ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

Р. Е. ГЕЙЗЕН

КОНСТРУКТИВНО ПОЛУБЕЗМОМЕНТНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ. ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН

1. В теории оболочек понятие о полубезмоментном напряженном состоянии связывается с медленным изменением основного напряженного состояния и быстрым затуханием состояния типа краевого эффекта [1]. Поскольку краевой эффект характерен только для оболочек, невозможен и предельный переход от известных соотношений для полубезмоментных оболочек к соответствующим соотношениям для пластин. Из этого, однако, не следует невозможность существования полубезмоментных напряженных состояний оболочек и пластин, связанных с какими-либо иными эффектами. В последнем нетрудно убедиться из следующего опыта. Нагрузим прямоугольную пластинку равномерно распределенной растягивающей силой в направлении одной из координатных осей и изгибающими моментами, продольным и поперечным. Предположим, что материал пластины обладает пределом текучести и последний достигнут под действием только растягивающей силы. Тогда в каждом сечении, перпендикулярном направлению силы, образуются пластические шарниры, и при последующем приложении изгибающих моментов пластина будет работать как полубезмоментная.

Можно сделать и следующий шаг, сконструировав близкую к полубезмоментной упругую пластину в виде набора продольных балок или полос, соединенных в срединной плоскости продольными шарнирами. Сравнение прогибов прямоугольной шарнирно опертой пластины с одним, двумя и т. д. продольными шарнирами под действием равномерной поперечной нагрузки показывает существенное понижение жесткости при постановке двух первых шарниров; значение прогиба асимптотически приближается к некоторому пределу, практически неизменяющемуся при числе шарниров, большем трех. Этот результат наводит на мысль о возможности «распределения» ослабления, вызванного постановкой достаточно большого количества шарниров, подобно тому, как распределяют жесткость при расчете подкрепленных пластин и оболочек. Отсюда следует также, что требование малости отношения ширины к длине сопрягаемых элементов, при котором имеет место полубезмоментное состояние, не является чрезмерно жестким. Это предопределяет и распространенность полубезмоментного напряженного состояния в ряде специальных конструкций. Укажем, прежде всего, на широко применяемые в качестве капитальных и временных сооружений пластины и оболочки в виде набора балок, соединенных между собой посредством специальных замков в шпунт; различного типа настилы и покрытия с аналогичным соединением элементов и т. п. Для анализа работы таких конструкций были получены [3] соотношения для полубезмоментных пластин и оболочек как систем с распределенными шарнирами.

Класс конструктивно полубезмоментных систем удается при определенных ограничениях расширить за счет включения сильно ортотропных систем. Можно, например, показать, что напряженное состояние пластины с малым отношением поперечной и продольной изгибных жесткостей при слабой изменяемости напряженного состояния в поперечном направлении близко к полубезмоментному. В рассмотренных случаях полубезмоментность связана с конструктивными особенностями систем, которые по этой причине предлагается называть конструктивно-полубезмоментными.

В данной работе рассматриваются задачи изгиба конструктивно полубезмоментных пластин. Необходимые исходные соотношения [3] получены из соотношений изгиба жестких ортотропных пластин путем их разложения в ряд по малому параметру, характеризующему отношение главных изгибных жесткостей. Идея введения малого параметра такого рода предложена в работе [5], где исследовались напряженные состояния подкрепленных оболочек.

В настоящей работе обращено внимание на самостоятельное значение полубезмоментных соотношений не столько в связи с математическими упрощениями, делающими их применение целесообразными, сколько на необходимость их использования в тех случаях, когда полубезмоментная система является более подходящей механической моделью реальной конструкции, чем обычная пластина и оболочка [2, 3].

2. Обычное уравнение изгиба жестких ортотропных пластин представим в виде

$$w_{,xxxx} + \alpha w_{,xxyy} + \nu w_{,yyyy} = q^*(x, y) \tag{1}$$

где

$$\alpha = 2D_3/D_1, \qquad \nu = D_2/D_1, \qquad q^* = q/D_1$$

$$D_1 = E_1 h^3 [12(1-\mu_1\mu_2)]^{-1}, \qquad D_2 = E_2 h^3 [12(1-\mu_1\mu_2)]^{-1}$$

$$D_3 = D_1\mu_2 + 2D_k = D_2\mu_1 + 2D_k, \qquad D_k = Gh^3/12$$

Рассмотрим случай сильной ортотропии, в частности при $E_1 \gg E_2$. Тогда $\nu = E_2/E_1$ — малый параметр. Из соотношения $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$ следует $\mu_2/\mu_1 = \nu$. Решения уравнения (1) представим в виде разложения в ряд по малому параметру

$$w = w_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i w_i \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях ν. Приравняв последние нулю, получим

$$Lw_0 = q^*, \qquad Lw_i = Mw_{i-1}, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots)$$

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad M = -\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2\mu_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\right), \quad \beta = \frac{2D_3}{D_1} \tag{3}$$

Введение ряда (2) в выражение для внутренних усилий дает

$$M_1 = -D_1 \left[w_{0,\,xx} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i \left(w_{i,\,xx} + \mu_1 w_{i-1,\,yy} \right) \right]$$

$$M_2 = -D_1 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^{i+1} \left(w_{i,\,yy} + \mu_1 w_{i,\,xx} \right)$$

$$H = -2D_3 \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i w_{i,\,yx} \tag{4}$$

$$Q_1 = -D_1 \left[w_{0,\,xxx} + \beta w_{0,\,xyy} + \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i \left(w_{i,\,xxx} + \mu_1 w_{i-1,\,xyy} + \beta w_{i,\,xyy} \right) \right]$$

$$Q_2 = -D_1 \left[\beta w_{0,\,xxy} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(w_{i-1,\,yyy} + \mu_1 w_{i-1,\,xxy} + \beta w_{i,\,xxy} \right) \right]$$

Составим теперь систему граничных условий. Для общности примем несимметричные условия упруго-податливого закрепления всех краев пластинки, а именно:

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x = 0 & Q_1^* = -c_1^* w, & M_1 = c_2^* w_{,x} \\ & x = a & Q_1^* = c_3^* w, & M_1 = -c_4^* w_{,x} \\ & y = 0 & Q_2^* = -c_5^* w, & M_2 = c_6^* w_{,y} \\ & y = b & Q_2^* = c_7^* w, & M_2 = -c_8^* w_{,y} \end{array} \tag{5}$$

Здесь c_k^* $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ — коэффициенты жесткости упругого закрепления; $Q_1^* = Q_1 + H_{,y}$, $Q_2^* = Q_2 + H_{,x}$ — приведенные поперечные силы, объединяющие Q_1, Q_2 соответственно и дополнительные поперечные силы $H_{,y}$ и $H_{,x}$, эквивалентные действию крутящих моментов.

Вводя (4) в (5) и приравнивая в полученных выражениях коэффициенты при ν в одинаковых степенях, получим следующую систему граничных условий:
при $x=0$

$$\begin{array}{ll} (Nw_0)_{,x} - c_1 w_0 = 0, & w_{0,\,xx} + c_2 w_{0,\,x} = 0 \\ (Nw_i)_{,x} - c_1 w_i = -\mu_1 w_{i-1,\,xyy} & -w_{i,\,xx} - c_2 w_{i,\,x} = \mu_1 w_{i-1,\,yy} \end{array} \tag{6}$$

$$N = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

при $x=a$

$$(Nw_0)_{,x} + c_3 w_0 = 0, \qquad w_{0,xx} - c_4 w_{0,x} = 0$$
$$(Nw_i)_{,x} + c_3 w_i = -\mu_1 w_{i-1,xyy}, \qquad w_{i,xx} - c_4 w_{i,x} = -\mu_1 w_{i-1,yy} \tag{7}$$

при $y=0$

$$2\beta w_{0,xxy} - c_5 w_0 = 0, \qquad c_6 w_{0,y} = 0$$
$$2\beta w_{i,xxy} - c_5 w_i = -(Sw_{i-1})_{,y}, \qquad c_6 w_{i,y} = -Sw_{i-1} \tag{8}$$
$$S = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

при $y=b$

$$2\beta w_{0,xxy} + c_7 w_0 = 0, \qquad c_8 w_{0,y} = 0$$
$$2\beta w_{i,xxy} + c_7 w_i = -(Sw_{i-1})_{,y}, \qquad c_8 w_{i,y} = Sw_{i-1} \tag{9}$$

В соотношениях (6)—(9) $c_k = c_k^*/D_1$ ($k = 1, 2, \ldots, 8$), $i = 1, 2, 3\ldots$ Последовательное рассмотрение уравнений (3) при условиях (6)—(9) принципиально позволяет получить результаты с заданной точностью. Однако практически можно рассчитывать лишь на получение двух первых приближений, так что принятая форма решения (2) целесообразна при $E_2/E_1 \to 0$. В последнем случае уравнение изгиба пластины совпадает с полученным ранее [2] уравнением для пластин, с часто расположенными продольными шарнирами и имеет вид

$$Lw_0 = q^* \tag{10}$$

Далее будем рассматривать этот предельный случай как представляющий самостоятельный интерес. Выражения для внутренних усилий и граничных условий получим из (4), (6)—(9), удерживая нулевые приближения ($i=0$).

Внутренние усилия равны

$$M_1 = -D_1 w_{0,xx}, \qquad M_2 = 0, \qquad H = -2D_k w_{0,xy}$$
$$Q_1 = -D_1 (w_{0,xxx} + \beta w_{0,xyy}), \qquad Q_2 = -2D_k w_{0,xxy} \tag{11}$$

Как видно, $M_2 = 0$. Поэтому рассматриваемые пластины при $\nu=0$ можно назвать полубезмоментными. Уравнения равновесия

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} = -q, \qquad M_{1,x} + H_{,y} = Q_1, \qquad H_{,x} = Q_2$$

в частности, третье отражает основную особенность их работы: взаимодействие продольных элементов осуществляется путем передачи усилий Q_2, которые уравновешиваются за счет кручения элементов. Граничные условия

$$\text{при}\quad x=0\qquad (Nw_0)_{,x}-c_1w_0=0,\qquad w_{0,xx}+c_2w_{0,x}=0$$
$$x=a\qquad (Nw_0)_{,x}+c_3w_0=0,\qquad w_{0,xx}-c_4w_{0,x}=0 \tag{12}$$

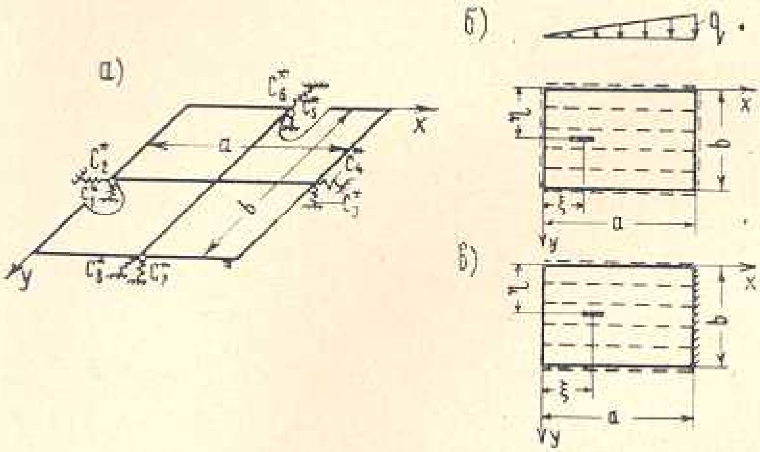
$$y=0\qquad 2\beta w_{0,xxy}-c_5w_0=0$$
$$y=b\qquad 2\beta w_{0,xxy}+c_7w_0=0 \tag{13}$$

Следовательно, необходимо удовлетворить шести граничным условиям, а не восьми, как для обычной пластины. Последнее связано с равенством нулю M_2 всюду, в том числе и на краях $y=0$, b, следствием чего и явилось понижение порядка производных оператора L по координате y.

3. Рассмотрим решение задач изгиба. Заметим, что соответствующее (10) однородное уравнение

$$\gamma^2 w_{,xxxx}+w_{,xxyy}=0,\qquad \gamma^2=0.25D_1/D_k \tag{14}$$

допускает разделение переменных по методу Фурье. Благодаря этому удается построить функцию влияния, удовлетворяющую произвольным однородным граничным условиям (12), (13), а следовательно, в общем виде решить задачу изгиба при произвольной поперечной нагрузке.



Фиг. 1.

Рассмотрим прямоугольную пластину, полубезмоментную в направлении у, при действии полосовой нагрузки q только вдоль x (фиг. 1а). Штрих-пунктирные линии на рисунке условно показывают либо направление продольных шарниров, связывающих отдельные полосы в пластинчатую систему, либо направление сильно развитых ребер жесткости, так что $D_1 \gg D_2$.

При заданной нагрузке прогиб должен удовлетворять уравнению (14) и условиям (12), (13). Решение (14) запишем в виде

$$w=X(x)\,Y(y) \tag{15}$$

Вводя (15) в (14) и разделяя переменные, получим

$$X^{\text{IV}} + k^2 X = 0 \tag{16}$$

$$\ddot{Y} - \gamma^2 Y = 0 \tag{17}$$

Здесь штрихами обозначены производные по x, точками — по y; $k=\text{const}$ — собственные значения уравнения (16).

Заметим, что (16) имеет вид уравнения устойчивости стержней. Следовательно, собственные функции (16), представляющие собой в данном случае формы продольного прогиба, совпадают с формами потери устойчивости балок.

Решение уравнения (16)

$$X(x) = X(0) + xX'(0) + \frac{1-\cos kx}{k^2} X''(0) + \frac{kx - \sin kx}{k^3} X'''(0) \tag{18}$$

Вычислив производные $X(x)$ до третьего порядка включительно и объединив их с (18), получим матричное уравнение

$$\vec{X}(x) = [f_i^l(x)]\, \vec{X}(0) \tag{19}$$

Здесь $\vec{X} = \{X, X', X'', X'''\}$ — вектор с составляющими, равными $X(x)$ и трем ее производным; $\vec{X}(0) = \{X(0), \; X'(0), \; X''(0), \; X'''(0)\}$ — вектор начальных параметров;

$$[f_i^l(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & \dfrac{1-\cos kx}{k^2} & \dfrac{kx - \sin kx}{k^3} \\ 0 & 1 & \dfrac{\sin kx}{k} & \dfrac{1-\cos kx}{k^2} \\ 0 & 0 & \cos kx & \dfrac{\sin kx}{k} \\ 0 & 0 & -k\sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$$

Подставив (15) в условие (12) и разделяя переменные, получим условия для функции $X(x)$:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \qquad X'''(0) - c_1 X(0) + k^2 X'(0) = 0, \quad X''(0) + c_2 X'(0) = 0 \\ &\phantom{\text{при }} x = a \qquad X'''(a) + c_3 X(a) + k^2 X'(0) = 0, \quad X''(a) - c_4 X'(a) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Подчиняя решение (19) условиям (20), в результате ряда преобразований составим уравнение для нахождения собственных значений

$$|a_{kn}| = 0, \qquad (k, \; n = 1{,}2) \tag{21}$$

где

$$a_{11} = c_1 + c_3 + c_1 c_3 \frac{ka - \sin ka}{k^3}$$

$$a_{12} = ac_3 - c_2 c_3 \frac{1-\cos ka}{k^2} - c_3 \frac{ka - \sin ka}{k}$$

$$a_{21} = c_1 \frac{1-\cos ka}{k^2} - \frac{c_1}{c_4}\frac{\sin ka}{k}$$

$$a_{22} = \cos ka + \frac{c_2}{c_4}\cos ka - c_2 \frac{\sin ka}{k} + \frac{k \sin ka}{c_4}$$

С учетом (20) решение (18) получает вид

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} D_m X_m \tag{22}$$

Здесь

$$X_m = 1 + (c_1 + d_m k_m^2) k_m^{-3} (k_m x - \sin k_m x) - d_m [x - k_m^{-2} c_2 (1 - \cos k_m x)],$$

$$d_m = a_{11} a_{12}^{-1}, \; D_m \text{— произвольная постоянная.}$$

Далее определяем функцию $Y(y)$ из уравнения (17); введя ее и (22) в (15), запишем

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} X_m (A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}), \qquad \alpha_m = \gamma k_m \tag{23}$$

При действии на длине u вдоль x нагрузки q с координатами центра ξ, η упругая поверхность описывается двумя выражениями вида (23)

$$w_i = \sum_{m=1}^{\infty} X_m (A_{mi} e^{\alpha_m y_i} + B_{mi} e^{-\alpha_m y_i}), \qquad (i = 1, 2)$$

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b \tag{24}$$

Для определения четырех произвольных постоянных имеем два неиспользованных условия (13) и два условия сопряжения:

$$\text{при} \quad y = \eta \qquad w_1 = w_2, \qquad Q_{21}^* - Q_{22}^* = q(x) \tag{25}$$

Согласно второму условию (25) разность между величинами приведенных поперечных сил Q_2^* на первом и втором участках при $y=\eta$ равна заданной полосовой нагрузке.

Подстановка (24) в первое условие (13) дает

$$\sum_{m=1}^{\infty} F_m(x)\, \alpha_m (A_{m1} - B_{m1}) - c_5 \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x) (A_{m1} + B_{m1}) = 0 \tag{26}$$

где

$$F_m(x) = (c_1 + k_m^2 d_m) k_m^{-1} \sin k_m x + d_m c_2 \cos k_m x.$$

Далее функции $F_m(x)$ и $X_m(x)$ раскладываются в ряд Фурье по $\sin i\pi x/a$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. После преобразований (26) приводится к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$[a_{im}]\,\vec{A}_{m1} - [b_{im}]\,\vec{B}_{m1} = 0 \tag{27}$$

где

$$a_{im} = \gamma\alpha_2(i,\ m) - c_5\alpha_2(i,\ m), \qquad b_{im} = \gamma\alpha_1(i,\ m) + c_5\alpha_2(i,\ m)$$

$$\alpha_1(i,\ m) = -\frac{k_m d_m c_2\left[1-(-1)^i\cos k_m a\right]}{a\left[k_m^2-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]} + \frac{(-1)^i\left(c_1+d_m k_m^2\right)\sin k_m a}{a\left[k_m^2-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]}$$

$$\alpha_2(i,\ m) = \frac{a}{(i\pi)^2}\left\{\left[1-(-1)^i\right]f_1-(-1)^i f_2 a\right\} +$$

$$+\frac{(-1)^i f_4\cos k_m a - f_4 + (-1)^i f_3\sin k_m a}{a\left[k_m^2-\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\right]}$$

$$f_1 = 1 + d_m c_2 k_m^{-2}, \quad f_2 = c_1 k_m^{-2} + 2d_m, \quad f_3 = -\frac{c_1+k_m^2 d_m}{k_m^3}, \quad f_4 = d_m c_2 k_m^{-2}$$

$$\vec{A}_{m1} = \{A_{11},\ A_{21},\ A_{31}, \ldots\}, \qquad \vec{B}_{m1} = \{B_{11},\ B_{21},\ B_{31}, \ldots\}$$

Удовлетворяя второму условию (13), получаем

$$[c_{im}]\,\vec{A}_{m2} - [d_{im}]\,\vec{B}_{m2} = 0 \tag{28}$$

где

$$c_{im} = \left[\gamma\alpha_1(i,\ m) + c_7\alpha_2(i,\ m)\right]e^{\gamma k_m b}$$

$$d_{im} = \left[\gamma\alpha_1(i,\ m) - c_7\alpha_2(i,\ m)\right]e^{-\gamma k_m b}$$

После подстановки (24) в первое условие (25) имеем

$$(A_{m1} - A_{m2})\,e^{2\gamma k_m \gamma_1} + B_{m1} - B_{m2} = 0 \tag{29}$$

Наконец, используем второе условие (25), которое запишем с учетом (11)

$$4D_K\left(w_{1,\,xxy} - w_{2,\,xxy}\right) = q\,(x)$$

Вводя сюда (24) и раскладывая в ряд

$$q\,(x) = 4q_0\pi^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1}\sin i\pi\xi/a\,\sin\frac{i\pi u}{2a}\,\sin\frac{i\pi x}{a}$$

после преобразований получаем

$$[f_{im}]\,\Delta\vec{A}_m = \vec{q} \tag{30}$$

$$\Delta\vec{A}_m = \{A_{11}-A_{12},\ A_{21}-A_{22},\ A_{31}-A_{32}, \ldots\}$$

$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}, \qquad q_i = \frac{q_0}{\pi} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi\xi}{a} \sin \frac{i\pi u}{2a}$$

$$f_{im} = 4D_K \frac{i\pi}{a} \alpha_1(i, m) e^{\gamma k_m \eta}$$

Таким образом, решение задачи для случая полосовой нагрузки имеет вид рядов (24), коэффициенты которых определяются из системы уравнений (27)—(30). В случае сосредоточенной силы решение сохраняет свой вид при замене выражения для q_i на следующее:

$$q_i = \frac{P}{2a} \sin \frac{i\pi\xi}{a}, \qquad P = qu$$

Приведенное решение весьма громоздко, но легко программируется для расчетов на ЭВМ. При этом удается единым алгоритмом охватить многие частные задачи, что стало доступным благодаря разделению переменных в уравнении (14).

4. Для сравнительного анализа работы полубезмоментных пластин рассмотрим две частные задачи.

В случае шарнирного опирания граничные условия

$$w(0, y) = w(a, y) = w''(0, y) = w''(a, y) = 0$$

$$w(x, 0) = w(x, b) = 0$$

Полосовой нагрузке (фиг. 1б) соответствует решение (24), в котором

$$X_m = \sin k_m x, \qquad k_m = m\pi/a \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Выражения типа (24) для прогибов

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1} \left(e^{-\alpha_m y_1} - e^{\alpha_m y_1}\right) \sin k_m x \\ w_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1} \varphi(k_m, \eta) \left(e^{-\alpha_m y_2} - e^{\alpha_m (y_2 - 2b)}\right) \sin k_m x \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь

$$B_{m1} = \frac{q \sin k_m \xi \sin \dfrac{k_m u}{2}}{2D_K m\pi \beta(k_m, \eta)}, \qquad \varphi(k_m, \eta) = \frac{1 - e^{-2\alpha_m \eta}}{e^{-2\alpha_m b} - e^{-2\alpha_m \eta}}$$

$$\beta(k_m, \eta) = k_m^3 \gamma \left(1 - e^{2\alpha_m b}\right) e^{-\alpha_m \eta} \left(e^{-2\alpha_m b} - e^{-2\alpha_m \eta}\right)^{-1}$$

$$0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b$$

Введем в B_{m1} замены $u = d\xi$, $q = q(\xi, \eta)\, d\eta$ (вместо нагрузки q, распределенной на единичной ширине, введена нагрузка на ширине $d\eta$) и перейдем к пределу. Тогда получим функции влияния как прогиб от нагрузки $q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta$ вида (31) с коэффициентом

$$B_{m1} = [4D_K a\beta(k_m, \eta)]^{-1} q(\xi, \eta) \sin k_m \xi d\xi d\eta$$

Интегрированием в пределах размещения нагрузки можно получить решение при произвольном ее распределении.

При постоянной вдоль y треугольной нагрузке $q(\xi, \eta) = q\xi/a$ получаем

$$w = \frac{qa^4}{2D_K \pi^5 \gamma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^{m-1}]}{m^5 (1-e^{-2\alpha_m b})} [\operatorname{sh} \alpha_m y (e^{-\alpha_m y} - 2e^{-\alpha_m b} + e^{\alpha_m (y-2b)}) +$$

$$+ (\operatorname{ch} \alpha_m y - 1)(e^{-\alpha_m y} - e^{\alpha_m (y-2b)})] \sin k_m x \qquad (32)$$

Прогиб в центре квадратной пластинки $x = y = a/2$ с изотропным материалом полос $[2D_K = EI(1-\mu)^{-1}$ и $\mu = 0.3]$ при использовании лишь двух членов ряда (32) ($m = 1.3$) равен

$$w = (EI)^{-1} qa^4 (0.003140 - 0.000026 + \cdots) = (EI)^{-1} 0.00311 qa^4 \qquad (33)$$

Соответствующие формулы для обычной пластинки и балки имеют вид [4]

$$w = 0.00203 qa^4 D^{-1}, \qquad w = 0.00651 qa^4 (EI)^{-1} \qquad (34)$$

Из сравнения (33) и (34) видны эффекты понижения жесткости полубезмоментной пластины по сравнению с обычной и существенного увеличения жесткости при объединении отдельных полос в пластинчатую систему по полубезмоментной схеме. Последний ослабляется при увеличении b/a и, как показывают расчеты, при $b/a \approx 2.5 \div 3$ (для обычной пластины $b/a \approx 4.0$) результаты для отдельной полосы и полубезмоментной пластины практически совпадают.

Для пластины с одним защемленным, свободным противоположным и свободно опертыми двумя другими краями (фиг. 1в) граничные условия имеют вид

$$w_{,xx}(0, y) = w(a, y) = w_{,x}(a, y) = 0$$

$$D_1 w_{,xxx}(0, y) + 4D_k w_{,xyy}(0, y) = 0, \qquad w(x, 0) = w(x, b)$$

Прогиб определяется выражениями

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} F_{m2} s(\alpha_m, \eta) \operatorname{sh} \alpha_m y_1 \left(1 - \frac{\sin k_m x}{\sin k_m a}\right)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} F_{m2} (\operatorname{sh} \alpha_m y_2 - \operatorname{th} \alpha_m b \operatorname{ch} \alpha_m y_2) \left(1 - \frac{\sin k_m x}{\sin k_m a}\right)$$

$$F_{m2} = \frac{q \sin k_m \xi \sin \dfrac{k_m u}{2} \sin k_m a}{m\pi D_k k_m^2 \alpha_m [s(\alpha_m, \eta) \operatorname{ch} \alpha_m \eta - t(\alpha_m, \eta)]}$$

$$s(\alpha_m, \eta) = 1 - \operatorname{cth} \alpha_m \eta \operatorname{th} \alpha_m b$$

$$t(\alpha_m, \eta) = \operatorname{ch} \alpha_m \eta - \operatorname{th} \alpha_m b \operatorname{sh} \alpha_m \eta$$

$$\alpha_m = \gamma k_m, \qquad k_m = \frac{m\pi}{2a}, \qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant \eta, \qquad \eta \leqslant y_2 \leqslant b$$

В частности, для нагрузки $q(\xi, \eta) = q\xi/a$ определяем

$$w = \frac{16qa^4}{\gamma^2\pi^6 D_k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi/2}{m^6} \left(\operatorname{sh} \alpha_m y \operatorname{th} \frac{\alpha_m b}{2} - \right.$$

$$\left. - 2\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_m y}{2} \right) \left(\sin k_m a - \sin k_m x \right)$$

Прогиб, например, середины свободного края, определенный по последней формуле, составляет $0.0116qa^4 (EI)^{-1}$.

В заключение отметим, что полубезмоментная пластина представляет собой подходящую механическую модель комбинированных систем из нежестко соединенных полос или балок, а также пластин с сильной ортотропией. Соотношения для полубезмоментных пластин допускают их точное решение при произвольных нагрузках и произвольных однородных граничных условиях. Эти соотношения легко обобщаются на случай оболочек [2] для расчета подпорных стенок волнового очертания, больверков и других оболочечных конструкций в виде набора отдельных полос, соединенных в шпунт.

Казанский инженерно-строительный
институт

Поступила 16 XII 1971

Ռ. Ե. ՀԵՅԶԵՆ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ԿԻՍԱԱՆՄՈՄԵՆՏ ՍԱԼԵՐ ԵՎ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐ: ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Միջին մակերևույթի վրա հոդակապերով միացված բավական մեծ թվով շերտերի, հեծանների կամ օղակների հավաքված տեսքով կոմբինացված սիստեմների հաշվման համար առաջարկվել է կոնստրուկտիվ կիսաանմոմենտ սալերի և թաղանթների մեխանիկական մոդել։ Լուծվել է կոնստրուկտիվ կիսաանմոմենտ սալի ճկվածքների ազդեցության ֆունկցիայի մասին խնդիրը կամայական, համասեռ եզրային պայմանների դեպքում։ Երկու մասնակի խնդիրներում և թվային հաշվումներում ցույց է տրված կոշտության էապես մեծացման էֆեկտը, երբ առանձին շերտերը միացված են սալային սիստեմով կիսաանմոմենտ սխեմայով։

CONSTRUCTIONALLY SEMIMOMENTLESS PLATES AND SHELLS. THE PROBLEM IN PLATE BENDING

R. E. HEIZEN

Summary

A mechanical-model of constructionally semimomentless plates and shells is suggested for calculating combined systems having a number of strips, beams or rings connected at the median surface. The problem in bending effect for a constructionally semimomentless plate under arbitrary uniform boundary conditions is solved. The effect of essential increase in rigidity due to connection of separate strips into a plate system according to the semimomentless scheme is shown in two particular calculations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. ГИТТЛ. М., 1953.
2. *Гейзен Р. Е., Тимофеева Л. М.* О пространственном расчете шпунтовых стенок. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1972.
3. *Гейзен Р. Е., Тимофеева Л. М.* Расчет шпунтовых конструкций как пластин и оболочек с продольными шарнирами. Тр. III Всесоюзной конференции по статике и динамике пространственых конструкций. Киев, «Будівельник», 1972.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. «Наука», М., 1966.
5. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Асимптотический анализ уравнений теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. Сб. Теория пластин и оболочек, «Наука», М., 1971.