

Н. П. ЗАМЕТАЛИНА, В. К. ПРОКОПОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННО СКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ТИПА СПИРАЛЬНЫХ СВЕРЛ

Исследование напряженного состояния является необходимым элементом рационального конструирования спирального сверла. Однако расчет спирального сверла до сих пор производится без учета его скрученности. В данной работе ставится задача расчета спирального сверла с учетом его естественной скрученности; при этом используются известные результаты Г. Ю. Джанелидзе и А. И. Лурье [1, 3] по теории равновесия скрученных стержней.

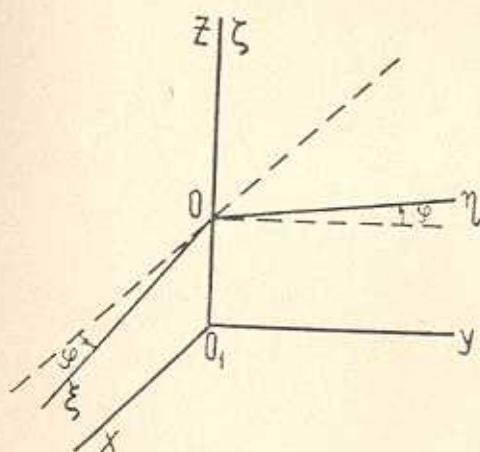
Введем координаты ξ , η с началом в центре тяжести поперечного сечения сверла, направленные вдоль главных осей инерции сечения (фиг. 1); эти оси поворачиваются вокруг оси сверла ζ на угол

$$\varphi = a\zeta \quad (1)$$

где

$$a = \frac{2}{D} \operatorname{tg} \omega \quad (2)$$

— угол закручивания на единицу длины, ω — наклон винтовой канавки сверла, D — диаметр сверла.



Фиг. 1.

Оси ξ , η , ζ образуют неортогональную систему координат; связь с неподвижными декартовыми осями x , y , z выражается соотношениями

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \eta = y \cos \varphi - x \sin \varphi, \quad \zeta = z \quad (3)$$

Очевидно, что при $z=0$ ($\varphi = \zeta = 0$) оси ξ , η , ζ и x , y , z совпадают.

При работе сверло испытывает совместное действие крутящего момента N и усилия подачи R , приложенных в торцевом сечении $z=l$ (l — длина сверла) и направленных вдоль оси z (ζ); величины R и N считаются заданными.

Вычисляя для координат (3) составляющие метрического тензора и символы Кристоффеля (см. [1, 2]), получим исходные уравнения задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial \zeta} - 2a\sigma^{23} - a^2\zeta\sigma^{32} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial \zeta} + 2a\sigma^{13} - a^2\eta\sigma^{31} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma^{11} = \left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u^1}{\partial \xi} \right) (1 + a^2\eta^2) - 2\mu a^2\eta \left(\xi \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{22} = \left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right) (1 + a^2\xi^2) - 2\mu a^2\xi \left(\eta \frac{\partial u^2}{\partial \xi} + u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{12} = \mu \left[\frac{\partial u^1}{\partial \eta} (1 + a^2\xi^2) + \frac{\partial u^2}{\partial \xi} (1 + a^2\eta^2) \right] - \lambda\theta a^2\xi\eta +$$

$$+ \mu a^2\eta \left[u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial u^1}{\partial \xi} \right] + \mu a^2\xi \left(u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} - \eta \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right)$$

$$\sigma^{13} = \mu \left[\frac{\partial u^3}{\partial \xi} (1 + a^2\eta^2) - a^2\zeta\eta \frac{\partial u^3}{\partial \eta} \right] + a\eta \left[\lambda\theta + \mu \left(\frac{\partial u^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u^3}{\partial \zeta} \right) \right] -$$

$$- \mu a \left(u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial u^1}{\partial \eta} \right)$$

$$\sigma^{23} = \mu \left[\frac{\partial u^3}{\partial \eta} (1 + a^2\xi^2) - a^2\zeta\xi \frac{\partial u^3}{\partial \xi} \right] - a\xi \left[\lambda\theta + \mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial \zeta} + \frac{\partial u^3}{\partial \zeta} \right) \right] +$$

$$+ \mu a \left(u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u^2}{\partial \xi} \right)$$

$$\sigma^{33} = \lambda\theta + 2\mu a \left(\eta \frac{\partial u^3}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u^3}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u^3}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{31} \nu_1 + \sigma^{32} \nu_2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (6)$$

$$\int_{(\Omega)} \varepsilon^{\beta\alpha} dS = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad \int_{(\Omega)} \xi \varepsilon^{\beta\alpha} dS = \int_{(\Omega)} \eta \varepsilon^{\beta\alpha} dS = 0$$

$$\int_{(\Omega)} \varepsilon^{\beta\alpha} dS = R, \quad \int_{(\Omega)} [\xi \varepsilon^{\beta\alpha} - \eta \varepsilon^{\beta\alpha} + a(\xi^2 + \eta^2) \varepsilon^{\beta\alpha}] dS = N$$
(7)

Здесь u^α , $\varepsilon^{\beta\alpha}$ — контрвариантные составляющие вектора перемещения и тензора напряжений; λ , μ — постоянные Ляме; $\gamma_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}$, $\gamma_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t}$ — направляющие косинусы нормали к контуру сечения Γ в плоскости $\xi\eta$; t — длина дуги контура; $dS = d\xi d\eta$, Ω — площадь поперечного сечения; $\vartheta = \frac{\partial u^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u^2}{\partial \eta} + \frac{\partial u^3}{\partial \zeta}$. Уравнения (6) и (7) представляют граничные условия на боковой поверхности и условия на торце сверла.

Решение системы (4)–(7) строится в форме ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = aD$:

$$u^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^\alpha, \quad \varepsilon^{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \varepsilon_n^{\beta\alpha} \quad (8)$$

Нулевое приближение дает уравнения для незакрученного сверла в декартовых координатах. Уравнения первого приближения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_1^{\alpha 1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varepsilon_1^{\gamma 2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \varepsilon_1^{\beta 3}}{\partial \zeta} + \frac{2}{D} (-1)^\alpha \varepsilon_0^{\beta \gamma} = 0$$

$$(\alpha = 1, 2; \beta = 2, 3; \gamma = 3, 1) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1^{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varepsilon_1^{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \varepsilon_1^{33}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\varepsilon_1^{11} = \lambda \vartheta_1 + 2\mu \frac{\partial u_1^1}{\partial \xi} + 2\mu \frac{\eta}{D} \frac{\partial u_0^1}{\partial \zeta}$$

$$\varepsilon_1^{33} = \lambda \vartheta_1 + 2\mu \frac{\partial u_1^3}{\partial \zeta} + \frac{2\mu}{D} \left(\eta \frac{\partial u_0^3}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u_0^3}{\partial \eta} \right)$$

$$\varepsilon_1^{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_1^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\mu}{D} \left(\eta \frac{\partial u_0^2}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial u_0^1}{\partial \zeta} \right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_1^{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_1^3}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{\eta}{D} \left[\lambda \vartheta_0 + \mu \left(\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0^3}{\partial \zeta} \right) \right] - \frac{\mu}{D} \left(\xi \frac{\partial u_0^1}{\partial \eta} + u_0^2 \right)$$

$$v_n = \frac{\partial u_n^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_n^2}{\partial \eta} + \frac{\partial u_n^3}{\partial \zeta} \quad (n = 0, 1) \quad (11)$$

$$\sigma_1^{z1} v_1 + \sigma_1^{z2} v_2 = 0 \quad (z = 1, 2, 3)$$

$$\int_{(\Omega)} \sigma_1^{3x} dS = 0 \quad (x = 1, 2, 3), \quad \int_{(\Omega)} \xi \sigma_1^{33} dS = \int_{(\Omega)} \eta \sigma_1^{33} dS = 0 \quad (12)$$

$$\int_{(\Omega)} (\xi \sigma_1^{32} - \eta \sigma_1^{31}) dS = -\frac{1}{D} \int_{(\Omega)} (\xi^2 - \eta^2) \sigma_0^{33} dS$$

Выражения для σ_1^{22} и σ_1^{33} получаются из σ_1^{11} и σ_1^{33} заменой $\xi, \eta, u_0^1, u_0^2, u_1^1, D$ на $\eta, \xi, u_0^2, u_0^1, u_1^2, -D$, соответственно.

Решая сначала задачу о сжатии сверла, а затем задачу его кручения [1], получим формулы, определяющие напряженное состояние сверла (с точностью до первой степени параметра ε) при одновременном действии продольной сжимающей силы R и крутящего момента N :

$$\sigma^{11} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \quad \sigma^{22} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \quad \sigma^{12} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\sigma^{13} = \left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \sigma^{23} = -\left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (13)$$

$$\sigma^{33} = -\frac{R}{\Omega} + \varepsilon \left\{ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{N}{D\Omega} + \frac{2N}{DT} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left[\Delta \Phi + \frac{2N}{DT} \left(\xi^2 + \eta^2 - 2\psi - \frac{J_p}{\Omega} \right) \right] \right\}$$

Здесь J_p — полярный момент инерции сечения, $T = 2 \int_{(\Omega)} \psi dS$ — геометрическая жесткость на кручение; оси ξ и η предполагаются осями симметрии для поперечного сечения сверла.

Функции $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -2; \quad \Psi|_{\Gamma} = 0 \quad (14)$$

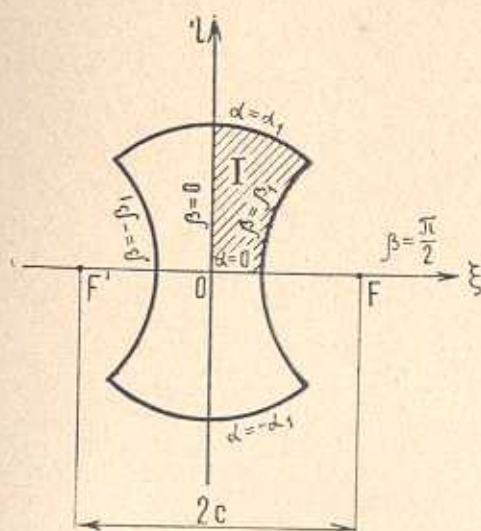
$$\Delta \Delta \Phi = -\frac{16N}{DT}; \quad \Phi|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (15)$$

Таким образом, задача определения напряженного состояния спирального сверла с учетом его естественной крутки сводится к решению двух задач: гармонической задачи (14), типа задачи кручения, и бигармонической задачи (15), эквивалентной задаче изгиба тонкой плиты с заземленным контуром.

Для решения этих задач введем эллиптические координаты α, β [4] с фокусным расстоянием $2c$

$$\xi = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \quad \eta = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \quad (16)$$

Поперечное сечение спирального сверла с достаточной точностью можно аппроксимировать симметричной областью, ограниченной софокусными эллипсами и гиперболами $\alpha = \pm \alpha_1; \beta = \pm \beta_1$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

В эллиптических координатах уравнение (14) преобразуется к такому:

$$\Delta^* \Psi^* = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \beta^2} = -c^2 h \quad (17)$$

Здесь

$$\Psi^*[\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta)] = \Psi^*(\alpha, \beta), \quad h = \operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta \quad (18)$$

Так как поперечное сечение сверла представляет собой симметричную область и граничные условия по всему контуру однотипны (на контуре Γ функция Ψ^* обращается в нуль), то достаточно рассмотреть заштрихованную на фиг. 2 область 1, определив в ней функцию напряжений, требуя при этом обращения в нуль нормальной производной $\frac{\partial \Psi^*}{\partial n}$ на осях симметрии области Ω . Таким образом, граничные условия для области 1 предстанут в таком виде:

$$\Psi^*(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (19a)$$

$$\Psi^*(\alpha, \beta_1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1} = 0 \quad (19b)$$

Решение краевой задачи (17), (19) строим в форме ряда синусов кратных дуг с неизвестными функциональными коэффициентами [4]:

$$v^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin \gamma_k (z - z_1), \quad \gamma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2z_1} \quad (20)$$

Ряд (20) граничным условием (19 а) удовлетворяет автоматически, подстановка его в уравнение (17) и в условия (19 б) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $f_k(\beta)$

$$f_k''(\beta) - \gamma_k^2 f_k(\beta) = \frac{2c^2 \gamma_k \operatorname{ch} 2z_1}{z_1 (\gamma_k^2 + 4)} + \frac{2c^2}{z_1 \gamma_k} \cos 2\beta \quad (21)$$

и к граничным условиям для них

$$f_k'(0) = 0, \quad f_k(\beta_1) = 0 \quad (22)$$

Решение уравнений (21), удовлетворяющее условиям (22), имеет следующий вид:

$$f_k(\beta) = \frac{2c^2}{z_1 \gamma_k (\gamma_k^2 + 4)} \left[\frac{\operatorname{ch} 2z_1 + \cos 2\beta_1}{\operatorname{ch} \gamma_k \beta_1} \operatorname{ch} \gamma_k \beta - (\operatorname{ch} 2z_1 + \cos 2\beta) \right] \quad (23)$$

Формулы (20), (23) и дают решение краевой задачи (17), (19).

Рассмотрим далее задачу (15). В эллиптических координатах (16) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{h} \Delta^* \left(\frac{1}{h} \Delta^* \Phi \right) = - \frac{4c^4 N}{DT} \quad (24)$$

где оператор Δ^* и функция h по-прежнему определяются формулами (17), (18), а $\Phi^*(z, \beta) = \Phi[\xi(z, \beta), \eta(z, \beta)]$; граничные условия (15) сохраняют свой вид и для функции Φ^*

$$\Phi^*|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (25)$$

Уравнение (24) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \frac{c^4}{2} \iint_{(\Omega)} \left[\frac{1}{h^2} (\Delta^* \Phi^*)^2 + \frac{8c^4 N}{DT} \right] h dx dy \quad (26)$$

что легко проверяется приравниванием нулю его первой вариации и преобразованием полученного выражения по формуле Грина с использованием граничных условий (25).

Краевую задачу (24), (25) поэтому можно решать прямыми вариационными методами. В качестве первого и второго приближений следует принять функцию Φ^* в виде

$$1) \Phi^* = Ah^2 (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 \quad (27)$$

$$2) \Phi^* = B_1 h^2 (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 + B_2 h^2 (\operatorname{ch} 2z - \operatorname{ch} 2z_1)^2 (\cos 2\beta - \cos 2\beta_1)^2 \quad (28)$$

При таком задании функции Φ^* граничные условия (25) на контуре Γ выполнены, а выражение для лагранжиана $\Delta^*\Phi^*$ примет удобный для последующего интегрирования (26) вид. После чего уравнение $\frac{\partial J}{\partial A} = 0$ в случае 1) или уравнения $\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial B_2} = 0$ в случае 2) дадут возможность найти искомые коэффициенты A или B_1 , B_2 .

Тольяттинский политехнический
институт

Поступила 7 VI 1972

Ն. Պ. ԶԱՄԵՏԱԼԻՆԱ, Վ. Կ. ՊՐՈՔՈՓՈՎ

ՊԱՐՈՒՐԱԶԵՎ ՀԱՂԱՓԻ ՏԵՍԱԿԻ ԲՆԱԿԱՆ ԿԵՐՊՈՎ ՈՂՈՐՎԱԾ ԶՈՂԵՐԻ
ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դրվում է պարուրածև շաղափի հաշվարկի խնդիրը նրա բնական ուղղվածության հաշվառումով, երբ նրա վրա միաժամանակ ազդում են ուղորդ մոմենտը և երկայնական սեղմող ուժը:

Էլիպտական կոորդինատային սխեմեմում ստացվել է ուղորման խնդրի տիպի հարմոնիկ խնդրի լուծումը և եզրագծով ամրակցված բարակ սալի ծոման խնդրին համարժեք բիհարմոնիկ խնդրի լուծումը:

THE STRAINED STATE OF NATURALLY TWISTED
BARS LIKE SPIRAL DRILLS

N. P. ZAMETALINA, V. K. PROKOPOV

S u m m a r y

A problem is set to calculate the spiral drill as a naturally twisted bar under a joint action of torque moment and longitudinal compressive force.

The solution of a harmonic problem similar to that of twist and the solution of a biharmonic problem equivalent to that of bending a thin plate with a squeezed contour are obtained in elliptic coordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю. Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим. Ч. I. Основные уравнения. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 1; ч. II. Растяжение и кручение. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 3.
2. Лурье А. И. Теория упругости. «Наука», М., 1970.
3. Джанелидзе Г. Ю. Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения. Тр. ЛПИ, 1946, № 1.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.

А. Г. БАГДОЕВ, А. Н. МАРТИРОСЯН

РЕШЕНИЕ РЯДА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ
 ЗАДАЧ ДЛЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ
 СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассматривается задача определения перемещений в упругой и магнитоупругой среде при наличии точечных импульсов в неограниченном пространстве. Для изотропной однородной упругой среды уравнения движения возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_1 + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_2 + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + b^2 \Delta u_3 + \frac{Z_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t) \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

Вводим преобразование Лапласа $\bar{u}_{1,2,3}$ для компонентов перемещений $u_{1,2,3}$, а затем вводим преобразования Фурье в виде

$$\bar{u}_{1,2,3} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)} \bar{\bar{u}}_{1,2,3} d\alpha_1 d\beta_1 d\gamma_1 \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$\begin{aligned} [s^2 + a^2 \alpha_1^2 + b^2(\beta_1^2 + \gamma_1^2)] \bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 \bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{X_0}{8\pi^3 \rho} \\ (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 \bar{\bar{u}}_1 + [s^2 + a^2 \beta_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)] \bar{\bar{u}}_2 + (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{Y_0}{8\pi^3 \rho} \\ (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_1 + (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \bar{\bar{u}}_2 + [s^2 + a^2 \gamma_1^2 + b^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \bar{\bar{u}}_3 &= \frac{Z_0}{8\pi^3 \rho} \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) можно получить

$$\begin{aligned} 8\pi^3 \rho \bar{\bar{D}} u_1 &= X_0 [s^2 + b^2 \alpha_1^2 + a^2(\gamma_1^2 + \beta_1^2)] - Y_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 - Z_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \gamma_1 \\ 8\pi^3 \rho \bar{\bar{D}} u_2 &= -X_0 (a^2 - b^2) \alpha_1 \beta_1 + Y_0 [s^2 + b^2 \beta_1^2 + a^2(\alpha_1^2 + \gamma_1^2)] - Z_0 (a^2 - b^2) \beta_1 \gamma_1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$8\pi^2\rho Du_z = -X_0(a^2 - b^2)\alpha_1\gamma_1 - Y_0(a^2 - b^2)\beta_1\gamma_1 + Z_0[s^2 + b^2\gamma_1^2 + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2)] \quad (4)$$

где

$$D = [s^2 + a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)][s^2 + b^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)]; \quad s = -i\omega$$

Подставляя (4) в (2), вычисляя вычет в интегралах по γ_1 относительно

полюсов $\gamma_1^{(1)} = \omega \sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2 - \beta^2}$; $\gamma_1^{(2)} = \omega \sqrt{\frac{1}{b^2} - \alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha = \frac{z_1}{\omega}$, $\beta = \frac{\beta_1}{\omega}$ и переходя к цилиндрическим координатам

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta, \quad a = \xi \cos \varphi, \quad \beta = \xi \sin \varphi, \quad z = z$$

получим

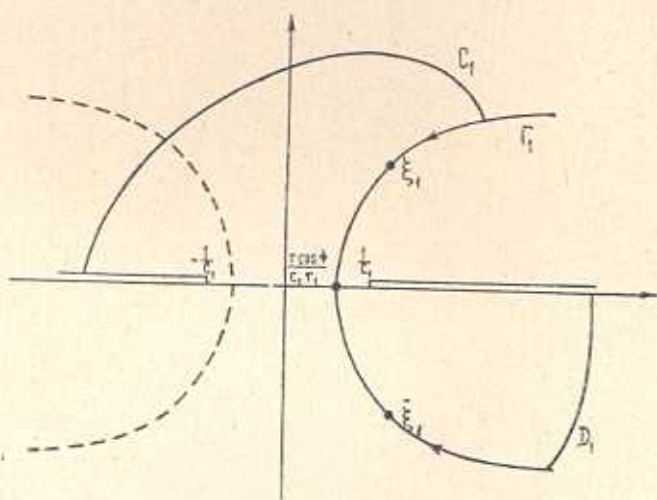
$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (X_0\alpha^2 + Y_0\alpha\beta + Z_0\alpha\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}} d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{1}{b^2} - \alpha^2 \right) X_0 - Y_0\alpha\beta - Z_0\beta\gamma_1^{(2)} \right] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \\ \bar{u}_2 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (X_0\alpha\beta + Y_0\beta^2 + Z_0\beta\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(1)}} d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left[-X_0\alpha\beta + Y_0 \left(\frac{1}{b^2} - \beta^2 \right) - Z_0\beta\gamma_1^{(2)} \right] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \quad (5) \\ \bar{u}_3 &= \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (X_0\alpha + Y_0\beta + Z_0\gamma_1^{(1)}) e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(1)})} \xi d\xi d\psi + \\ &+ \frac{\omega i}{4\pi^2\rho} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [-X_0z\gamma_1^{(2)} - Y_0\beta\gamma_1^{(2)} + Z_0(a^2 + \beta^2)] e^{i\omega(\xi r \cos\psi + z\gamma_1^{(2)})} \frac{\xi}{\gamma_1^{(2)}} d\xi d\psi \end{aligned}$$

где $\psi = \varphi - \theta$.

Формулы (5) имеют место для $z > 0$, для $z < 0$ $\gamma_1^{(1,2)}$ в экспоненте поменяют знаки, а окончательное решение (12), (13), (14) не изменится.

В интегралах по ψ в (5), взятых в пределах $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, сделаем замену $\pi - \psi$ на ψ , тогда в указанных интегралах, взятых уже в пределах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \psi$ заменится на $-\cos \psi$. Поскольку при нечетных степенях $\cos \psi$ стоит множителем нечетные степени ξ , можно полученные интегралы в (5) по ψ в пределах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ объединить, причем

$\cos \psi$ всюду брать со знаком плюс и интегралы по ξ следует брать в пределах $(-\infty, \infty)$, а также под знаком интеграла ставить $\operatorname{sgn} \xi$. Сделаем разрез плоскости ξ по действительной оси от точек $\pm c_n^{-1}$ до $\pm \infty$, причем $c_1 = a$ и $c_2 = b$ для первых и вторых интегралов соответственно в правых частях (5). Выберем положительно мнимые значения функций $\gamma_{1,2}(\xi) = \frac{\gamma_{1,2}^{(1,2)}}{\omega}$, $\xi = \frac{z}{\omega}$ на верхних берегах левых и нижних берегах правых разрезов, причем при $\omega > 0$ контур интегрирования по ξ проходит при $\xi < 0$ в верхней полуплоскости, при $\xi > 0$ — в нижней полуплоскости. Проведем дуги окружностей $C_{1,2}$, $D_{1,2}$ большого радиуса фиг. 1, на которых $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) < 0$, где $T_{1,2}(\xi) = t - \xi r \cos \psi - z \gamma_{1,2}(\xi)$.



Фиг. 1.

Проведем контуры $\Gamma_{1,2}$, на которых $\operatorname{Im} T_{1,2}(\xi) = 0$, и которые проходят через точки Смирнова-Соболева $\xi_{1,2}$, определяемые уравнениями

$$T_1(\xi_1) = t - \xi_1 r \cos \psi - z \gamma_1(\xi_1) = 0, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \xi_1^2} \quad (6)$$

$$T_2(\xi_2) = t - \xi_2 r \cos \psi - z \gamma_2(\xi_2) = 0, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \xi_2^2}$$

Из (6) получится для $z > 0$

$$r_1^2 \xi_1 = t r \cos \psi + iz \sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}$$

$$r_1^2 \xi_2 = t r \cos \psi + iz \sqrt{t^2 - \frac{r_1^2}{b^2}} \quad (7)$$

$$r_1^2 = z^2 + r^2 \cos^2 \psi$$

причем при $z < 0$ перед радикалами берется обратный знак. Комплексно-сопряженные значения $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ также удовлетворяют (6), то есть находятся на $\Gamma_{1,2}$ фиг. 1. Интеграл по ξ от 0 до $\frac{r \cos \psi}{c_{1,2} r_1}$ равен нулю, поскольку при обратном преобразовании Лапласа получится интеграл от дельта-функций аргумента $t - \xi r \cos \psi - \gamma_{1,2} z$, корни которого $\xi_{1,2}$ не лежат на вышеупомянутом участке. Заменяя интегралы по ξ на интегралы по контурам $\Gamma_{1,2}$, получим из (5) для \bar{u}_1 , например, при $\omega > 0$

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1 = & -\frac{\omega l}{4\pi^2 \rho} \int_0^{\pi/2} \int_{\Gamma_1} [X_0 (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi^2 + Y_0 \cos 2\psi \sin \theta \cos \theta \xi^2 + \\
 & + Z_0 \xi \cos \psi \gamma_{11}(\xi)] e^{i\omega(\xi r \cos \psi + z \gamma_1(\xi))} \frac{\xi}{\gamma_{11}(\xi)} d\xi d\psi - \frac{\omega l}{4\pi^2 \rho} \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{b^2} - \xi^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \right] X_0 - Y_0 \cos 2\psi \sin \theta \cos \theta \xi^2 - Z_0 \xi \cos \psi \gamma_{11}(\xi) \right\} \times \\
 & \times e^{i\omega(\xi r \cos \psi + z \gamma_1(\xi))} \frac{\xi}{\gamma_{12}(\xi)} d\xi d\psi \quad (8)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что интегралы от нечетных степеней $\sin \psi, \cos \psi$ в (5) равны нулю. При получении (8) интегралы по ξ в пределах $(-\infty, 0)$ заменялись на проходимые сверху вниз верхние части контуров $\Gamma_{1,2}$ с учетом знака $\text{sgn} \xi$, а участок $(0, \infty)$ заменяется на взятые с обратным знаком интегралы по нижним частям контуров $\Gamma_{1,2}$, проходимых уже снизу вверх. При $\omega < 0$ берем вместо $C_{1,2}, D_{1,2}$ (фиг. 1) дуги окружности, дополняющие их соответственно до верхних и нижних полуокружностей. Учитывая множитель $\text{sgn} \xi$, можно показать, что при $\omega < 0$ снова имеет место (8).

Обратное преобразование Лапласа по t дает, например, для коэффициента при X_0 , соответствующего интегралу по Γ_1 , значение

$$\begin{aligned}
 u_1|_{X_0, \Gamma_1} = & \frac{X_0}{4\pi^2 \rho} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \int_{\Gamma_1} (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \\
 & + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi^2 (t - \xi r \cos \psi - z \gamma_{11}(\xi)) \frac{d\xi d\psi}{\gamma_{11}(\xi)} \quad (9)
 \end{aligned}$$

и после вычисления интеграла от дельта-функции действительного аргумента для $z > 0$ получим

$$u_1|_{X_0, \Gamma_1} = -\frac{X_0}{2\pi^2 \rho} \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \xi_1^2}{r \cos \psi \gamma_{11}(\xi_1) - z \xi_1} d\psi \quad (10)$$

где объединены интегралы по верхней и нижней частям Γ_1 , дающие сопряженные комплексные значения, причем ξ_1 дается (7). Учитывая, что действительная и мнимая части подынтегральных функций — четные и соответственно нечетные функции $\cos \psi$, получим для (10) значение

$$\frac{X_0}{2\pi^2\rho} \frac{\partial}{\partial t} \sigma \left(t - \frac{R}{a} \right) \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta \cos^2 \psi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi) \times \\ \times \left[3t^2 r^2 z \cos^2 \psi - z^3 \left(t^2 - \frac{r_1^2}{a^2} \right) \right] \frac{d\psi}{r_1^3} \quad (11)$$

где $\sigma(x)$ есть единичная функция, $R = \sqrt{z^2 + r^2}$.

Заменяя $\operatorname{tg} \psi = \lambda$, вычисляя интегралы по λ , получим для (11) значение

$$u_1|_{x_0, r_1} = \frac{X_0 t (3x^2 - R^2)}{4\pi\rho R^3} \sigma \left(t - \frac{R}{a} \right) + \frac{X_0 x^2 \delta \left(t - \frac{R}{a} \right)}{4\pi\rho a^2 R^3}$$

Подобным же образом вычисляются остальные интегралы в (8), а также интегралы для \bar{u}_2, \bar{u}_3 . Окончательные формулы для компонентов перемещений имеют вид

$$u_1 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [(3x^2 - R^2) X_0 + 3xyY_0 + 3xzZ_0] \sigma \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 x^2 + Y_0 xy + Z_0 xz) \delta \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{X_0 \delta \left(t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [3X_0 xy + (3y^2 - R^2) Y_0 + 3Z_0 yz] \sigma \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 xy + Y_0 y^2 + Z_0 yz) \delta \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{Y_0 \delta \left(t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (13)$$

$$u_3 = \frac{t}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 (-1)^{k+1} [3X_0 xz + 3Y_0 yz + Z_0 (3z^2 - R^2)] \sigma \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho R^3} \sum_1^2 \frac{(-1)^{k+1}}{c_k^2} (X_0 xz + Y_0 yz + Z_0 z^2) \delta \left(t - \frac{R}{c_k} \right) + \frac{Z_0 \delta \left(t - \frac{R}{b} \right)}{4\pi\rho b^2 R} \quad (14)$$

где $c_1 = a$, $c_2 = b$.

Полученное решение задачи для точечных импульсов совпадает с известным решением [1], однако приведенный здесь метод является до-

вильно общим и может быть применен к более сложным граничным задачам для изотропных сред.

Рассмотрим теперь задачу определения перемещений магнитоупругой среды при наличии точечных импульсов.

Пусть начальное магнитное поле величины B_x параллельно оси x , тогда задача имеет осевую симметрию относительно оси x , причем уравнения магнитоупругости [2] можно взять в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + b^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \\ &+ a_1^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + a_1^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \frac{b^2}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) - \\ &- b^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{X_x}{2\pi r \rho} \delta(r) \delta(x) \delta(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Решение для преобразования по Лапласу по t от u_r и u_x ищется в виде преобразования Фурье-Ханкеля

$$\bar{u}_r = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_1(\lambda r) \bar{u}_r d\lambda; \quad \bar{u}_x = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} e^{ikx} J_0(\lambda r) \bar{u}_x d\lambda \quad (16)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя [3].

Подставляя (16) в (15) и применяя формулы обращения преобразований Фурье-Ханкеля, можно получить

$$4\pi^2 \rho D \bar{u}_x = -X_x \lambda [(a^2 + a_1^2) \lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2] \quad (17)$$

$$4\pi^2 \rho D \bar{u}_r = X_x (a^2 - b^2) i k \lambda^2$$

где

$$D = (a^2 - b^2)^2 k^2 \lambda^2 - [(a^2 + a_1^2) \lambda^2 + (b^2 + a_1^2) k^2 + s^2] (a^2 k^2 + b^2 \lambda^2 + s^2) \quad (18)$$

Подставляя (17) в (16), используя интегральные представления функций Бесселя [3], вычисляя интегралы по β с помощью теории вычетов, вводя переменные $s = -i\omega$, $\lambda = \alpha\omega$, $k = \beta\omega$, получим

$$\bar{u}_x = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \alpha [(a^2 + a_1^2) \alpha^2 + (b^2 + a_1^2) \beta_n^2 - 1] e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos \varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\beta_n \sqrt{\Delta}} \quad (19)$$

$$\bar{u}_r = \frac{X_x \omega i}{4\pi^2 \rho} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (a^2 - b^2) \alpha^2 \cos \varphi e^{i\omega(\beta_n x + \alpha r \cos \varphi)} \frac{d\alpha d\varphi}{\sqrt{\Delta}}$$

где

$$\Delta = p^2 - 4a^2(a_1^2 + b^2)q; \quad p = (a^2a_1^2 + a_1^2b^2 + 2a^2b^2)x^2 - a^2 - b^2 - a_1^2$$

$$q = (b^2x^2 - 1)(a^2x^2 + a_1^2x^2 - 1); \quad \beta_{1,2}^2 = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2a^2(a_1^2 + b^2)}; \quad a_1^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho}$$

При $x > 0$ выберем знак $+$ перед корнем квадратным в формуле для $\beta_{1,2}$. Заменяя как и выше контуры интегрирования по α контурами $\Gamma_{1,2}$, проходящими через точки $\alpha_{1,2}$, даваемые уравнениями Смирнова-Соболева,

$$T_{1,2} = t - \beta_{1,2}(\alpha_{1,2})x - \alpha_{1,2}r \cos \varphi = 0 \quad (20)$$

в направлениях $\text{Im } T_{1,2} = 0$, после обратного преобразования Лапласа по t и вычисления интегралов от $\delta(T_{1,2})$, получим

$$u_x = \frac{X_x}{2\pi^2\rho} \sum_1^2 (-1)^k \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha_k [(a^2 + a_1^2)\alpha_k^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_k^2(\alpha_k) - 1]}{\beta_k \sqrt{\Delta(\alpha_k)} [r \cos \varphi + \beta_k(\alpha_k)x]} d\varphi \quad (21)$$

$$u_r = \frac{X_x}{2\pi^2\rho} \sum_1^2 (-1)^k \text{Re} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha_k^2 \cos \varphi}{\sqrt{\Delta(\alpha_k)} [r \cos \varphi + \beta_k(\alpha_k)x]} d\varphi$$

где $\alpha_{1,2}$ определяются из (20). Заметим, что в отличие от случая упругой среды подынтегральные функции в (19) имеют точки ветвления $\Delta(\alpha) = 0$. Однако эти точки находятся на действительной оси, поэтому они не дадут дополнительных слагаемых в решении при замене указанных перед формулой (9) контуров по α (или ξ), проходящих в верхней и нижней полуплоскостях α , соответственно на контуры $\Gamma_{1,2}$, поскольку указанные точки ветвления находятся вне замкнутых контуров фиг. 1. Заметим, что, так как при изменении знака x значения α не изменятся по величине, а β поменяет знак, из (21) видно, что u_x есть нечетная, u_r — четная функция x . При $x < 0$ в (19) изменяются знаки перед \bar{u}_x , \bar{u}_r , α_n , β_n изменяются на $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, кроме того заменяется $\sqrt{\Delta}$ на $-\sqrt{\Delta}$, причем (21) снова имеет место.

Рассмотрим задачу о движении магнитоупругой среды, занимающей верхнее полупространство $x > 0$, граничащей с диэлектриком (воздухом), занимающим полупространство $x < 0$. Точечный импульс действует в точке $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Тогда решение для падающей на границу $x = 0$ волны дается (21), где заменено x на $x - x_0$. Решение при $x > 0$ ищем в виде

$$u_x = u_x^{(0)} + u_x, \quad u_r = u_r^{(0)} + u_r \quad (22)$$

где $u_x^{(0)}$, $u_r^{(0)}$ дает падающую волну, u_x , u_r удовлетворяют (15) при $X_x = 0$. Для преобразования Лапласа по t запишем

$$\bar{u}_x = \bar{u}_x^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} e^{i\omega^2 \beta_n x} J_0(i r) \bar{u}_x^{(n)} dx \quad (23)$$

$$\bar{u}_r = \bar{u}_r^{(0)} + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_n} e^{i\omega^2 \beta_n x} J_1(i r) \bar{u}_r^{(n)} dx$$

где $x = \frac{\lambda}{\omega}$, $\beta_n(x)$ дается (19). В нижнем полупространстве для компонент напряжений b_x , b_r возмущенного магнитного поля имеем

$$b_x^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad b_r^{(3)} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} = 0$$

и можно для преобразований Лапласа по t записать

$$\bar{\Pi} = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} \bar{\Pi} J_0(i r) dr$$

$$\bar{b}_x^{(3)} = \int_0^{\infty} \lambda e^{\lambda x} J_0(i r) \bar{\Pi} dr, \quad \bar{b}_r^{(3)} = - \int_0^{\infty} i e^{\lambda x} J_1(i r) \bar{\Pi} dr$$

Граничные условия при $x=0$ имеют вид [4]

$$\tau_{rx} + \Pi_{rx} = \Pi'_{rx}, \quad \tau_{xx} + \Pi_{xx} = \Pi'_{xx}, \quad b_x = b_x^{(3)}$$

где штрихи относятся к нижнему полупространству, Π — тензор Максвелла.

Используя формулы [4]

$$\Pi_{rx} = \frac{b_r}{4\pi} (B_x + b_x) \approx \frac{B_x b_r}{4\pi}, \quad \Pi_{xx} = \frac{1}{8\pi} (B_x + b_x)^2 - \frac{b_r^2}{8\pi} \approx \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_x b_x}{4\pi}$$

где (b_x, b_r) — возмущенное магнитное поле, получим граничное условие в виде ($x=0$)

$$b^2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{B_x}{4\pi\varphi} b_r = \frac{B_x}{4\pi\varphi} b_r^{(3)} \quad (24)$$

$$a^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 0, \quad b_x = b_x^{(3)}$$

В силу соотношений $b_x = -B_x \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right)$, $b_r = B_x \frac{\partial u_r}{\partial x}$ получится ($x=0$)

$$(a_1^2 + b^2) \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial r} = \frac{B_x}{4\pi\varphi} \bar{b}_r^{(3)} \quad (25)$$

$$a^2 \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (a^2 - 2b^2) \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = 0, \quad B_x \left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) = -\bar{b}_x^{(3)}$$

Подставляя (23) и $\bar{\Pi}$ в (25), где $\bar{u}_x^{(0)}$, $\bar{u}_r^{(0)}$ даются (19) с заменой x на $x - x_0$, учитывая, что при $x = 0$, $x - x_0 < 0$, получим уравнения для $\bar{u}_x^{(1,2)}$, $\bar{u}_r^{(1,2)}$, $\bar{\Pi}$ в виде

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^{n-1} e^{i\omega\beta_n x_0} \alpha^2 [(a^2 - 2b^2)(a_1^2 + b^2)\beta_n^2 - b^2(a^2 + a_1^2)x^2 + b^2] \frac{1}{\beta_n V \Delta} +$$

$$+ \sum_1^2 (b^2 i x \bar{u}_x^{(n)} + (a_1^2 + b^2)\beta_n \bar{u}_r^{(n)}) = \frac{B_x}{4\pi\rho} i x \bar{\Pi} \quad (26)$$

$$-\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^{(n-1)} e^{i\omega\beta_n x_0} \alpha [(a^2 a_1^2 + 3a^2 b^2 - 2b^4)x^2 + a^2(b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - a^2] \frac{1}{V \Delta} +$$

$$+ \sum_1^2 [(a^2 - 2b^2) \bar{u}_r^{(n)} + a^2 \beta_n \bar{u}_x^{(n)}] = 0$$

$$\frac{X_x}{4\pi\rho} \sum_1^2 (-1)^n e^{i\omega\beta_n x_0} \frac{(a^2 - b^2) B_x x^2}{V \Delta} - \sum_1^2 B_x \bar{u}_r^{(n)} = \bar{\Pi}$$

Значения $\bar{u}_r^{(n)}$ выражаются через $\bar{u}_x^{(n)}$ из (17) в виде

$$\bar{u}_r^{(n)} = - \frac{(a^2 - b^2) \beta_n \alpha i \bar{u}_x^{(n)}}{(a^2 + a_1^2)x^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - 1} \quad (27)$$

Как видно из (26) и (27), значения $\bar{u}_r^{(n)}$, $i \bar{u}_x^{(n)}$ при вещественных α , β_n , в отличие от случая решения для бесконечного пространства (19), являются комплексными, что приводит в данной задаче к наличию отличных от нуля значений u_r , u_x вне фронтов магнитоупругих волн. Из (26)–(27) получим

$$\bar{u}_x^{(n)} = (-1)^n \frac{X_x}{4\pi\rho} i \sum_1^2 (-1)^k d_{n,k}(x), \quad (n = 1, 2) \quad (28)$$

где

$$d_{n,k}(x) = \frac{[A_k - a_1^2(a^2 - b^2)ix\beta_k] B_{3-n} \beta_{3-n} + [A_{3-n} + a_1^2(a^2 - b^2)x\beta_{3-n}i] \beta_k B_k}{DV \Delta b_{3-n} \beta_k}$$

$$A_k = (a^2 - 2b^2)(a_1^2 + b^2)\beta_k^2 - b^2(a^2 + a_1^2)x^2 + b^2$$

$$B_k = (a^2 a_1^2 + 3a^2 b^2 - 2b^4)x^2 + a^2(b^2 + a_1^2)\beta_k^2 - a^2$$

$$b_n = (a^2 + a_1^2)x^2 + (b^2 + a_1^2)\beta_n^2 - 1$$

$$Db_1 b_2 = \sum_1^2 (-1)^{m-1} [A_m + a_1^2(a^2 - b^2)ix\beta_m] B_{3-m} \beta_{3-m}$$

Подставляя (28) в (23) и переходя к оригиналам u_x так же, как было сделано выше, можно получить значение u_x в виде

$$u_x = \frac{X_x}{4\pi^2 r} \sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{z_n \delta_n(z_n)}{\beta_n'(z_n) V \Delta(z_n) [\beta_n'(z_n)(x-x_0) + r \cos \varphi]} d\varphi + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^{\pi/2} \frac{d_{n,k}(z_{n,k})}{\beta_n'(z_{n,k}) x + \beta_k'(z_{n,k}) x_0 + r \cos \varphi} d\varphi \right\}$$

где $z_n, z_{n,k}$ определяются из уравнений

$$t - \beta_n'(z_n)(x - x_0) - z_n r \cos \varphi = 0 \quad (n, k = 1, 2)$$

$$t - \beta_n'(z_{n,k})x - \beta_k'(z_{n,k})x_0 - z_{n,k} r \cos \varphi = 0$$

То же решение может быть получено при наличии решения (21) методом [5].

Институт механики АН Армянской ССР
Педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 6 VII 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ, Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԻ ՇԱՐԲ ՈՉ ՍՏԱՅԻՌՆԱՐ ՏԱՐԱՄԱԿԱՆ ԽԵՒԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ ՀՈՄ
ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿԵՆՏՐՈՆԱՅՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՌԿՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Դիտարկվում է տեղափոխման վեկտորի որոշման մի քանի խնդիրներ առաձգական և մագնիսաառաձգական միջավայրում կետային իմպուլսների առկայության դեպքում: Լուծումը գտնվում է ինտեգրալ ձևափոխումների մեթոդով և այնուհետև բերվում է Սմիրնովի և Սորոլիի լուծման տեսքի: Լուծումը գտնվել է անվերջ և կիսաանվերջ միջավայրերի համար:

SOLUTION OF SOME NON-STATIONARY SPATIAL PROBLEMS
FOR A CONTINUOUS MEDIUM WITH CONCENTRATED IMPULSES

A. G. BAGDOEV, A. N. MARTIROSIAN

S u m m a r y

A number of problems to determine the displacement vector for elastic and magnetoelastic media with point impulses is considered. The solution is found by a common method consisting of determination of displacements by the integral transforms of Laplace and Fourier in the form of quadratures, which then are reduced to the effective form expressed through the analytical functions, introduced by Smirnov and Sobolev. The familiar solution of the problem for an infinite elastic medium, the

solution for an infinite magnetoelastic medium and the solution for a semi-infinite magnetoelastic medium bordering with dielectric are also found. In the latter problem the propagation of disturbances ahead of wave fronts in the magnetoelastic medium is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М.* и др. Линейные уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1964.
2. *Kaliski S.* and *Petgkiewicz Y.* Dynamical equations for elastic bodies in magnetic field. Proc. vibr. probl., 1959, № 2, Warsaw.
3. *Лебедева Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. *Кукушев А. М., Голубева Н. С.* Основы радиоэлектроники. Изд. «Энергия», М., 1969.
5. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М.—Л., 1937.