

А. Г. БАГДОЕВ, А. Н. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ РЯДА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
 ЗАДАЧ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ  
 СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассматривается задача определения перемещений в упругой и магнитоупругой среде при наличии точечных импульсов в неограниченном пространстве. Для изотропной однородной упругой среды уравнения движения возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_1 + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_2 + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_3 + \frac{Z_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Вводим преобразование Лапласа  $\bar{u}_{1,2,3}$  для компонентов перемещений  $u_{1,2,3}$ , а затем вводим преобразования Фурье в виде

$$\bar{u}_{1,2,3} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)} \bar{\bar{u}}_{1,2,3} d\beta_1 d\gamma_1 \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\begin{aligned} [s^2 + a^2 \alpha_1^2 + b^2(\beta_1^2 + \gamma_1^2)] \bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 \bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{X_0}{8\pi^3 \rho} \\ (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 \bar{\bar{u}}_1 + [s^2 + a^2 \beta_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)] \bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{Y_0}{8\pi^3 \rho} \\ (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_2 + [s^2 + a^2 \gamma_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{Z_0}{8\pi^3 \rho} \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) можно получить

$$\begin{aligned} 8\pi^3 \rho \bar{\bar{u}}_1 &= X_0 [s^2 + b^2 \alpha_1^2 + a^2(\gamma_1^2 + \beta_1^2)] - Y_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 - Z_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \\ 8\pi^3 \rho \bar{\bar{u}}_2 &= -X_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 + Y_0 [s^2 + b^2 \beta_1^2 + a^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)] - Z_0 (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$8\pi^2\rho Du_z = -X_0(a^2 - b^2)\alpha_1\gamma_1 - Y_0(a^2 - b^2)\beta_1\gamma_1 + Z_0[s^2 + b^2\gamma_1^2 + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \quad (4)$$

где

$$D = [s^2 + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)][s^2 + b^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)]; \quad s = -i\omega$$

Подставляя (4) в (2), вычисляя вычет в интегралах по  $\gamma_1$  относительно

$$\text{полюсов } \gamma_1^{(1)} = \omega \sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2 - \beta^2}; \quad \gamma_1^{(2)} = \omega \sqrt{\frac{1}{b^2} - \alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha = \frac{z_1}{\omega},$$

$\beta = \frac{\beta_1}{\omega}$  и переходя к цилиндрическим координатам

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta, \quad a = \xi \cos \varphi, \quad \beta = \xi \sin \varphi, \quad z = z$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (X_0\alpha^2 + Y_0\alpha\beta + Z_0\alpha\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}} d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{b^2} - \alpha^2 \right) X_0 - Y_0\alpha\beta - Z_0\beta\gamma_1^{(2)} \right] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \\ \bar{u}_2 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (X_0\alpha\beta + Y_0\beta^2 + Z_0\beta\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}} d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -X_0\alpha\beta + Y_0 \left( \frac{1}{b^2} - \beta^2 \right) - Z_0\beta\gamma_1^{(2)} \right] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (X_0\alpha + Y_0\beta + Z_0\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \xi d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} [-X_0z\gamma_1^{(2)} - Y_0\beta\gamma_1^{(2)} + Z_0(a^2 + \beta^2)] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \end{aligned}$$

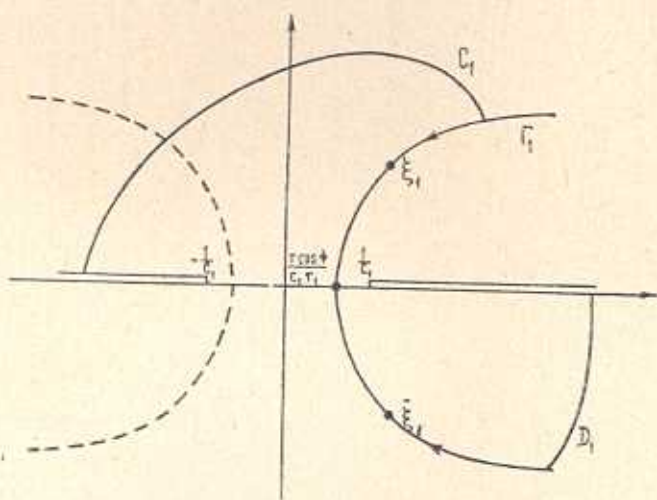
где  $\psi = \varphi - \theta$ .

Формулы (5) имеют место для  $z > 0$ , для  $z < 0$   $\gamma_1^{(1,2)}$  в экспоненте поменяют знаки, а окончательное решение (12), (13), (14) не изменится.

В интегралах по  $\psi$  в (5), взятых в пределах  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , сделаем замену  $\pi - \psi$  на  $\psi$ , тогда в указанных интегралах, взятых уже в пределах  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos\psi$  заменится на  $-\cos\psi$ . Поскольку при нечетных степенях  $\cos\psi$  стоит множителем нечетные степени  $\xi$ , можно полученные интегралы в (5) по  $\psi$  в пределах  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  объединить, причем



$\cos \psi$  всюду брать со знаком плюс и интегралы по  $\xi$  следует брать в пределах  $(-\infty, \infty)$ , а также под знаком интеграла ставить  $\operatorname{sgn} \xi$ . Сделаем разрез плоскости  $\xi$  по действительной оси от точек  $\pm c_n^{-1}$  до  $\pm \infty$ , причем  $c_1 = a$  и  $c_2 = b$  для первых и вторых интегралов соответственно в правых частях (5). Выберем положительно мнимые значения функций  $\gamma_{1,2}(\xi) = \frac{\gamma_{1,2}^{(1,2)}}{\omega}$ ,  $\xi = \frac{z}{\omega}$  на верхних берегах левых и нижних берегах правых разрезов, причем при  $\omega > 0$  контур интегрирования по  $\xi$  проходит при  $\xi < 0$  в верхней полуплоскости, при  $\xi > 0$  — в нижней полуплоскости. Проведем дуги окружностей  $C_{1,2}$ ,  $D_{1,2}$  большого радиуса фиг. 1, на которых  $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) < 0$ , где  $T_{1,2}(\xi) = t - \xi r \cos \psi - z \gamma_{1,2}(\xi)$ .



Фиг. 1.

Проведем контуры  $\Gamma_{1,2}$ , на которых  $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) = 0$ , и которые проходят через точки Смирнова-Соболева  $\xi_{1,2}$ , определяемые уравнениями

$$T_1(\xi_1) = t - \xi_1 r \cos \psi - z \gamma_1(\xi_1) = 0, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \xi_1^2} \quad (6)$$

$$T_2(\xi_2) = t - \xi_2 r \cos \psi - z \gamma_2(\xi_2) = 0, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \xi_2^2}$$

Из (6) получится для  $z > 0$

$$r_1^2 \xi_1 = tr \cos \psi + iz \sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}$$

$$r_1^2 \xi_2 = tr \cos \psi + iz \sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{b^2}} \quad (7)$$

$$r_1^2 = z^2 + r^2 \cos^2 \psi$$

причем при  $z < 0$  перед радикалами берется обратный знак. Комплексно-сопряженные значения  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$  также удовлетворяют (6), то есть находятся на  $\Gamma_{1,2}$  фиг. 1. Интеграл по  $\xi$  от 0 до  $\frac{r \cos \psi}{c_{1,2} r_1}$  равен нулю, поскольку при обратном преобразовании Лапласа получится интеграл от дельта-функций аргумента  $t - \xi r \cos \psi - \gamma_{1,2} z$ , корни которого  $\xi_{1,2}$  не лежат на вышеупомянутом участке. Заменяя интегралы по  $\xi$  на интегралы по контурам  $\Gamma_{1,2}$ , получим из (5) для  $\bar{u}_1$ , например, при  $\omega > 0$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1 = & -\frac{\omega i}{4\pi^2 \rho} \int_0^{\pi/2} \int_{\Gamma_1} [X_0 (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi^2 + Y_0 \cos 2\psi \sin \theta \cos \theta \xi^2 + \\
 & + Z_0 \xi \cos \psi \gamma_{11}(\xi)] e^{i\omega(\xi r \cos \psi + z \gamma_1(\xi))} \frac{\xi}{\gamma_{11}(\xi)} d\xi d\psi - \frac{\omega i}{4\pi^2 \rho} \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[ \frac{1}{b^2} - \xi^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \right] X_0 - Y_0 \cos 2\psi \sin \theta \cos \theta \xi^2 - Z_0 \xi \cos \psi \gamma_{11}(\xi) \right\} \times \\
 & \times e^{i\omega(\xi r \cos \psi + z \gamma_1(\xi))} \frac{\xi}{\gamma_{12}(\xi)} d\xi d\psi \quad (8)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что интегралы от нечетных степеней  $\sin \psi, \cos \psi$  в (5) равны нулю. При получении (8) интегралы по  $\xi$  в пределах  $(-\infty, 0)$  заменялись на проходимые сверху вниз верхние части контуров  $\Gamma_{1,2}$  с учетом знака  $\text{sgn} \xi$ , а участок  $(0, \infty)$  заменяется на взятые с обратным знаком интегралы по нижним частям контуров  $\Gamma_{1,2}$ , проходимых уже снизу вверх. При  $\omega < 0$  берем вместо  $C_{1,2}, D_{1,2}$  (фиг. 1) дуги окружности, дополняющие их соответственно до верхних и нижних полуокружностей. Учитывая множитель  $\text{sgn} \xi$ , можно показать, что при  $\omega < 0$  снова имеет место (8).

Обратное преобразование Лапласа по  $t$  дает, например, для коэффициента при  $X_0$ , соответствующего интегралу по  $\Gamma_1$ , значение

$$\begin{aligned}
 u_1|_{X_0, \Gamma_1} = & \frac{X_0}{4\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \int_{\Gamma_1} (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \\
 & + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi^2 (t - \xi r \cos \psi - z \gamma_{11}(\xi)) \frac{d\xi d\psi}{\gamma_{11}(\xi)} \quad (9)
 \end{aligned}$$

и после вычисления интеграла от дельта-функции действительного аргумента для  $z > 0$  получим

$$u_1|_{X_0, \Gamma_1} = -\frac{X_0}{2\pi^2 \rho} \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi_1^2}{r \cos \psi \gamma_{11}(\xi_1) - z \xi_1} d\psi \quad (10)$$



где объединены интегралы по верхней и нижней частям  $\Gamma_1$ , дающие сопряженные комплексные значения, причем  $\xi_1$  дается (7). Учитывая, что действительная и мнимая части подынтегральных функций — четные и соответственно нечетные функции  $\cos \psi$ , получим для (10) значение

$$\frac{X_0}{2\pi^2\rho} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \left( t - \frac{R}{a} \right) \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \times \\ \times \left[ 3t^2 r^2 z \cos^2 \psi - z^3 \left( t^2 - \frac{r_1^2}{a^2} \right) \right] \frac{d\psi}{r_1^3} \quad (11)$$

где  $\sigma(x)$  есть единичная функция,  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ .

Заменяя  $\operatorname{tg} \psi = \lambda$ , вычисляя интегралы по  $\lambda$ , получим для (11) значение

$$u_1|_{x_0, r_1} = \frac{X_0 t (3x^2 - R^2)}{4\pi\rho R^3} \sigma \left( t - \frac{R}{a} \right) + \frac{X_0 x^2 \delta \left( t - \frac{R}{a} \right)}{4\pi\rho a^2 R^3}$$

Подобным же образом вычисляются остальные интегралы в (8), а также интегралы для  $\bar{u}_2, \bar{u}_3$ . Окончательные формулы для компонентов перемещений имеют вид

$$u_1 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [(3x^2 - R^2) X_0 + 3xyY_0 + 3xzZ_0] \sigma \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 x^2 + Y_0 xy + Z_0 xz) \delta \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{X_0 \delta \left( t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [3X_0 xy + (3y^2 - R^2) Y_0 + 3Z_0 yz] \sigma \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 xy + Y_0 y^2 + Z_0 yz) \delta \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{Y_0 \delta \left( t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (13)$$

$$u_3 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [3X_0 xz + 3Y_0 yz + Z_0 (3z^2 - R^2)] \sigma \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 xz + Y_0 yz + Z_0 z^2) \delta \left( t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{Z_0 \delta \left( t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (14)$$

где  $c_1 = a$ ,  $c_2 = b$ .

Полученное решение задачи для точечных импульсов совпадает с известным решением [1], однако приведенный здесь метод является до-

вильно общим и может быть применен к более сложным граничным задачам для изотропных сред.

Рассмотрим теперь задачу определения перемещений магнитоупругой среды при наличии точечных импульсов.

Пусть начальное магнитное поле величины  $B_x$  параллельно оси  $x$ , тогда задача имеет осевую симметрию относительно оси  $x$ , причем уравнения магнитоупругости [2] можно взять в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + b^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \\ &+ a_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + a_1^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \frac{b^2}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) - \\ &- b^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{X_x}{2\pi r \rho} \delta(r) \delta(x) \delta(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Решение для преобразования по Лапласу по  $t$  от  $u_r$  и  $u_x$  ищется в виде преобразования Фурье-Ханкеля

$$\bar{u}_r = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_1(\lambda r) \bar{u}_r d\lambda; \quad \bar{u}_x = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_0(\lambda r) \bar{u}_x d\lambda \quad (16)$$

где  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  — функции Бесселя [3].

Подставляя (16) в (15) и применяя формулы обращения преобразований Фурье-Ханкеля, можно получить

$$4\pi^2 \rho D \bar{u}_x = -X_x \lambda [(a^2 + a_1^2) \lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2] \quad (17)$$

$$4\pi^2 \rho D \bar{u}_r = X_x (a^2 - b^2) i k \lambda^2$$

где

$$D = (a^2 - b^2)^2 k^2 \lambda^2 - [(a^2 + a_1^2) \lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2] (a^2 k^2 + b^2 \lambda^2 + s^2) \quad (18)$$

Подставляя (17) в (16), используя интегральные представления функций Бесселя [3], вычисляя интегралы по  $\beta$  с помощью теории вычетов, вводя переменные  $s = -i\omega$ ,  $\lambda = \alpha\omega$ ,  $k = \beta\omega$ , получим

$$\bar{u}_x = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \alpha [(a^2 + a_1^2) \alpha^2 + (b^2 + a_1^2) \beta_n^2 - 1] e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos \varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\beta_n \sqrt{\Delta}} \quad (19)$$

$$\bar{u}_r = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (a^2 - b^2) \alpha^2 \cos \varphi e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos \varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$



где

$$\Delta = p^2 - 4a^2(a_1^2 + b^2)q; \quad p = (a^2a_1^2 + a_1^2b^2 + 2a^2b^2)x^2 - a^2 - b^2 - a_1^2$$

$$q = (b^2x^2 - 1)(a^2x^2 + a_1^2x^2 - 1); \quad \beta_{1,2}^2 = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2a^2(a_1^2 + b^2)}; \quad a_1^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$$

При  $x > 0$  выберем знак  $+$  перед корнем квадратным в формуле для  $\beta_{1,2}$ . Заменяя как и выше контуры интегрирования по  $\alpha$  контурами  $\Gamma_{1,2}$ , проходящими через точки  $\alpha_{1,2}$ , даваемые уравнениями Смирнова-Соболева,

$$T_{1,2} = t - \beta_{1,2}(\alpha_{1,2})x - \alpha_{1,2}r \cos \varphi = 0 \quad (20)$$

в направлениях  $\text{Im } T_{1,2} = 0$ , после обратного преобразования Лапласа по  $t$  и вычисления интегралов от  $\delta(T_{1,2})$ , получим

$$u_x = \frac{X_x}{2\pi^2\rho} \sum_1^2 (-1)^k \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha_k [(a^2 + a_1^2)\alpha_k^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_k^2(\alpha_k) - 1]}{\beta_k \sqrt{\Delta(\alpha_k)} [r \cos \varphi + \beta_k(\alpha_k)x]} d\varphi \quad (21)$$

$$u_r = \frac{X_x}{2\pi^2\rho} \sum_1^2 (-1)^k \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha_k^2 \cos \varphi}{\sqrt{\Delta(\alpha_k)} [r \cos \varphi + \beta_k(\alpha_k)x]} d\varphi$$

где  $\alpha_{1,2}$  определяются из (20). Заметим, что в отличие от случая упругой среды подынтегральные функции в (19) имеют точки ветвления  $\Delta(\alpha) = 0$ . Однако эти точки находятся на действительной оси, поэтому они не дадут дополнительных слагаемых в решении при замене указанных перед формулой (9) контуров по  $\alpha$  (или  $\xi$ ), проходящих в верхней и нижней полуплоскостях  $\alpha$ , соответственно на контуры  $\Gamma_{1,2}$ , поскольку указанные точки ветвления находятся вне замкнутых контуров фиг. 1. Заметим, что, так как при изменении знака  $x$  значения  $\alpha$  не изменятся по величине, а  $\beta$  поменяет знак, из (21) видно, что  $u_x$  есть нечетная,  $u_r$  — четная функция  $x$ . При  $x < 0$  в (19) изменяются знаки перед  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_r$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  изменяются на  $\bar{\alpha}_n$ ,  $\bar{\beta}_n$ , кроме того заменяется  $\sqrt{\Delta}$  на  $-\sqrt{\Delta}$ , причем (21) снова имеет место.

Рассмотрим задачу о движении магнитоупругой среды, занимающей верхнее полупространство  $x > 0$ , граничащей с диэлектриком (воздухом), занимающим полупространство  $x < 0$ . Точечный импульс действует в точке  $(x_0, 0)$ ,  $x_0 > 0$ . Тогда решение для падающей на границу  $x = 0$  волны дается (21), где заменено  $x$  на  $x - x_0$ . Решение при  $x > 0$  ищем в виде

$$u_x = u_x^{(0)} + u_x, \quad u_r = u_r^{(0)} + u_r \quad (22)$$

где  $u_x^{(0)}$ ,  $u_r^{(0)}$  дает падающую волну,  $u_x$ ,  $u_r$  удовлетворяют (15) при  $X_x = 0$ . Для преобразования Лапласа по  $t$  запишем

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} e^{i\omega \beta_n x} J_0(i r) \bar{u}_x^{(n)} dx \quad (23)$$

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} e^{i\omega \beta_n x} J_1(i r) \bar{u}_r^{(n)} dx$$

где  $x = \frac{\lambda}{\omega}$ ,  $\beta_n(x)$  дается (19). В нижнем полупространстве для компонент напряжений  $b_x$ ,  $b_r$  возмущенного магнитного поля имеем

$$b_x^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad b_r^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = 0$$

и можно для преобразований Лапласа по  $t$  записать

$$\bar{\Pi} = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} \bar{\Pi} J_0(i r) dr$$

$$\bar{b}_x^{(3)} = \int_0^{\infty} \lambda e^{\lambda x} J_0(i r) \bar{\Pi} dr, \quad \bar{b}_r^{(3)} = - \int_0^{\infty} i e^{\lambda x} J_1(i r) \bar{\Pi} dr$$

Граничные условия при  $x=0$  имеют вид [4]

$$\tau_{rx} + \Pi_{rx} = \Pi'_{rx}, \quad \tau_{xx} + \Pi_{xx} = \Pi'_{xx}, \quad b_x = b_x^{(3)}$$

где штрихи относятся к нижнему полупространству,  $\Pi$  — тензор Максвелла.

Используя формулы [4]

$$\Pi_{rx} = \frac{b_r}{4\pi} (B_x + b_x) \approx \frac{B_x b_r}{4\pi}, \quad \Pi_{xx} = \frac{1}{8\pi} (B_x + b_x)^2 - \frac{b_r^2}{8\pi} \approx \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_x b_x}{4\pi}$$

где  $(b_x, b_r)$  — возмущенное магнитное поле, получим граничное условие в виде ( $x=0$ )

$$b^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{B_x}{4\pi\varphi} b_r = \frac{B_x}{4\pi\varphi} b_r^{(3)} \quad (24)$$

$$a^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 0, \quad b_x = b_x^{(3)}$$

В силу соотношений  $b_x = -B_x \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right)$ ,  $b_r = B_x \frac{\partial u_r}{\partial x}$  получится ( $x=0$ )

$$(a_1^2 + b^2) \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = \frac{B_x}{4\pi\varphi} \bar{b}_r^{(3)} \quad (25)$$

$$a^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2) \left( \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = 0, \quad B_x \left( \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = -\bar{b}_x^{(3)}$$



Подставляя (23) и  $\bar{\Pi}$  в (25), где  $\bar{u}_x^{(0)}$ ,  $\bar{u}_r^{(0)}$  даются (19) с заменой  $x$  на  $x - x_0$ , учитывая, что при  $x = 0$ ,  $x - x_0 < 0$ , получим уравнения для  $\bar{u}_x^{(1,2)}$ ,  $\bar{u}_r^{(1,2)}$ ,  $\bar{\Pi}$  в виде

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^{n-1} e^{i\omega\beta_n x_0} \alpha^2 [(a^2 - 2b^2)(a_1^2 + b^2)\beta_n^2 - b^2(a^2 + a_1^2)x^2 + b^2] \frac{1}{\beta_n V \Delta} +$$

$$+ \sum_1^2 (b^2 i x \bar{u}_x^{(n)} + (a_1^2 + b^2)\beta_n \bar{u}_r^{(n)}) = \frac{B_x}{4\pi\rho} i x \bar{\Pi} \quad (26)$$

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^{(n-1)} e^{i\omega\beta_n x_0} \alpha [(a^2 a_1^2 + 3a^2 b^2 - 2b^4)x^2 + a^2(b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - a^2] \frac{1}{V \Delta} +$$

$$+ \sum_1^2 [(a^2 - 2b^2) \bar{u}_r^{(n)} + a^2 \beta_n \bar{u}_x^{(n)}] = 0$$

$$\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^n e^{i\omega\beta_n x_0} \frac{(a^2 - b^2) B_x x^2}{V \Delta} - \sum_1^2 B_x \bar{u}_r^{(n)} = \bar{\Pi}$$

Значения  $\bar{u}_r^{(n)}$  выражаются через  $\bar{u}_x^{(n)}$  из (17) в виде

$$\bar{u}_r^{(n)} = - \frac{(a^2 - b^2) \beta_n \alpha i \bar{u}_x^{(n)}}{(a^2 + a_1^2)x^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - 1} \quad (27)$$

Как видно из (26) и (27), значения  $\bar{u}_r^{(n)}$ ,  $i \bar{u}_x^{(n)}$  при вещественных  $\alpha$ ,  $\beta_n$ , в отличие от случая решения для бесконечного пространства (19), являются комплексными, что приводит в данной задаче к наличию отличных от нуля значений  $u_r$ ,  $u_x$  вне фронтов магнитоупругих волн. Из (26)–(27) получим

$$\bar{u}_x^{(n)} = (-1)^n \frac{X_x}{4\pi\rho} i \sum_1^2 (-1)^k d_{n,k}(x), \quad (n = 1, 2) \quad (28)$$

где

$$d_{n,k}(x) = \frac{[A_k - a_1^2(a^2 - b^2)ix\beta_k] B_{3-n} \beta_{3-n} + [A_{3-n} + a_1^2(a^2 - b^2)x\beta_{3-n}i] \beta_k B_k}{DV \Delta b_{3-n} \beta_k}$$

$$A_k = (a^2 - 2b^2)(a_1^2 + b^2)\beta_k^2 - b^2(a^2 + a_1^2)x^2 + b^2$$

$$B_k = (a^2 a_1^2 + 3a^2 b^2 - 2b^4)x^2 + a^2(b^2 + a_1^2)\beta_k^2 - a^2$$

$$b_n = (a^2 + a_1^2)x^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - 1$$

$$Db_1 b_2 = \sum_1^2 (-1)^{m-1} [A_m + a_1^2(a^2 - b^2)ix\beta_m] B_{3-m} \beta_{3-m}$$

Подставляя (28) в (23) и переходя к оригиналам  $u_x$  так же, как было сделано выше, можно получить значение  $u_x$  в виде

$$u_x = \frac{X_x}{4\pi^2 r} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{z_n \delta_n(z_n)}{\beta_n'(z_n) V \Delta(z_n) [\beta_n'(z_n)(x-x_0) + r \cos \varphi]} d\varphi + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^{\pi/2} \frac{d_{n,k}(z_{n,k})}{\beta_n'(z_{n,k}) x + \beta_k'(z_{n,k}) x_0 + r \cos \varphi} d\varphi \right\}$$

где  $z_n, z_{n,k}$  определяются из уравнений

$$t - \beta_n'(z_n)(x - x_0) - z_n r \cos \varphi = 0 \quad (n, k = 1, 2)$$

$$t - \beta_n'(z_{n,k})x - \beta_k'(z_{n,k})x_0 - z_{n,k} r \cos \varphi = 0$$

То же решение может быть получено при наличии решения (21) методом [5].

Институт механики АН Армянской ССР  
Педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 6 VII 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԻ ՇԱՐԲ ՈՉ ՍՏԱՅԻՌՆԱՐ ՏԱՐԱՄԱԿԱՆ ԽԵՒԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ ՀՈՄ  
ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿԵՆՏՐՈՆԱՅՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՌԿՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ու ի մ

Դիտարկվում է տեղափոխման վեկտորի որոշման մի քանի խնդիրներ առաձգական և մագնիսաառաձգական միջավայրում կետային իմպուլսների առկայության դեպքում: Լուծումը գտնվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով և այնուհետև բերվում է Սմիրնովի և Սորոլիի լուծման տեսքի: Լուծումը գտնվել է անվերջ և կիսաանվերջ միջավայրերի համար:

SOLUTION OF SOME NON-STATIONARY SPATIAL PROBLEMS  
FOR A CONTINUOUS MEDIUM WITH CONCENTRATED IMPULSES

A. G. BAGDOEV, A. N. MARTIROSIAN

S u m m a r y

A number of problems to determine the displacement vector for elastic and magnetoelastic media with point impulses is considered. The solution is found by a common method consisting of determination of displacements by the integral transforms of Laplace and Fourier in the form of quadratures, which then are reduced to the effective form expressed through the analytical functions, introduced by Smirnov and Sobolev. The familiar solution of the problem for an infinite elastic medium, the



solution for an infinite magnetoelastic medium and the solution for a semi-infinite magnetoelastic medium bordering with dielectric are also found. In the latter problem the propagation of disturbances ahead of wave fronts in the magnetoelastic medium is shown.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабин В. М.* и др. Линейные уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1964.
2. *Kaliski S.* and *Pettkiewicz Y.* Dynamical equations for elastic bodies in magnetic field. Proc. vibr. probl., 1959, № 2, Warsaw.
3. *Лебедева Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. *Кургушев А. М., Голубева Н. С.* Основы радиоэлектроники. Изд. «Энергия», М., 1969.
5. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.—Л., 1937.