

Г. А. БАБАДЖАНЫАН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В ДЛИННОМ ГАЗОПРОВОДЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УГЛА НАКЛОНА ГАЗОПРОВОДА

§ 1. Уравнения движения и краевые условия

Рассматривается одномерное изотермическое нестационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Влияние уклона газопровода на параметры газа становится существенным в горных условиях местности, а также, когда газ подается по длинному газопроводу большого диаметра с изменяющимся уклоном по отношению к горизонту.

Нестационарность движения газа обусловлена многими факторами, существующими на практике при эксплуатации газопровода. Так, например, неравномерное потребление газа в течение суток, месяца, квартала и года, пусковые и отключающие режимы, различные аварийные случаи и т. д.

Изучением нестационарного движения газа в длинном газопроводе занимались многие исследователи. Например, в работах [1], [2], [3], [4] рассмотрены задачи, относящиеся к движению газа при различных краевых и физико-химических условиях. В этих работах при решении той или иной задачи сделаны различные предположения и упрощения, но не учтено влияние уклона профиля трассы на газодинамические величины.

В предлагаемой работе мы сделали попытку, кроме нестационарности движения, учесть влияние уклона профиля трассы на характеристики движения.

Движение газа при вышеуказанных условиях описывается следующей системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\xi \rho u^2}{2d} + \rho g \sin \alpha \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \\ p &= \rho g R T \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p — среднее по течению трубы давление газа, ρ — плотность, u — скорость, ξ — коэффициент сопротивления, g — ускорение силы тяжести, T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, d —

диаметр трубы, x — направление потока, t — время, α — угол, показывающий уклон профиля трассы или угол наклона трубопровода к горизонту.

Из системы (1.1) после некоторых несложных математических преобразований получим

$$u \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dgRT}{\xi} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2dg \sin \alpha}{\xi} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.2)$$

где

$$P(x, t) = p^2(x, t)$$

Исходя из постановки задачи, зададимся следующими граничными и начальными условиями:

$$P(0, t) = P_n = p_n^2 = \text{const} \quad \text{при } x = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\xi RT}{dgs_1^2} G^2(t) - AP(L, t) \quad \text{при } x = L \quad (1.3)$$

$$P(x, 0) = P_0(x) = p_0^2(x) \quad \text{при } t = 0$$

здесь $G(t)$ — заданная функция, характеризующая закон изменения расхода газа по времени в конце трубопровода, s_1 — площадь поперечного сечения трубы, L — длина трубопровода, $P_0(x)$ — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме работы.

Значение функции $P_0(x)$ с учетом уклона профиля трассы берется в следующем виде [6]:

$$\bar{P}_0(x) = \frac{P_n(e^{-Ax} - e^{-AL}) + P_k(1 - e^{-Ax})}{1 - e^{-AL}} \quad (1.4)$$

где $A = \frac{2 \sin \alpha}{RT}$, а P_n и P_k — значения квадрата давлений в начале и в конце трубопровода.

Уравнение (1.2) есть нелинейное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа. Точное функциональное решение его представляется невыполнимым. Поэтому его решение будем искать для случая, когда переменный коэффициент заменяется своим средним значением при стационарном режиме работы, т. е. принимаем

$$u(x, t) = u_{\text{ср}}(x) = \left[\frac{G_0(x) RT}{s_1 p_0(x)} \right]_{\text{ср}} \quad (1.5)$$

тогда уравнение (1.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.6)$$

где

$$A_1 = \frac{dg s_1 (p_0)_{\text{ср}}}{G_0^2}, \quad A_2 = \frac{2dg s_1 (p_0)_{\text{ср}} \sin \alpha}{G_0^2 RT} \quad (1.7)$$

Величины $(p_0)_{\text{ср}}$ и G_0 в выражениях A_1 и A_2 постоянны и соответственно равны:

$$(p_0)_{\text{ср}} = \frac{1}{L} \int_0^L p_0(x) dx = \text{const}(x)$$

$$G_0 = \frac{s_1 u_0(x) p_0(x)}{RT} = \text{const}(x)$$

где G_0 — расход газа при стационарном режиме работы газопровода.

§ 2. Решение уравнения (1.6)

Решение уравнения (1.6) ищем в виде

$$P(x, t) = P_0(x) + P_1(x, t) \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.6), получим

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1 \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right) + A_2 \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

Из (2.2) имеем

$$A_1 \frac{d^2 P_0}{dx^2} + A_2 \frac{dP_0}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) описывает движение газа при стационарном режиме. Решение уравнения (2.3) будет иметь вид (1.4).

Для нахождения полного решения задачи нужно интегрировать уравнение (2.4) при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} P_1(0, t) &= 0 && \text{при } x=0 \\ P_1(x, 0) &= 0 && \text{при } t=0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = - \frac{\xi RT}{dg s_1^2} (2G_0 G_1 + G_1^2) - A P_1(L, t) \quad \text{при } x=L$$

Третье граничное условие из (2.5) получается из соответствующего условия (1.3), если в нем подставить

$$\dot{P}(x, t) = P_0(x) + P_1(x, t)$$

и

$$G(t) = G_0 + G_1(t)$$

Уравнение (2.4) решаем методом операционного исчисления [2]. Применяя к уравнению (2.4) и к краевым условиям (2.5) преобразование Лапласа, получим:

$$A_1 \frac{d^2 F(s, x)}{dx^2} + A_2 \frac{dF(s, x)}{dx} - sF(s, x) = 0 \quad (2.6)$$

$$F(0, s) = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.7)$$

$$F'(L, s) = -2cG_0\varphi_1(s) - c\varphi_2(s) - AF(L, s) \quad \text{при } x = L$$

где

$$F(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_1(x, t) dt$$

$$\varphi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G_1(t) dt \quad (2.8)$$

$$\varphi_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G_2(t) dt$$

$$c = \frac{\varepsilon RT}{dgs_1^2}$$

Решением уравнения (2.6) будет

$$F(x, s) = e^{-\frac{A}{2}x} (c_1 e^{\beta x} + c_2 e^{-\beta x}) \quad (2.9)$$

где $\beta = \sqrt{\frac{A_2^2 + 4A_1s}{2A_1}}$, а c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

Определяя c_1 и c_2 из граничных условий (2.7) и подставляя в (2.9), получим

$$F(x, s) = \frac{-ce^{\frac{A}{2}(L-x)} [2G_0\varphi_1(s) + \varphi_2(s)] \operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{ch} \beta L + \frac{A}{2} \operatorname{sh} \beta L} \quad (2.10)$$

Для нахождения оригинала функции $F(x, s)$ представим (2.10) в следующем виде:

$$F(x, s) = -ce^{\frac{A}{2}(L-x)} [F_1(x, s) + F_2(x, s)] \quad (2.11)$$

где

$$F_1(x, s) = \frac{2G_0\varphi_1(s) \operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{ch} \beta L + \frac{A}{2} \operatorname{sh} \beta L}, \quad F_2(x, s) = \frac{\varphi_2(s) \operatorname{sh} \beta x}{\beta \operatorname{ch} \beta L + \frac{A}{2} \operatorname{sh} \beta L}$$

Применяя к уравнению (2.11) обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (2.4) в следующем виде:

$$P_1(x, t) = -ce^{\frac{\lambda}{2}(L-x)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [F_1(s, x) + F_2(s, x)] e^{st} ds \quad (2.12)$$

Если задан закон изменения расхода газа во времени в конце трубопровода, т. е. вид функции $G_1(t)$, то с помощью формулы (2.8) можем вычислить значения функций $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$. Затем подсчитав по известным правилам значение интеграла (2.12), получим решение уравнения (2.4). Имея в виду выражение (2.1) и обозначения $P(x, t) = p^2(x, t)$, получим решение поставленной задачи.

Имея значение функции $p(x, t)$ из системы уравнений (1.1), определим значения всех искомым функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $G(x, t)$.

Обычно на конце длинного газопровода изменение расхода газа во времени связано с требованием потребителя. Расход газа в конце газопровода изменяется в течение суток почти периодически, имея как наибольшее, так и наименьшее значения. Вследствие этого иногда длинный газопровод может служить в какой-то мере, как аккумулятор газа, где в течение часов провала накапливается газ с таким расчетом, чтобы в часы пик обеспечить требование потребителя.

Предположим, что вид функции $G_1(t)$, т. е. закон изменения расхода в конце трубопровода имеет синусоидальный характер, т. е.

$$G_1(t) = -\frac{G_0 \sin \omega t}{2} \quad (2.13)$$

где $\omega = \frac{\pi}{\tau}$, τ — полный период колебания расхода газа в течение суток (в нашем случае $\tau = 24$ час).

Подставляя значение функции $G_1(t)$ в виде (2.13) в формулы (2.8) и производя интегрирование, получим для $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ следующие значения:

$$\varphi_1(s) = -\frac{G_0 \omega}{2(s^2 + \omega^2)}; \quad \varphi_2(s) = \frac{G_0 \omega^2}{2s(s^2 + 4\omega^2)} \quad (2.14)$$

Подставляя значения $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ в виде (2.14) в (2.12), на основании теоремы обращения находим оригинал функции $F(x, s)$, то есть значение $P_1(x, t)$ в следующем виде:

$$P_1(x, t) = ce^{\frac{\lambda}{2}(L-x)} G_0^2 \left\{ \frac{M_1 D_2 - M_2 D_1}{M_1^2 + M_2^2} + \frac{K_1 N_1 + K_2 N_2}{8(N_1^2 + N_2^2)} - \right. \\ \left. - \frac{A_1}{4A_2} e^{-\frac{\lambda}{2}L} \operatorname{sh} \frac{\lambda x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_1 \lambda_n \sin(\lambda_n x/L) e^{\lambda_n t}}{L(s_n^2 + \omega^2) \left(\cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n + \frac{AL}{2} \cos \lambda_n \right)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_1 \lambda_n \sin(\lambda_n x/L) e^{s_n t}}{L(s_n^3 + 4s_n \omega^2) \left(\cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n + \frac{AL}{2} \cos \lambda_n \right)} \right\} \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= B_1 \operatorname{ch} B_1 L \cos B_2 L - B_2 \operatorname{sh} B_1 L \sin B_2 L + \frac{A}{2} \operatorname{sh} B_1 L \cos B_2 L \\ M_2 &= B_2 \operatorname{ch} B_1 L \cos B_2 L + B_1 \operatorname{sh} B_1 L \sin B_2 L + \frac{A}{2} \operatorname{ch} B_1 L \sin B_2 L \\ D_1 &= \operatorname{sh} B_1 x \cos B_2 x \cos \omega t - \operatorname{ch} B_1 x \sin B_2 x \sin \omega t \\ D_2 &= \operatorname{ch} B_1 x \sin B_2 x \cos \omega t + \operatorname{sh} B_1 x \cos B_2 x \sin \omega t \\ N_1 &= a_1 \operatorname{ch} a_1 L \cos a_2 L - a_2 \operatorname{sh} a_1 L \sin a_2 L + \frac{A}{2} \operatorname{sh} a_1 L \cos a_2 L \\ N_2 &= a_2 \operatorname{ch} a_1 L \cos a_2 L + a_1 \operatorname{sh} a_1 L \sin a_2 L + \frac{A}{2} \operatorname{ch} a_1 L \sin a_2 L \\ K_1 &= \operatorname{sh} a_1 x \cos a_2 x \cos 2\omega t - \operatorname{ch} a_1 x \sin a_2 x \sin 2\omega t \\ K_2 &= \operatorname{ch} a_1 x \sin a_2 x \cos 2\omega t + \operatorname{sh} a_1 x \cos a_2 x \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \pm \frac{1}{2A_1} \sqrt{\frac{VA_2^4 + 16A_1^2 \omega^2 + A_2^2}{2}} \\ B_2 &= \pm \frac{1}{2A_1} \sqrt{\frac{VA_2^4 + 16A_1^2 \omega^2 - A_2^2}{2}} \\ a_1 &= \pm \frac{1}{2A_1} \sqrt{\frac{VA_2^4 + 64A_1^2 \omega^2 + A_2^2}{2}} \\ a_2 &= \pm \frac{1}{2A_1} \sqrt{\frac{VA_2^4 + 64A_1^2 \omega^2 - A_2^2}{2}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\lambda_n = i\beta_n L$ являются корнями следующего трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \lambda_n = -\frac{2}{A} \frac{\lambda_n}{L} \quad (2.18)$$

а

$$s_n = -\frac{4A_1^2 \lambda_n^2 + L^2 A_2^2}{4A_1 L} \quad (2.19)$$

Если изменение расхода в конце трубопровода задано другим законом, зависящим от времени, то разлагая его по синусам в интервале $[0, T]$ в ряд Фурье, можем определить значения функций $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$, которые в этом случае будут представляться в виде суммы с коэффициентами Фурье.

§ 3. Численный пример

Рассмотрим численный пример при следующих данных:

$$\begin{aligned} p_n &= 12 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 & \xi &= 0.012 \\ p_x &= 8 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 & R &= 50 \text{ м/2рад} \\ L &= 5 \cdot 10^3 \text{ м} & T &= 290^\circ \\ d &= 0.6 \text{ м} & \tau &= 24 \text{ часа} \\ & & \alpha &= 0^\circ, \pm 1^\circ, \pm 5^\circ, \pm 10^\circ. \end{aligned}$$

Расход газа при стационарном режиме вычисляется по формуле [3]

$$G_0 = \frac{s_1}{RT} \sqrt{\frac{2dg \sin \alpha (p_n^2 e^{-AL} - p_x^2)}{\xi (1 - e^{-AL})}} \quad (3.1)$$

Скорость газа вычисляется по формуле

$$u(x, t) = \left(-\frac{2dgRT}{\xi p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2dg \sin \alpha}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Расход газа при нестационарном режиме вычисляем по формуле

$$\bar{G}(x, t) = \frac{s_1}{RT} p(x, t) u(x, t) \quad (3.3)$$

Плотность определяется из уравнения состояния.

Изменения искомых функций $p(x, t)$, $u(x, t)$ и $G(x, t)$ вдоль газопровода и во времени, вычисленные по формулам (2.15), (3.2) и (3.3) представлены на фиг. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

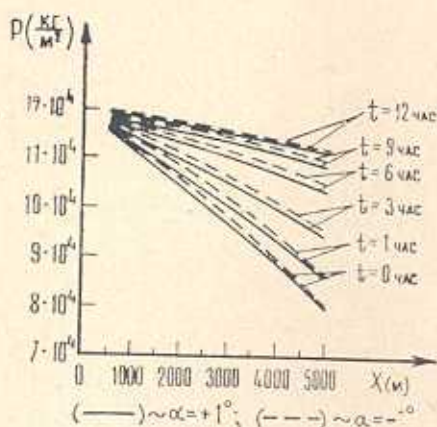
Из полученных результатов и вычисленного примера можно сделать следующие выводы:

1. В интервале времени $0 < t \leq 12$ и $\alpha = \text{const}$ давление в трубе увеличивается, а в интервале $12 < t \leq 24$ начинает уменьшаться, достигая своего первоначального значения.

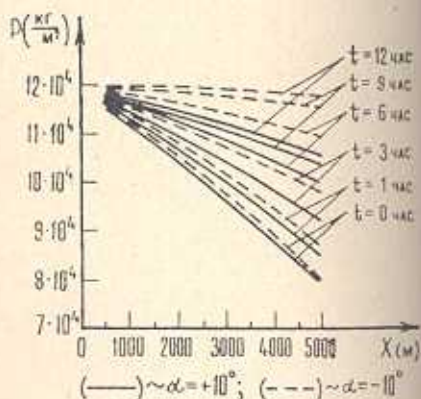
2. На изменение давления существенно влияет уклон профиля трассы. Из фиг. 1, 2 видно, что в данный момент времени и для заданного сечения трубы при положительном уклоне ($\alpha > 0$) давление меньше, чем при отрицательном уклоне ($\alpha < 0$).

3. Скорость газа в интервале $0 < t \leq 12$ уменьшается, а в интервале $12 < t \leq 24$ увеличивается. Из фиг. 3 и 4 видно, что для фиксированного момента времени и заданного сечения трубы скорость газа при отрицательном уклоне больше, чем при положительном.

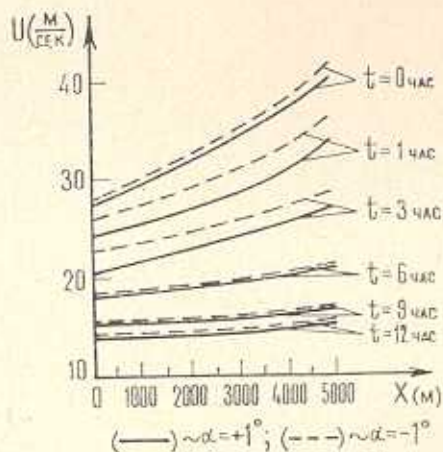
4. Из фиг. 5, 6 видно, что при $\alpha = \text{const}$ и в интервале $0 < t \leq 12$ расход уменьшается, а потом начинает увеличиваться, принимая свое первоначальное значение. Из этих фигур видно, что влияние уклона на значение расхода газа существенно. При положительном значении



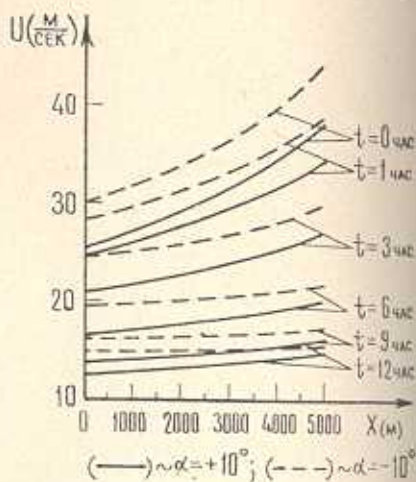
Фиг. 1.



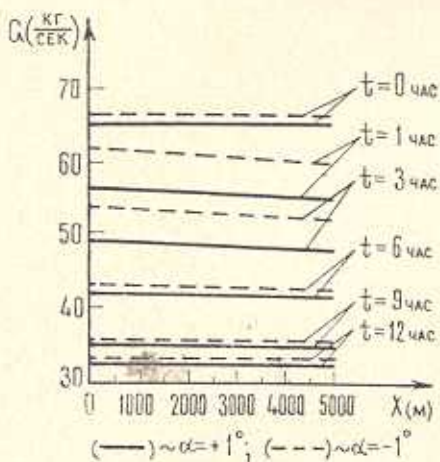
Фиг. 2.



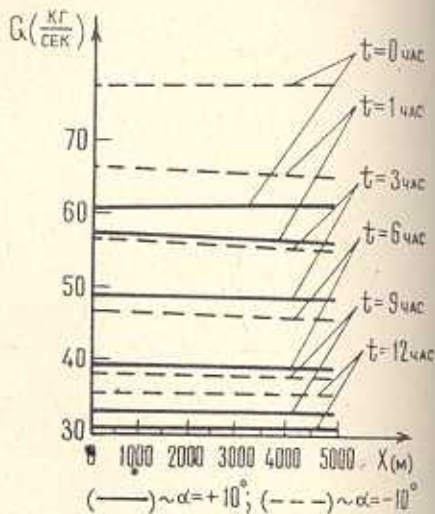
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

уклона ($\alpha > 0$) расход уменьшается быстро и где-то в окрестности $\alpha = +15^\circ$ расход обращается в нуль. Наоборот, расход газа увеличивается, когда уклон уменьшается ($\alpha < 0$). Так, например, при $\alpha = -10^\circ$ расход газа на 35—40% больше по сравнению с расходом при $\alpha = 0$.

Эти обстоятельства накладывают очень важное ограничение на точность расчетов при проектировании магистральных газопроводов больших диаметров.

Влияние угла наклона газопровода на газодинамические характеристики подробно показано в работе [6].

Ереванский государственный
университет

Поступила 20 VIII 1973

Գ. Հ. ԲԱԲԱԶՅԱՆԻ

ԵՐԵՎԱՆԻ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԻՐԱԿԱՆ ԳԱԶԻ ՈՉ ՍՏԱՅԻՌՆԱՐ ՇԱՐՃՈՒՄԸ
ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԹԵՔՈՒԹՅԱՆ ԱՆԿՅԱՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոգիվածում քննարկվում է իրական (մածուցիկ) գազի ոչ ստացիոնար, իզոթերմ շարժումը երկար գազամուղում, երբ նրա թեքությունը հորիզոնի նկատմամբ կազմում է որևէ անկյուն ($\pm \alpha$): Գազամուղում գազի շարժման ոչ ստացիոնարությունը պայմանավորված է նրա վերջին կտրվածքում գազի էլքի փոփոխությամբ ըստ ժամանակի: Գազի էլքի փոփոխությունը իր հերթին պայմանավորված է սպառողի օրվա ընթացքում պահանջի փոփոխությամբ:

Ստացված էն գազի ճնշման, արագության, էլքի, խտության փոփոխման քրենքները ըստ ժամանակի և գազամուղի երկարության:

Շարժման պարամետրերի համար ստացված թվային արժեքները ցույց են տալիս, որ գազամուղի թեքության անկյունը նշանակալից ազդեցություն է գործում գազոդինամիկական մեծությունների վրա:

NON-STATIONARY MOTION OF REAL GAS IN A LONG GASPIPE CONSIDERING THE EFFECT OF THE LINE PROFILE SLOPE

G. H. BABADJANIAN

S u m m a r y

A linear isothermic non-stationary motion of real gas in a long gaspipe, considering the effect of the line profile slope, is studied. A non-stationary state of gas motion in the gaspipe develops due to change in gas discharge at the end of the gaspipe. The change depends upon an uneven consumption of gas during the day. The laws of change in pressure, density, velocity and discharge along the gasline with time are found as well.

The solution and numerical example show that the change in the line slope and non-stationary motion of gas affect essentially the gas-dynamic values.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиulin З. Т., Черенкин В. И. Некоторые вопросы неустановившегося движения в трубопроводах. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 12, 1960.
2. Бабаджян Г. А. Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 1, 1961.
3. Бабаджян Г. А. Об одной задаче нестационарного движения газа в длинном газопроводе. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XIV, № 3, 1961.
4. Кудрашев Л. И., Церерин В. А. К качественной оценке влияния нестационарности на газодинамическое сопротивление магистральных газопроводов. Изв. высших учебных заведений «Нефть и Газ», № 6, 1963.
5. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
6. Бабаджян Г. А. Стационарное движение реального газа в длинном газопроводе с учетом влияния уклона профиля трассы. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXVI, № 5, 1973.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Гостехтеориздат, М., 1951.