

С. Т. ХАЧАТРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ
ВРЕМЕНИ

Современный этап развития прикладной теории устойчивости неразрывно связан с созданием математически строгих алгоритмов исследования устойчивости неустановившихся состояний с учетом конечности времени протекания процесса [1, 3, 4, 5].

В настоящей статье предлагается алгоритм получения условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения [1] по отношению к заданной области предельных отклонений параметров линейной части нестационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка посредством матриц вдвое меньшего порядка по сравнению с общепринятыми.

1. Рассматривая материальные системы, описываемые уравнениями возмущенного движения, воспользуемся определением об устойчивости движения на заданном интервале времени в следующей постановке [1].

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho > 0$ любое решение $x = x(t)$ уравнения, начальное значение $x_0 = x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)x_0, G(t_0)x_0) \leq \rho^2 \quad (1.1)$$

на заданном (конечном) интервале $t_0 \leq t < T$ удовлетворяют условию

$$(G(t)x(t), G(t)x(t)) \leq \rho^2 \quad (1.2)$$

где $G(t)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на интервале $[t_0, T)$, в противном случае — неустойчиво. Поскольку задача об устойчивости на заданном интервале времени $[t_0, T)$ в общем случае зависит от выбора начального момента t_0 , невозмущенное движение будем называть равномерно устойчивым в смысле приведенного выше определения, если оно устойчиво на любом интервале $[t_*, T)$, где $t_* \in [t_0, T)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения представлены в виде

$$L(t) \frac{d^2 q}{dt^2} + N(t) q = h(t, q) \quad (2.1)$$

где $L(t)$ и $N(t)$ — квадратные матрицы порядка m , а $h(t, q)$ и q — непрерывные вектор-функции.

Будем предполагать, что $L(t)$ — невырожденная матрица, матрицы $L(t)$ и $N(t)$ непрерывны на заданном интервале времени $[t_0, T)$, а эле-

менты $h(t, q)$ — нелинейные функции возмущений q_i ($i = 1, \dots, m$) — таковы, что равномерно по t в пределах интервала $[t_0, T)$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{h(t, q)}{|q|} = 0 \quad (2.2)$$

Из свойства нелинейности $h(t, q)$, выраженного условием (2.2), следует наличие решения $q=0$ уравнения (2.1) и далее будем рассматривать решения, остающиеся достаточно близкими к тривиальному. Невырожденность матрицы $L(t)$ обеспечивает возможность приведения уравнения (2.1) к нормальному виду

$$\frac{dx}{dt} = U(t)x + H(t, x) \quad (2.3)$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & -L^{-1}(t)N(t) \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ q \end{pmatrix}, \quad H(t, x) = \begin{pmatrix} L^{-1}(t)h(t, q) \\ 0 \end{pmatrix}$$

а E_m — единичная матрица порядка m .

Пусть матрица $U(t)$ дифференцируема и имеет простую структуру. Тогда существует невырожденная и дифференцируемая матрица $K(t)$, преобразующая матрицу $U(t)$ к диагональному виду

$$K^{-1}(t)U(t)K(t) = \Lambda(t) \equiv \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$$

где $n = 2m$.

Элементы диагональной матрицы $\Lambda(t)$ являются собственными значениями матрицы $U(t)$, а столбцы матрицы $K(t)$ — ее собственными векторами. Пусть K_z — собственный вектор матрицы $U(t)$, отвечающий собственному значению λ_z ($z = 1, \dots, n$), ($\lambda_z = \lambda_z(t)$).

Обозначим через $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ — собственные значения, а через $x_1(t), \dots, x_m(t)$ — соответствующие собственные векторы матрицы $L^{-1}(t)N(t)$. Обозначим $\mu(t) = x^{-1}(t)$ и представим $x(t)$ и $\mu(t)$ в виде блочных матриц

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Тогда из [2] соотношения между собственными векторами и собственными значениями матриц $L^{-1}(t)N(t)$ и $U(t)$ можно представить следующими формулами:

$$\lambda_z = i\sqrt{|\gamma_j|} \left(\cos \frac{\arg \gamma_j}{2} + i \sin \frac{\arg \gamma_j}{2} \right) \quad (2.4a)$$

$$\lambda_j = i V |\gamma_j| \left(\cos \frac{\arg \gamma_j + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\arg \gamma_j + 2\pi}{2} \right) \quad (2.46)$$

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma x_j \\ x_j \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

где

$$j = \begin{cases} \sigma & \text{при } \sigma \leq m \\ \sigma - m & \text{при } \sigma > m \end{cases}$$

$j = 1, \dots, m$; $\gamma_j \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$ и, если через Ω_σ и Ω_s обозначить соответственно области определения σ и s , то $\Omega_\sigma, \Omega_s \subset \{1, \dots, n\}$ и $\Omega_\sigma \cap \Omega_s = \emptyset$.

Формулы (2.4) позволяют утверждать, что среди каждой пары собственных значений матрицы $U(t)$, соответствующей одному собственному значению матрицы $L^{-1}(t)N(t)$, собственные значения матрицы $U(t)$ отличаются только знаком. Следовательно, если матрицу $\Lambda(t)$ представить в блочном виде

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

где Λ_1 и Λ_2 — диагональные матрицы порядка m , то можно выбрать такое размещение собственных значений матрицы $U(t)$ в диагональной матрице $\Lambda(t)$, при котором выполняется равенство

$$\Lambda_1 = -\Lambda_2 \quad (2.6)$$

Полагая, что столбцы K_σ ($\sigma = 1, \dots, n$) нормированы, примем $G(t) \equiv K^{-1}(t)$ и зададим область предельных отклонений следующим образом:

$$V(t, x) \equiv (K^{-1}(t)x, K^{-1}(t)x) \leq \rho^2 \quad (2.7)$$

3. Введем обозначение

$$x = K(t)y \quad (y = y(t)) \quad (3.1)$$

В новых переменных уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y - K^{-1}(t) \frac{dK(t)}{dt} y + K^{-1}(t)H(t, Ky) \quad (3.2)$$

Полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения от положительно определенной на интервале $[t_0, T]$ функции $V(t, x) = V(t, Ky) = \|y\|^2$ равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dV(t, x)}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \operatorname{Re} \lambda_\alpha |y_\alpha|^2 + y^* P(t) y + \\ &+ \frac{1}{2} (y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{-1}(t) y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$P(t) = -\frac{1}{2} \left(K^{-1}(t) \frac{dK(t)}{dt} + \frac{dK^*(t)}{dt} K^{*-1}(t) \right)$$

Из (2.5) следует

$$K(t) = \begin{pmatrix} x\Lambda_1 & x\Lambda_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}; \quad K^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} \mu & \mu \\ \Lambda_2^{-1} \mu & \mu \end{pmatrix}$$

Тогда из (3.1) имеем

$$y = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_1^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right) \\ \varphi &= \frac{1}{2} \left(\Lambda_2^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ψ и φ — столбцовые матрицы порядка m .

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \operatorname{Re} \lambda_s |y_s|^2 &= \frac{1}{4} \left[\left(\Lambda_1^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right)^* \operatorname{Re} \Lambda_1 \left(\Lambda_1^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right) + \right. \\ &\left. + \left(\Lambda_2^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right)^* \operatorname{Re} \Lambda_2 \left(\Lambda_2^{-1} \mu \frac{dq}{dt} + \mu q \right) \right] = \psi^* \operatorname{Re} \Lambda_1 \psi + \varphi^* \operatorname{Re} \Lambda_2 \varphi \end{aligned}$$

Учитывая (2.6), имеем

$$\sum_{s=1}^n \operatorname{Re} \lambda_s |y_s|^2 = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re} \lambda_i (|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2)$$

Будем предполагать, что здесь λ_i ($i = 1, \dots, m$) определены через (2.46).

Тогда имеем

$$\sum_{s=1}^n \operatorname{Re} \lambda_s |y_s|^2 = \sum_{i=1}^m \sqrt{|\gamma_i|} \sin \frac{\arg \gamma_i}{2} (|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) \quad (3.5)$$

Обозначив

$$D(t) = -\frac{1}{4} \left(\Lambda_1^{-1} \mu \frac{d\Lambda_1}{dt} + \frac{d\Lambda_1^* \mu^*}{dt} \mu^* \Lambda_1^{-1} \right) \quad (3.6)$$

$$F(t) = -\frac{1}{4} \left(\mu \frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu^*}{dt} \mu^* \right)$$

и учитывая (2.6), эрмитову матрицу $P(t)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$P(t) = \begin{pmatrix} F(t) + D(t), & F(t) - D(t) \\ F(t) - D(t), & F(t) + D(t) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Тогда имеем

$$y^* P(t) y = \left(\Lambda_1^{-1} \nu \frac{dq}{dt} \right)^* D(t) \Lambda_1^{-1} \nu \frac{dq}{dt} + (\nu q)^* F(t) \nu q$$

Введя переменные (3.4), получим

$$y^* P(t) y = (\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi) \quad (3.8)$$

Лемма. Пусть дана эрмитова матрица $P(t)$ порядка n с собственными значениями $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$, определяемая по (3.6) и (3.7) через эрмитовы матрицы простой структуры $D(t)$ и $F(t)$ одного и того же порядка m с собственными значениями $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$ и $\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)$ соответственно, причем $n = 2m$. Тогда матрица $P(t)$ имеет простую структуру, а собственные значения $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ связаны с $\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)$ и $\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)$ следующим соотношением:

$$\gamma_s(t) = \begin{cases} 2\beta_s(t) & \text{при } s \leq m \\ 2\alpha_{s-m}(t) & \text{при } s > m \end{cases} \quad (3.9)$$

где $s = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $\chi(t)$ и $\eta(t)$ — невырожденные унитарные матрицы порядка m , приводящие соответственно матрицы $D(t)$ и $F(t)$ к диагональному виду. Введем матрицу

$$S(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta(t), & \chi(t) \\ \eta(t), & -\chi(t) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Тогда

$$S^{-1}(t) P(t) S(t) = 2 \begin{pmatrix} \eta^*(t) F(t) \eta(t), & 0 \\ 0, & \chi^*(t) D(t) \chi(t) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Таким образом, невырожденная матрица $S(t)$ из (3.10) приводит матрицу $P(t)$ к диагональному виду. Следовательно, эрмитова матрица $P(t)$ имеет простую структуру. Как видно из (3.11), соотношение (3.9) справедливо. Лемма доказана.

Из (3.5), (3.8) и (3.9) в силу известных свойств произвольной эрмитовой формы имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^n V |\gamma_i(t)| \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} (|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2} \leq \max_i \left| V |\gamma_i(t)| \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \min_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] &\leq \frac{(\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi)}{2 [\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2]} \leq \\ &\leq \max_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $i = 1, \dots, m$.

С учетом (2.6) выражение $\frac{1}{2} (y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(t, q) &= \frac{1}{2} (y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{dq^*}{dt} \mu^* \Lambda_1^{*-1} \Lambda_1^{-1} \mu L^{-1}(t) h(t, q) + h^*(t, q) L^{*-1}(t) \mu^* \Lambda_1^{*-1} \Lambda_1^{-1} \mu \frac{dq}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставив (3.5), (3.8), (3.14) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dV(t, q)}{dt} &= \sum_{i=1}^m V \sqrt{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} (|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) + \\ &+ (\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi) + \delta(t, q) \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Сформулируем условия равномерной устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к заданной области предельных отклонений (2.7).

Теорема 1. Если для всех $t_* \in [t_0, T)$ выполняется условие

$$\int_{t_*}^t \left\{ \max_i \left| V \sqrt{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| + 2 \max_i [z_i(t), \beta_i(t)] \right\} dt < 0 \quad (4.1)$$

$$i = 1, \dots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) равномерно устойчиво на заданном интервале $[t_0, T)$ по отношению к области (2.7).

Доказательство. Из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\|y\|}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \operatorname{Re} \lambda_{\alpha} \frac{|y_{\alpha}|^2}{\|y\|} + \frac{y^* P(t) y}{\|y\|} + \frac{1}{2\|y\|} (y^* K^{-1}(t) H(t, Ky) + \\ &+ H^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y). \end{aligned}$$

Интегрируя вдоль решения уравнений возмущенного движения на интервале $[t_*, T)$, возведя обе части полученного уравнения в квадрат и учитывая (3.5), (3.8), (3.14) и (3.15), имеем

$$\begin{aligned} V(t, q(t)) &= V(t_*, q(t_*)) \exp 2 \int_{t_*}^t \left[\frac{\sum_{i=1}^m V \sqrt{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2}}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2} (|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) + \right. \\ &\left. + \frac{(\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi) + \delta(t, q)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2} \right] dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (2.2) и (3.14) имеем, что при достаточно малых $\|q\|$, то есть для решений уравнения (2.1), близких к тривиальному, в силу (3.12) и (3.13) выполняется неравенство

$$V(t, q(t)) \leq V(t_*, q(t_*)) \exp 2 \int_{t_*}^t \left\{ \max_i \left| V \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| + 2 \max_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] \right\} dt$$

Следовательно, при выполнении условия (4.1) имеет место

$$V(t, q(t)) < V(t_*, q(t_*))$$

то есть условие устойчивости на интервале $[t_*, T)$, а следовательно, и условие равномерной устойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ выполняется. Теорема доказана.

Теорема 2. Если в какой-либо момент $t_* \in [t_0, T)$ выполняется условие

$$\int_{t_*}^t \left\{ \max_i \left| V \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \right| + 2 \min_i [\alpha_i(t), \beta_i(t)] \right\} dt > 0 \quad (4.3)$$

$$i = 1, \dots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) не может быть равномерно устойчивым на интервале $[t_0, T)$ по отношению к области (2.7).

Доказательство. Пусть невозмущенное движение на интервале $[t_0, T)$ равномерно устойчиво по отношению к области (2.7) и при $t = t_*$ выполняется условие (4.3). Тогда, в силу предположения равномерной устойчивости, невозмущенное движение будет устойчиво на интервале $[t_*, T)$. Введем обозначение

$$\omega(t, q) = \frac{\sum_{i=1}^m V \overline{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} + (\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2} + \frac{(\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2}$$

Допустим, что

$$\max_i \left| V \overline{|\gamma_i(t_*)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t_*)}{2} \right| = V \overline{|\gamma_j(t_*)|} \sin \frac{\arg \gamma_j(t_*)}{2}$$

Рассмотрим частное решение уравнения (2.1) $q^j = x(\psi^j + \varphi^j)$, определенное начальными условиями $\varphi(t_*) = 0$, $\psi_j(t_*) = \rho$, $\psi_i(t_*) = 0$, $i \neq j$. Будем предполагать, что t лежит в окрестности точки t_* .

Тогда, в силу непрерывности форм (3.5) и (3.8), из (3.13) и (4.3) имеем

$$\int_{t_0}^t \omega(t, q^0(t)) dt \geq \int_{t_0}^t \left(\max_i \left| V \sqrt{|\gamma_i(t)|} \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \min_i |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \right) dt > 0$$

Следовательно, для достаточно малых ρ из (4.2) при выполнении условия (4.3) будем иметь

$$V(t, q^0(t)) > V(t_0, q^0(t_0)) \quad (4.4)$$

Наличие частных решений, вдоль которых в окрестности точки t_0 выполняется условие (4.4), позволяет утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 I 1973

Ս. Ք. ԿԱՉԱՏՐԻԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՅՑՈՒՄ ՇԱՐՃՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում բերվում է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության որոշումը [1], և ձևակերպվում է երկրորդ կարգի m դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող սիստեմի շարժման կայունության և անկայունության պայմանները, զրգուղումների փոփոխման տրված տիրույթի նկատմամբ: Նշված պայմանները ստացված են անմիջականորեն, առանց սիստեմը նորմալ տեսքի բերելու: Այդ պատճառով զգալիորեն պարզեցվում է հաշվարկման այդորիթմը, որովհետև կայունության և անկայունության պայմանները ստացվում են երկու անգամ փոքր կարգ ունեցող մատրիցաների միջոցով:

ON STABILITY OF MOTION AT A SPECIFIED TIME INTERVAL

S. T. KHACHATRIAN

S u m m a r y

The article presents a definition of motion stability at a specified (finite) time interval and a determination of conditions of stability and instability of undisturbed motion with respect to a prescribed domain of limiting deviations of parameters of linear part in a non-stationary system m of differential equations of the second kind without reducing them to a normal form.

Such an algorithm significantly simplifies the procedure of calculation, allowing to use matrices of twice as smaller order.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А. Лекции по теории устойчивости. М., 1972.
2. Абгарян К. А. Матрицы и дифференциальные уравнения. (Пособие для аспирантов). М., 1971.
3. Абгарян К. А. Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
4. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. Лебедев А. А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.