В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача математической теории трещин касательного разрыва.

Пусть имеется цилиндрическая трещина радиуса  $R$  и длины  $2a$  в упругом пространстве с упругими постоянными  $E$  и  $\nu$ . На цилиндрической поверхности трещины действуют касательные силы произвольной интенсивности  $\tau(z)$ .

Требуется определить величину предельной нагрузки, необходимой для распространения равновесной трещины.

Решение поставленной задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром, выражающимся интегралом Фурье. Решение полученного уравнения строится известными асимптотическими методами [1, 2] применительно к случаям больших и малых  $\lambda$ , где  $\lambda$  — безразмерный параметр, являющийся отношением радиуса цилиндра к полудлине трещины.

Решения для больших и малых значений  $\lambda$  перекрывают друг друга на некотором диапазоне изменения параметра  $\lambda$ .

Предварительно рассматриваются две вспомогательные задачи, на которых основывается вывод разрешающего интегрального уравнения.

### § 1. Вывод интегрального уравнения

1) Имеем упругий бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , на боковой поверхности ( $r = R$ ) которого задано перемещение  $v = \gamma^{(1)}(z)$ . Предполагается, что на оси цилиндра ( $r = 0$ ) перемещения ограничены.

Используя из [3] соответствующие формулы, получим

$$T_{r\theta}^{(1)} = \frac{\alpha G \Gamma^{(1)}(x) \left[ I_0(\alpha r) - \frac{2}{\alpha r} I_1(\alpha r) \right]}{I_1(\alpha R)} \quad (1.1)$$

где  $T_{r\theta}^{(1)}$  и  $\Gamma^{(1)}(x)$  — трансформаты Фурье касательного напряжения  $\tau_{r\theta}^{(1)}$  и перемещения  $\gamma^{(1)}(z)$ ,  $I_0(\alpha r)$  и  $I_1(\alpha r)$  — функции Бесселя мнимого аргумента,  $G$  — модуль сдвига материала.

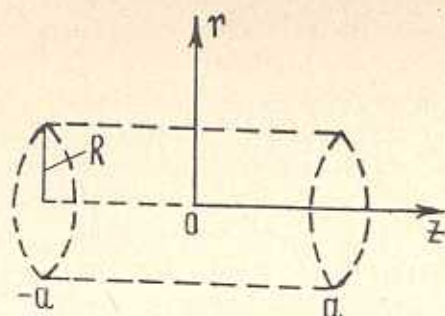
2) Имеем ослабленное бесконечным цилиндром радиуса  $R$  упругое пространство. На поверхности цилиндра ( $r = R$ ) задано перемещение  $\gamma^{(2)}(z)$ , которое предполагается ограниченным в бесконечности. Определим трансформанту Фурье касательных напряжений по формуле

$$T_{r_0}^{(2)} = \frac{zG\Gamma^{(2)}(z) \left[ K_0(zr) + \frac{2}{zr} K_1(zr) \right]}{K_1(zR)} \quad (1.2)$$

Здесь  $K_0(zr)$  и  $K_1(zr)$  — функции Макдональда. При  $r = R$  требуем

$$\begin{cases} \tau_{r_0}^{(1)} = \tau_{r_0}^{(2)} = \tau(z) \\ \gamma^{(2)}(z) - \gamma^{(1)}(z) = g(z) \end{cases} \quad |z| \leq a \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \tau_{r_0}^{(1)} = \tau_{r_0}^{(2)} \\ \gamma^{(1)}(z) = \gamma^{(2)}(z) \end{cases} \quad |z| > a \quad (1.4)$$



фиг. 1

Предполагается, что при  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$  перемещения и напряжения ограничены.

Учитывая (1.1), (1.2) и (1.4), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-isz} dx = 0, \quad F(x) = \Gamma^{(2)}(x) - \Gamma^{(1)}(x), \quad |z| \geq a \quad (1.5)$$

$$\frac{\Gamma^{(1)}(z) \omega_1(zR)}{I_1(zR)} = -\frac{\Gamma^{(2)}(z) \omega_2(zR)}{K_1(zR)} \quad (1.6)$$

где

$$\omega_1(zR) = I_0(zR) - \frac{2}{zR} I_1(zR), \quad \omega_2(zR) = K_0(zR) + \frac{2}{zR} K_1(zR) \quad (1.7)$$

Имея в виду (1.3) и (1.5), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-isz} dx = \begin{cases} g(z), & |z| \leq a \\ 0, & |z| > a \end{cases} \quad (1.8)$$

Определяя из функциональных уравнений (1.5), (1.6)  $\Gamma^{(2)}(z)$  и подставляя в (1.2), с учетом (1.8) получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{aF(a) \omega_1 \omega_2}{K_1 \omega_1 + I_1 \omega_2} e^{-iz} dz = -\frac{\tau(z)}{G} \quad |z| \leq a \quad (1.9)$$

$$\int_{-a}^a g(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi = F(a)$$

Обозначив

$$g(\xi) = 2f(\xi) \quad (1.10)$$

и учитывая, что  $g(\pm a) = 0$ , после некоторых преобразований и интегрирования по  $z$ , найдем

$$\int_{-a}^a f'(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi \tau_1(z)}{G} + c \quad (1.11)$$

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad u = aR \quad (1.12)$$

$$L(u) = 2 \left[ \frac{K_1}{\omega_1} + \frac{I_1}{\omega_2} \right]^{-1} \quad (1.13)$$

$$\frac{d\tau_1(z)}{dz} = \tau(z) \quad (1.14)$$

Производя в (1.11) замену переменных и вводя обозначения

$$x = \frac{\xi}{a}, \quad y = \frac{z}{a}, \quad \lambda = \frac{R}{a}, \quad f'(\xi) = \varphi(x) \quad (1.15)$$

получим

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) M\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) dx = -\frac{\pi \tau_1(y)}{G} + c \quad (1.16)$$

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad (1.17)$$

## § 2. Приближенное решение уравнения (1.16) при больших $\lambda$

Ядро  $M(t)$  в окрестности  $t=0$  имеет логарифмическую особенность, поэтому представим его в виде

$$M(t) = -\ln(t) + H(t) \quad (2.1)$$

Чтобы определить  $H(t)$ , ядро  $M(t)$  представим как сумму трех интегралов

$$M(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du = \int_0^{0.7} \left( \frac{1}{2} - \frac{u^2}{12} \right) \cos ut du + \\ + \int_{0.7}^{1.5} \frac{L(u)}{u} \cos ut du + \int_{1.5}^{\infty} \left( \frac{1}{u} - \frac{15}{8u^2} + \frac{5}{2u^3} \right) \cos ut du \quad (2.2)$$

В первом интеграле используется разложение в ряд бесселевых функций до членов порядка  $u^3$  для малых значений аргумента.

Здесь расхождение между  $L(u)$  и его разложением не превосходит одного процента.

В третьем интеграле используется асимптотическое разложение бесселевых функций до членов порядка  $u^{-4}$ .

Расхождение между  $L(u)$  и его разложением при больших значениях  $u$  ( $u \geq 1.5$ ) не превышает трех процентов.

Для вычисления второго интеграла используется метод Филона [4].

Ошибка, получаемая в результате применения метода Филона, имеет величину меньшую, чем  $(6.75t - 0.2t^3) \cdot 10^{-4}$ .

Учитывая вышесказанное, для функции  $H(t)$  получим следующее выражение:

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} + \ln |t| \sum_{i=1}^{\infty} b_i t^{2i} \quad (2.3)$$

где  $a_0 = -0.5869$ ,  $a_1 = 0.5309$ ,  $a_2 = 0.1757$   
 $b_1 = -0.9375$ ,  $b_2 = -0.1042$  и т. д.

Теперь сведем интегральное уравнение (1.16) к эквивалентному ему интегральному уравнению второго рода.

Учитывая (2.1) и (2.3), имеем

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left[ C_1 + \int_{-1}^1 \frac{z(\eta) \sqrt{1-\eta^2}}{G(\eta-y)} d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2i}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_{-1}^1 \varphi(\zeta) \left( 2ia_i + b_i + 2ib_i \ln \left| \frac{\eta-\zeta}{\lambda} \right| \right) (\eta-\zeta)^{2i-1} d\zeta \right] dy \right] \quad (2.4)$$

Следуя [1], найдем решение интегрального уравнения (2.4) в виде

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-2n} \varphi_{nm}(y) \quad (2.5)$$

Подставляя  $\varphi(y)$  в виде (2.5) в правую и левую части интегрального уравнения (2.4) и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\lambda^{-2}$  и  $\ln \lambda$ , получим следующие соотношения для последовательного определения  $\varphi_{nm}(y)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{00}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left( C_1 + \int_{-1}^1 \frac{\tau(\eta) \sqrt{1-\eta^2}}{G(\eta-y)} d\eta \right) \\ \varphi_{10}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} d\eta \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\eta-\zeta|) (\eta-\zeta) d\zeta \\ \varphi_{11}(y) &= -\frac{2b_1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} d\eta \int_{-1}^1 \varphi_{00}(\zeta) (\eta-\zeta) d\zeta \\ \varphi_{20}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} d\eta \int_{-1}^1 \left[ \varphi_{10}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\eta-\zeta|) (\eta-\zeta) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{00}(\zeta) (4a_2 + b_2 + 4b_2 \ln |\eta-\zeta|) (\eta-\zeta)^2 \right] d\zeta \\ \varphi_{21}(y) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} d\eta \int_{-1}^1 \left[ \varphi_{11}(\zeta) (2a_1 + b_1 + 2b_1 \ln |\eta-\zeta|) (\eta-\zeta) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_1 \varphi_{10}(\zeta) (\eta-\zeta) - 4b_2 \varphi_{00}(\zeta) (\eta-\zeta)^2 \right] d\zeta \\ \varphi_{22}(y) &= -\frac{2b_1}{\pi^2 \sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta-y} d\eta \int_{-1}^1 \varphi_{11}(\zeta) (\eta-\zeta) d\zeta \quad \text{и т. д.} \quad (2.6) \end{aligned}$$

*Пример* (большие  $\lambda$ ). Определим коэффициент интенсивности касательных напряжений, когда касательное напряжение равномерно распределено по берегам трещины и равно

$$\tau(z) = \tau = \text{const}$$

Тогда формулы (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{00}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} (C_1 + Dy) \\ \varphi_{10}(y) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \left[ C_1 \left( \frac{1}{2} - y^2 \right) (2a_1 + 3b_1 - 2b_1 \ln 2) - \right. \\ &\quad \left. - Dy \left( b_1 \ln 2 - a_1 - \frac{b_1}{2} - b_1 y^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\varphi_{II}(y) = -\frac{2b_1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \left[ C_1 \left( \frac{1}{2} - y^2 \right) + \frac{Dy}{2} \right] \text{ и т. д.} \quad (2.7)$$

$$D = -\frac{\pi\tau}{G} \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) в (2.5) и сохраняя члены с точностью порядка  $\lambda^{-4}$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \left\{ C_1 \left[ 1 + \frac{(1-2y^2)}{2\lambda^2} (2a_1 + 3b_1 - 2b_1 \ln 2\lambda) \right] + \right. \\ & \left. + Dy \left[ 1 + \frac{1}{\lambda^2} \left( a_1 + \frac{b_1}{2} - b_1 \ln 2\lambda + b_1 y^2 \right) \right] \right\} + O(\lambda^{-4}) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Переходя в (2.9) к старым переменным и обозначениям (1.15), интегрируя  $f'(z)$  в пределах  $(-a, a)$  и учитывая  $f(\pm a) = 0$ , получим  $C_1 = 0$ .

Учитывая (2.8), окончательно для функции разрыва перемещений  $g(z)$  получим

$$g(z) = -\frac{2\tau z}{G\sqrt{a^2-z^2}} \left[ 1 + \frac{1}{\lambda^2} \left( a_1 + \frac{b_1}{2} - b_1 \ln 2\lambda + b_1 \frac{z^2}{a^2} \right) \right] + O(\lambda^{-4}) \quad (2.10)$$

Коэффициент интенсивности касательных напряжений в точках  $z=a$  и  $z=-a$  определим из условий

$$\begin{aligned} T_a &= -\frac{G}{2} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{a-z} \frac{d}{dz} g(z) \\ T_{-a} &= \frac{G}{2} \lim_{z \rightarrow -a} \sqrt{a+z} \frac{d}{dz} g(z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

В табл. 1 приведено значение  $\tau^* = \frac{\tau\sqrt{R}}{T_a}$

Таблица 1<sup>\*)</sup>

$\lambda = \frac{R}{a}$	1.9	2.0	3.0	4.0	6.0
$\tau^*$	1.595	1.655	2.190	2.630	3.310

<sup>\*)</sup> При составлении табл. 1 в уравнении (2.10) учтены также члены, содержащие  $\lambda^{-4}$ .

§ 3. Приближенное решение уравнения (1.11) при малых  $\lambda$ 

Ядро уравнения (1.11) имеет вид

$$K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut du \quad \begin{cases} L(u) \rightarrow 1 & \text{при } u \rightarrow \infty \\ L(u) \rightarrow Au & \text{при } u \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Функцию  $L(u)$  в зависимости от требуемой точности можно аппроксимировать разными выражениями (смотри в [2] формулы (1.3), (1.4) и (1.5)).

Здесь функцию  $L(u)$  будем аппроксимировать выражением

$$L(u) = \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C} u, \quad \left( \frac{B}{C} = A \right) \quad (3.2)$$

Рассмотрим наряду с уравнением (1.11) вспомогательные уравнения

$$\int_{-\infty}^a f'_-(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi\tau_1(z)}{G} + c \quad (-\infty < z \leq a) \quad (3.3)$$

$$\int_{-a}^{\infty} f'_+(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi\tau_1(z)}{G} + c \quad (-a < z < \infty) \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) K\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\xi = -\frac{\pi\tau_1(z)}{G} + c \quad (|z| < \infty) \quad (3.5)$$

Представим нулевой член асимптотики решения уравнения (1.11) в виде комбинации решений интегральных уравнений (3.3), (3.5)

$$f'(\xi) = f'_+(\xi) + f'_-(\xi) - V(\xi) \quad (3.6)$$

Решения уравнений (3.3) и (3.4) могут быть получены методом Винера-Хопфа, а решение уравнения (3.5) — применением теоремы о свертках для преобразования Фурье. Итак, приближенное решение (3.6) уравнения (1.11) при малых  $\lambda$  всегда может быть построено.

Принимая, что касательное напряжение равномерно распределено по берегам трещины, получим  $\tau_1(z) = \tau(z)$ .

Решения интегральных уравнений (3.3), (3.4) и (3.5) соответственно будут иметь вид

$$f'_-(z) = \frac{c}{R} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) - \tau \left[ \frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$f'_+(z) = \frac{c}{R} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) + \tau \left[ \frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) \right] \quad (3.8)$$

$$V(z) = \frac{c - \tau z}{ARG} \quad (3.9)$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{GV\bar{A}} \left( \frac{1}{V\bar{A}} \operatorname{erf} V\bar{B}t + \frac{e^{-Bt}}{V\sqrt{\pi t}} \right)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{G} \left( c_{11}\varphi_0(t) + c_{21} \int_0^t \varphi_0(u) du \right)$$

$$c_{11} = \frac{1}{2B\sqrt{A}} - \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c_{21} = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad B = 1.5$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{G \cdot A} \left[ t \cdot \operatorname{erf} V\bar{B}t + \left( \frac{t}{\sqrt{B}} + \frac{V\bar{A}}{2B} - \frac{A}{V\bar{B}} \right) \frac{e^{-Bt}}{V\sqrt{\pi t}} \right]$$

Подставляя значение (3.7) — (3.9) в (3.6), получим

$$\begin{aligned} f'(z) = \frac{c}{R} \left[ \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) + \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) \right] + \tau \left[ \frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) + \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) - \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

Неизвестная постоянная  $c$  определится из условия  $f(\pm a) = 0$ .

Интегрируя (3.10) по  $z$  в пределах  $(-a, a)$ , получим  $c=0$ .

По формулам (2.11) определим коэффициент интенсивности касательных напряжений при малых значениях  $\lambda$ .

Учитывая при этом, что

$$\lim_{z \rightarrow a} V\sqrt{a-z} \varphi_0\left(\frac{a+z}{R}\right) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow a} V\sqrt{a-z} \varphi_1\left(\frac{a+z}{R}\right) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow a} V\sqrt{a-z} \varphi_0\left(\frac{a-z}{R}\right) = \frac{V\bar{R}}{GV\bar{A}\pi}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} V\sqrt{a-z} \varphi_1\left(\frac{a-z}{R}\right) = \frac{V\bar{R}}{GV\bar{A}\pi} \left( \frac{1}{2B} - \frac{V\bar{A}}{V\bar{B}} \right)$$

для предельной нагрузки получим

$$\tau^* = \frac{\tau V\bar{R}}{T_a} = V\bar{A}\pi \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2B} + \frac{V\bar{A}}{V\bar{B}} \right)^{-1} \quad (3.11)$$

В табл. 2 приведены значения  $\tau^*$ , подсчитанные по формуле (3.11) для разных значений  $\lambda$ .



Таблица 2

$\lambda$	1/8	1/4	1/2	3/4	1.0	1.5	1.9	2.0
$\tau^*$	0.152	0.295	0.558	0.795	1.007	1.375	1.628	1.681

Сравнивая значения  $\tau^*$  для больших и малых  $\lambda$ , приходим к выводу, что для значений  $\lambda$ , близких к двум, оба решения перекрывают друг друга.

Автор благодарит В. М. Александрова за постановку задачи и ценные замечания.

Кировоаканский филиал Ереванского политехнического института им. К. Маркса

Поступила 29 I 1973

Վ. Խ. ՍԻՐՈՆԻԱՆԻ

### ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՔ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՉ

#### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Առաձգական տարածության մեջ ունենք զլանային ճաք, որի կողմնային մակերևույթի վրա ազդում են շոշափող ուժեր:

Գիտարկված խնդիրը բերվում է ճաքի ափերի շոշափողի ուղղությամբ անհայտ տեղափոխության խզման նկատմամբ ինտեգրալ հավասարման:

Ստացված ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է մեծ և փոքր  $\lambda$  պարամետրերի եղանակով, որտեղ  $\lambda$ -ն շափողականության շունեցող մեծություն է՝ և հանդիսանում է զլանի շառավիղի և ճաքի կիսաերկարությանը հարաբերությունը:

Պարամետրի փոփոխման որոշ սահմանում՝  $\lambda$ -ի մեծ և փոքր արժեքների համապատասխանող լուծումները համընկնում են:

Ստացված են բանաձևեր սահմանային բեռի որոշման համար:

### A CYLINDRICAL CRACK IN AN ELASTIC SPACE

V. Kh. SIRUNIAN

#### S u m m a r y

A problem in the mathematical theory of cracks is considered. In an elastic space there is a cylindrical crack with a tangential stress applied to its boundary surface. Some formulas for determination of limiting load are derived.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. МТТ, № 4, 1967.
2. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, Механика, т. I, № 2, 1965.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лши Ф. Специальные функции. Изд-во «Наука», М., 1964.