

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, В. К. ОПАНАСОВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ  
 ПЛОСКОСТИ СО ЩЕЛЬЮ ПРИ СЖАТИИ

Задача о сжатии однородной изотропной плоскости с прямолинейной щелью с учетом ее ширины и соприкасания берегов при заданном однородном напряженном состоянии на бесконечности была впервые поставлена и изучена В. И. Моссаковским и П. А. Загубиженко [1, 2].

Случай произвольного напряженного состояния на бесконечности при постоянной ширине щели рассматривался в публикациях [3, 4].

В настоящей работе решена задача о распределении упругих напряжений в кусочно-однородной изотропной пластинке со щелью переменной ширины на прямой линии раздела материалов при условии, что берега щели после деформирования пластинки заданным внешним напряженным состоянием приходят в гладкий контакт. Определены все основные характеристики задачи, необходимые для определения напряженно-деформированного состояния в кусочно-однородной плоскости.

1. Рассмотрим плоскость, состоящую из двух спаянных между собой изотропных полуплоскостей. Предположим, что линия раздела материалов ослаблена прямолинейной щелью переменной ширины  $h$ , соизмеримой с упругими смещениями. Поместим начало декартовой системы координат  $xOy$  в центре щели, длиной  $2a$ , с осью  $Ox$ , направленной вдоль щели. Все характеристики, относящиеся к верхней полуплоскости ( $y > 0$ ) будем снабжать индексом «1», к нижней — индексом «2».

Пусть на бесконечности плоскость сжимается равномерно распределенными напряжениями интенсивности  $q$ , перпендикулярными линии расположения щели, и растягивается равномерно распределенными напряжениями  $p_j$ , параллельными линии щели. Кроме того, в точках  $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn_j}$  действуют сосредоточенные силы  $P'_{j1}, P'_{j2}, \dots, P'_{jn_j}$ , а в точках  $b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm_j}$  — сосредоточенные моменты  $M'_{j1}, M'_{j2}, \dots, M'_{jm_j}$  ( $j = 1, 2$ ).

Предположим, что деформированный контур щели состоит из трех участков: двух свободных по краям и одного среднего участка контакта. Силы трения между берегами щели не учитываются (фиг. 1).

Требуется определить напряженное состояние кусочно-однородной плоскости, в частности, компоненты тензора напряжений вдоль линии раздела материалов и длину участка контакта.

Обозначим линию спая через  $L''$ , свободные края щели через  $L'$ , а длину участка контакта ( $a_1, a_2$ ) через  $L$ .

Имеем следующие условия на линии раздела материалов

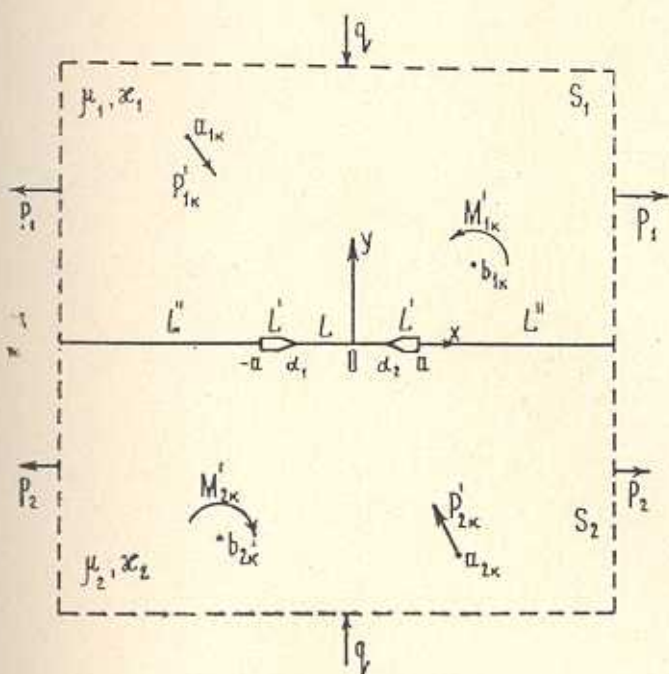
$$(Y_y - iX_y)^+ = (Y_y - iX_y)^-, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- \quad (1.1)$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0 \quad \begin{array}{l} \text{на } L'' \\ \text{на } L' \end{array} \quad (1.2)$$

$$Y_y^+ = Y_y^-, \quad X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^- = -f_1(x) + f_2(x) = f'(x) \quad \text{на } L \quad (1.3)$$

Индексами плюс и минус обозначены граничные значения функций на действительной оси сверху, то есть из  $S_1$ , и снизу, то есть из  $S_2$ , соответственно.  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — уравнения верхнего и соответственно нижнего берега щели в недеформированном состоянии.



Фиг. 1.

Введем функции напряжений  $\Phi_j(z)$  и  $\bar{\Psi}_j(z)$  для полуплоскостей  $S_j$  ( $j=1, 2$ ). Распространив определение функции  $\Phi_1(z)$  на область  $S_2$ , а функции  $\Phi_2(z)$  на область  $S_1$  известным образом [5]

$$\Phi_j(z) = -\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}_j(z) - \bar{\Psi}_j(z) \quad (1.4)$$

получим формулы для определения напряженно-деформированного состояния каждой полуплоскости через одну функцию  $\Phi_j(z)$  ( $j=1, 2$ )

$$X_x + Y_y = 2[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}]$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_j(z)} \quad (1.5)$$

$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x} (u + iv) = \alpha_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_j(z)} \quad (j = 1, 2)$$

По условию задачи напряженное состояние на бесконечности задано в виде

$$Y_y^{(\infty)} = -q, \quad X_x^{(\infty)} = 0 \quad \text{для } S_1 \text{ и } S_2 \quad (1.6)$$

$$X_x^{(\infty)} = \begin{cases} p_1 & \text{для } S_1 \\ p_2 & \text{для } S_2 \end{cases}$$

Функции напряжений  $\Phi_j(z)$  и  $\Psi_j(z)$  в окрестности точек  $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn_j}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm_j}$  имеют вид

$$\Phi_j(z) = - \sum_{k=1}^{n_j} \frac{P_{jk}}{z - a_{jk}} + \Phi_{0j}(z) \quad (1.7)$$

$$\Psi_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{\alpha_j \bar{P}_{jk}}{z - a_{jk}} - \frac{\bar{a}_{jk} P_{jk}}{(z - a_{jk})^2} \right] - i \sum_{k=1}^{m_j} \frac{M_{jk}}{(z - b_{jk})^2} + \Psi_{0j}(z)$$

где  $\Phi_{0j}(z)$  и  $\Psi_{0j}(z)$  — голоморфные функции в окрестности этих точек, а

$$P_{jk} = \frac{X_{jk} + iY_{jk}}{2\pi(1 + \alpha_j)}, \quad M_{jk} = \frac{M'_{jk}}{2\pi} \quad (1.8)$$

Здесь  $X_{jk}$  и  $Y_{jk}$  — компоненты вектора сосредоточенной силы  $P'_{jk}$ .

Исходя из соотношений (1.5) и удовлетворив условиям (1.1), учитывая при этом (1.6), (1.7) и (1.4), будем иметь

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} A_1^{-1} [B_{02} \theta(z) + \Phi_0(z)] & \text{в } S_1 \\ A_2^{-1} [A_{02} \theta(z) - \Phi_0(z)] & \text{в } S_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} A_1^{-1} [A_{01} \theta(z) - \Phi_0(z)] & \text{в } S_1 \\ A_2^{-1} [B_{01} \theta(z) + \Phi_0(z)] & \text{в } S_2 \end{cases}$$

В предыдущих формулах введены обозначения

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} A_{01} \Phi_1(z) - B_{02} \Phi_2(z) & \text{в } S_1 \\ A_{02} \Phi_2(z) - B_{01} \Phi_1(z) & \text{в } S_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\theta(z) = B + \theta_1(z) \quad (1.11)$$

$$\theta_1(z) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \left[ - \frac{P_{jk}}{z - a_{jk}} - \frac{\alpha_j P_{jk}}{z - \bar{a}_{jk}} + \frac{(a_{jk} - \bar{a}_{jk}) \bar{P}_{jk}}{(z - \bar{a}_{jk})^2} \right] - i \sum_{k=1}^{m_j} \frac{M_{jk}}{(z - b_{jk})^2} \right\} \quad (1.12)$$



$$B = \frac{1}{4} (p_1 + p_2 + 2q) \quad (1.13)$$

$$A_{0j} = C_j g^{2-j}, \quad B_{0j} = -C_j g^{j-1}, \quad C_j = \frac{(-1)^j \lambda_j (1 + x_j)}{1 - g} \quad (1.14)$$

$$\lambda_j = \nu_{3-j}, \quad A_j = \nu_j + \lambda_j x_j, \quad g = -A_1 A_2^{-1}$$

Кроме того, между напряжениями на бесконечности пластинки и ее упругими константами выполняется соотношение

$$\nu_1 (1 + x_2) p_2 - \nu_2 (1 + x_1) p_1 = [3(\nu_2 - \nu_1) + \nu_1 x_2 - \nu_2 x_1] q \quad (1.15)$$

являющееся условием разрешимости задачи.

Функцию  $\Phi_0(z)$  можно представить в виде

$$\Phi_0(z) = K_1 + F(z) + \Phi(z) \quad (1.16)$$

где  $\Phi(z)$  — кусочно-голоморфная функция, стремящаяся к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , а

$$F(z) = \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{Q_{jk}}{z - a_{jk}} + \frac{L_{jk}}{z - \bar{a}_{jk}} + \frac{F_{jk}}{(z - \bar{a}_{jk})^2} \right] + \sum_{p=1}^{m_j} \frac{\Pi_{jp}}{(z - \bar{b}_{jp})^2} \right\} \quad (1.17)$$

$$K_1 = \begin{cases} \frac{1}{4} [A_{01} p_1 - B_{02} p_2 - (3B_{02} + A_{01}) q] & \text{в } S_1 \\ \frac{1}{4} [A_{02} p_2 - B_{01} p_1 - (3B_{01} + A_{02}) q] & \text{в } S_2 \end{cases} \quad (1.18)$$

В формулах (1.17) введены обозначения

$$Q_{jk} = -A_{0j} P_{jk}, \quad L_{jk} = x_j B_{0j} P_{jk}, \quad F_{jk} = -B_{0j} (a_{jk} - \bar{a}_{jk}) \bar{P}_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, n_j) \quad (1.19)$$

$$\Pi_{jp} = i B_{0j} M_{jp} \quad (p = 1, 2, \dots, m_j; \quad j = 1, 2)$$

Удовлетворив условиям (1.2) и (1.3), получим граничную задачу сопряжения для определения функции  $\Phi_0(z)$

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(x) - g \Phi_0^-(x) &= 0 & (x \in L') \\ \Phi_0^+(x) - \overline{\Phi_0^+(x)} &= i g \omega(x) & (x \in L) \\ \Phi_0^-(x) - \overline{\Phi_0^-(x)} &= i \omega(x) & (x \in L) \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\omega(x) = -4\nu_1\nu_2(1-g)^{-1}f(x) \quad (1.21)$$

Частное решение однородной задачи сопряжения (1.20) есть функция

$$R(z) = \frac{\psi(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} f^{(\varepsilon)} \quad (1.22)$$

где

$$\rho(z) = \psi(z) \ln |g| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{\psi^+(t)(t-z)}, \quad \psi(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)}$$

которая будет ограниченной в точках  $a_1$  и  $a_2$ .

Как видно из (1.16), функция  $\Phi_0(z)$  ограничена на бесконечности и имеет полюсы в некоторых точках, и, кроме того, из физических соображений она должна быть ограниченной в точках  $a_1, a_2$ . Учитывая это, решение задачи (1.20) будем искать в виде

$$\Phi_0(z) = [\varphi_1(z) + \varphi_0(z)] R(z) \quad (1.23)$$

где  $\varphi_0(z)$  — рациональная функция, имеющая полюсы в точках  $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn_j}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm_j}$ , причем разложение функции  $\varphi_0(z)R(z)$  в окрестности этих точек имеет вид (1.17), а  $\varphi_1(z)$  — кусочно-голоморфная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$[\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1(x)]^+ + [\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1(x)]^- = \omega_1(x) + 2\omega_2(x) \quad (x \in L) \quad (1.24)$$

$$[\varphi_1(x) + \bar{\varphi}_1(x)]^+ - [\varphi_1(x) + \bar{\varphi}_1(x)]^- = \omega_2(x) \quad (x \in L)$$

где

$$\omega_2(x) = \bar{\varphi}_0(x) - \varphi_0(x), \quad \omega_j(x) = \frac{i\omega(x)[gR^-(x) + (-1)^{j+1}R^+(x)]}{R^+(x)R^-(x)} \quad (j=1, 2)$$

Решая задачи (1.24) и принимая во внимание соотношение (1.23), получим значение для функции  $\Phi_0(z)$

$$2\Phi_0(z) = R(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_2(t) dt}{t-z} + \frac{1}{\psi(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi^+(t) \omega_1(t) dt}{t-z} + \varphi_2(z) + 2C_0 + \frac{1}{\psi(z)} [2i(D_0 + D_1 z) - \varphi_3(z) - \varphi_4(z)] \right\} \quad (1.25)$$

где

$$R(z) = \frac{\psi(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} [A(z)]^{(3)} \quad (1.26)$$

$$A_3(z) = \frac{v(z) + c}{v(z) - c} \frac{1 - dv(z)}{1 + dv(z)}, \quad v(z) = \sqrt{\frac{z-a_2}{z-a_1}}$$

$$c = \sqrt{\frac{a-a_2}{a-a_1}}, \quad d = \sqrt{\frac{a+a_1}{a+a_2}}, \quad \beta = \frac{\ln |g|}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{E_{jke}}{(z-a_{jk})^e} + \frac{\bar{E}_{jke}}{(z-a_{jk})^e} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{m_j} \left[ \frac{H_{jke}}{(z-\bar{b}_{jk})^e} + \frac{\bar{H}_{jke}}{(z-b_{jk})^e} \right] \right\} \\ \bar{\varphi}_2(z) &= \sum_{s=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{n_j} \left[ \frac{\bar{A}_{jke}}{(z-a_{jk})^e} - \frac{A_{jke}}{(z-\bar{a}_{jk})^e} \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m_j} \left[ \frac{B_{jke}}{(z-\bar{b}_{jk})^e} - \frac{\bar{B}_{jke}}{(z-b_{jk})^e} \right] \\ \varphi_2(z) &= -2i \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_j} (\Gamma_{jk2} + \Gamma_{jk1}) + \sum_{k=1}^{m_j} H_{jk1} \right] \right\} \quad (1.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk1} &= Q_{jk} F_1(\bar{a}_{jk}), \quad \Gamma_{jk2} = L_{jk} F_1(a_{jk}) - F_{jk} F_2(a_{jk}) \\ \bar{\Gamma}_{jk1} &= \Gamma_{jk2} + \bar{\Gamma}_{jk1}, \quad E_{jk2} = F_{jk} F_1(a_{jk}) \\ A_{jk1} &= (\Gamma_{jk2} - \bar{\Gamma}_{jk1}) \psi(\bar{a}_{jk}) + E_{jk2} \psi'(\bar{a}_{jk}) \\ A_{jk2} &= E_{jk2} \psi(\bar{a}_{jk}) \quad (k=1, 2, \dots, n_j) \\ H_{jk1} &= -\Pi_{jk} F_2(b_{jk}), \quad H_{jk2} = \Pi_{jk} F_1(b_{jk}) \\ B_{jk1} &= -H_{jk1} \psi(\bar{b}_{jk}) - H_{jk2} \psi'(\bar{b}_{jk}), \quad B_{jk2} = -H_{jk2} \psi(\bar{b}_{jk}) \\ &\quad (k=1, 2, \dots, m_j; j=1, 2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$F_1(z) = [R(\bar{z})]^{-1}, \quad F_2(z) = \frac{R'(\bar{z})}{[R(\bar{z})]^2} \quad (1.29)$$

Неизвестные коэффициенты  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $D_1$ , входящие в выражение функции  $\Phi_0(z)$ , найдем из однозначности смещений и условия на бесконечности (1.16) с учетом (1.15). Опуская выкладки, запишем окончательный результат

$$C_0 = B_2 \cos \nu, \quad D_1 = -B_2 \sin \nu \quad (1.30)$$

$$D_0 = H_1 \sin \nu - (H_2 + \beta k_2 B_2) \cos \nu - E_2$$

$$(H_1 - B_2 k_2) \cos \nu + (H_2 + B_2 \beta k_2) \sin \nu + B_1 + E_1 = 0 \quad (1.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{1}{4\pi l} \int_l \omega_2(t) dt, & B_2 &= -\frac{A_1}{1-g} q \\
 k_1 &= \left( \frac{\sqrt{a-x_1} + \sqrt{a-x_2}}{\sqrt{a+x_1} + \sqrt{a+x_2}} \right)^2 \\
 k_2 &= \sqrt{(a+x_1)(a+x_2)} + \sqrt{(a-x_1)(a-x_2)} \\
 k_3 &= \frac{x_1+x_2}{2}, & v &= \beta \ln k_1 \\
 E_1 + iE_2 &= \sum_{j=1}^2 \left[ \sum_{k=1}^{n_j} (\Gamma_{jk1} + \Gamma_{jk2}) + \sum_{k=1}^{m_j} H_{jk1} \right] \\
 H_1 + iH_2 &= \frac{A}{2\pi(1-g)} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{n_j} (X_{jk} + iY_{jk}) \\
 A &= \mu_1 \mu_2 (1-x_1 x_2) A_2^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Соотношение (1.31) совместно с условием

$$\int_{-a}^{a_1} \operatorname{Im} [\Phi_0^+(t)] dt = \frac{2\mu_1 \mu_2 g f(x_1)}{g-1} \tag{1.33}$$

служат для определения длины участка контакта между берегами щели.

Имея выражение для функции  $\Phi_0(z)$  и зная длину участка контакта, задачу можно считать в принципе решенной.

Компоненты тензора напряжений вдоль действительной оси определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 Y_y^+ &= Y_y^- = A_1^{-1} \operatorname{Re} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)] \\
 X_y^+ &= X_y^- = -A_1^{-1} \operatorname{Im} [\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x)]
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
 X_x^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} [3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x) + 4B_{02} \theta_1(x)] + p_1 + \frac{3+g}{1-g} q \\
 X_x^- &= -A_1^{-1} \operatorname{Re} [\Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x) + 4gB_{01} \theta_1(x)] + p_2 - \frac{1+3g}{1-g} q
 \end{aligned}$$

При этом существует следующая зависимость:

$$X_x^+ + X_x^- - 2Y_y^+ = p_1 + p_2 + 2q + 4\theta_2(x), \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{1.35}$$

где

$$\theta_2(x) = \operatorname{Re} [\theta_1(x)]$$



Соотношение (1.35) сохраняет силу независимо от ширины щели и длины участка контакта.

2. Рассмотрим важный случай рассмотренной задачи. Предположим, что пластинка, ослабленная трещиной постоянной ширины, находится под действием сосредоточенной силы  $-Y_1$  с точкой приложения  $ib_1$  в верхней полуплоскости и сосредоточенной силы  $Y_2$  с точкой приложения  $-ib_2$  в нижней полуплоскости.

Согласно условию задачи имеем

$$a_{j1} = i(-1)^{j+1} b_j, \quad p_{j1} = \frac{i(-1)^j Y_j}{2\pi(1+\alpha_j)}, \quad f'(x) = 0 \quad (j=1, 2) \quad (2.1)$$

Из физических соображений следует, что в данном случае длина участка контакта будет симметричной относительно оси ординат, то есть

$$\alpha_1 = -\alpha, \quad \alpha_2 = \alpha \quad (2.2)$$

Условие (1.31) при этом автоматически выполняется.

Если учесть (2.1) и (2.2), то формула (1.25) примет вид

$$\Phi_0(z) = \left[ \varphi_0(z) - \frac{i\varphi_5(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] R(z) \quad (2.3)$$

$$R(z) = \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{z^2 - a^2} \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} + ak_0}{\sqrt{z^2 - a^2} - ak_0} \right)^{i\beta}} \quad (2.4)$$

$$\varphi_0(z) = \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{i(-1)^j b_j E_{j11}}{z^2 + b_j^2} + \frac{E_{j12}(z^2 - b_j^2)}{(z^2 + b_j^2)^2} \right] \quad (2.5)$$

$$\varphi_5(z) = i \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{i(-1)^j b_j A_{j11}}{z^2 + b_j^2} + \frac{A_{j12}(z^2 - b_j^2)}{(z^2 + b_j^2)^2} \right] + H_2$$

$$H_2 = \frac{A(Y_2 - Y_1)}{2\pi(1-g)}, \quad k_0 = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{a}$$

$$E_{j11} = iT_j \{ \Pi_j^{2j-3} g^{2-j} - \Pi_j^{3-2j} g^{j-1} [\alpha_j - (-1)^j W_j b_j] \} \quad (2.6)$$

$$E_{j12} = 2(-1)^{j+1} T_j b_j g^{j-1} \Pi_j^{3-2j}$$

$$A_{j11} = (-1)^{j+1} T_j \left\{ g^{j-1} \Pi_j^{3-2j} \left[ d_j ((-1)^j W_j b_j - \alpha_j) + \frac{2b_j^2}{d_j} \right] - d_j g^{2-j} \Pi_j^{2j-3} \right\}$$

$$A_{j12} = -2iT_j b_j d_j g^{j-1} \Pi_j^{3-2j} \quad (j=1, 2)$$

В соотношениях (2.6) введены обозначения



$$T_j = \frac{\lambda_j Y_j c_j}{2\pi(1-g)d_j}, \quad d_j = \sqrt{b_j^2 + a^2}, \quad c_j = \sqrt{b_j^2 + a^2}$$

$$\Pi_j = e^{-\beta(2\varphi_j - \pi)}, \quad \varphi_j = \operatorname{arctg} \frac{d_j}{ak_0} \quad (2.7)$$

$$W_j = \frac{2b_j ak_0 [2\beta d_j + (-1)^{j+1} ak_0]}{d_j^2 c_j^2} \quad (j = 1, 2)$$

Неизвестный параметр  $\alpha$  определим из формулы (1.33), которая для нашего случая принимает вид

$$\frac{2\nu_1 \nu_2 h e^{\pi^2}}{(g-1)a} = k_0 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} u [\varphi_5(u) \sin(2\beta u) + ak_0 \varphi_6(u) \operatorname{th} u \cos(2\beta u)] du}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 u + a^2}} \quad (2.8)$$

Выражение для функций  $\varphi_5(u)$  и  $\varphi_6(u)$ , вошедшие в (2.8), получим из (2.5) с помощью замены

$$z = a^2 k_0^2 \operatorname{th}^2 u + a^2$$

Имея функцию  $\Phi_0(z)$ , можно определить компоненты напряженного состояния на участке спая и вдоль щели по формулам

$$|x| > a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = A_2 \{ \varphi_6(x) t_1(x) \cos[\beta\gamma_2(x)] - \varphi_5(x) t_1(x) \sin[\beta\gamma_2(x)] \}$$

$$X_y^+ = X_y^- = A_3 \operatorname{sign} x \{ \varphi_5(x) t_7(x) \cos[\beta\gamma_2(x)] + \varphi_6(x) t_1(x) \sin[\beta\gamma_2(x)] \}$$

$$X_x^+ = \frac{3+g}{1-g} Y_y^+ + A_4 \theta_2(x), \quad X_x^- = \frac{1+3g}{1-g} Y_y^+ - A_5 \theta_2(x)$$

$$a < |x| < a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$X_x^+ = 4A_6 \{ \varphi_6(x) t_3(x) \sin[\beta\gamma_3(x)] - \varphi_5(x) t_6(x) \cos[\beta\gamma_3(x)] \} + A_4 \theta_2(x)$$

$$X_x^- = -X_x^+ + 4\theta_2(x)$$

$$|x| < a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = 2A_6 \{ \varphi_6(x) t_5(x) \operatorname{ch}[2\beta\gamma_1(x)] + \varphi_5(x) t_6(x) \operatorname{sh}[2\beta\gamma_1(x)] \} \quad (2.9)$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0$$

$$X_x^+ = A_6 \{ 3 [ \varphi_6(x) t_5(x) - \varphi_5(x) t_6(x) ] e^{-2\beta\gamma_1(x)} - [ \varphi_6(x) t_5(x) + \varphi_5(x) t_6(x) ] e^{2\beta\gamma_1(x)} \} + A_4 \theta_2(x)$$

$$X_x^- = 2Y_y^+ - X_x^+ + 4\theta_2(x)$$

В предыдущих формулах введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{ak_0}, & \gamma_2(x) &= \ln \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - ak_0}{\sqrt{x^2 - a^2} + ak_0} \\ \gamma_3(x) &= \ln \frac{ak_0 + \sqrt{x^2 - a^2}}{ak_0 - \sqrt{x^2 - a^2}}, & t_1(x) &= \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}, & t_2(x) &= \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2 - x^2}} \\ t_3(x) &= \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2}}, & t_6(x) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & t_7(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$b_2(x) = - \sum_{j=1}^2 \frac{Y_j b_j}{2\pi(1+x_j)} \left[ \frac{1-x_j}{x^2 + b_j^2} + \frac{2(x^2 - b_j^2)}{(x^2 + b_j^2)^2} \right]$$

$$A_2 = (1-g)A_1^{-1}, \quad A_4 = 4B_{02}A_1^{-1}, \quad A_5 = 4gB_{01}A_1^{-1}, \quad A_6 = e^{\pi\beta}A_1^{-1}.$$

Положив в (2.3)–(2.8)  $\alpha=0$ , получим уравнение для определения соотношения между сжимающими силами, при котором начинается закрываться контакт

$$\frac{2\mu_1 \nu_2 h e^{-\pi\beta}}{g-1} = \int_0^{\pi} \frac{[\varphi_6(u) \sin(2\beta u) + a\varphi_5(u) \operatorname{th} u \cos(2\beta u)] du}{\operatorname{ch} u} \quad (2.11)$$

и выражение для функции напряжений

$$\Phi_0(z) = [z\varphi_6(z) - i\varphi_5(z)] \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{\beta} \quad (2.12)$$

Рассмотрим частные случаи:

1) математическая щель, то есть  $h=0$ ,  $\alpha=a$ . В этом случае функция напряжений  $\Phi_0(z)$  определится формулой

$$\Phi_0(z) = \varphi_6(z) - \frac{i\varphi_5(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2.13)$$

выражения для функций  $\varphi_6(z)$  и  $\varphi_5(z)$  остаются без изменений, только входящие в них коэффициенты имеют более простой вид

$$\begin{aligned} E_{j1} &= iT_j(g^{2j} - g^{j-1}x_j) \\ E_{j2} &= 2(-1)^{j-1}T_j b_j g^{j-1} \\ A_{j1} &= (-1)^{j+1} \left[ T_j g^{j-1} \left( \frac{2b_j^2}{d_j} - x_j d_j \right) - d_j g^{2j} \right] \\ A_{j2} &= -2iT_j b_j d_j g^{j-1} \\ T_j &= \frac{Y_j b_j}{2\pi(1-g)}, & d_j &= \sqrt{b_j^2 + a^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Формулы для компонент напряжений в этом случае примут вид

$$|x| > a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = A_3 \varphi_6(x), \quad X_y^+ = X_y^- = A_3 \operatorname{sign} x \varphi_5(x) t_1(x)$$

$$X_x^+ = (3 + g) A_1^{-1} \varphi_6(x) + A_4 \theta_2(x), \quad X_x^- = -(1 + 3g) A_1^{-1} \varphi_6(x) - A_5 \theta_2(x)$$

$$|x| < a$$

$$Y_y^+ = Y_y^- = A_3 \varphi_6(x) - (1 + g) A_1^{-1} \varphi_5(x) t_6(x), \quad X_y^+ = X_y^- = 0 \quad (2.15)$$

$$X_x^+ = A_1^{-1} [(3 + g) \varphi_6(x) + (g - 3) \varphi_5(x) t_6(x)] + A_4 \theta_2(x)$$

$$X_x^- = -A_1^{-1} [(1 + 3g) \varphi_6(x) + (3g - 1) \varphi_5(x) t_6(x)] - A_5 \theta_2(x)$$

2) Однородная плоскость. Предположим, что  $Y_1 = Y_2 = Y$  и  $b_1 = b_2 = b$ . В этом случае функция  $\Phi_0(z)$  определяется формулой

$$\Phi_0(z) = \varphi_6(z) \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{z^2 - a^2}} \quad (2.16)$$

а уравнения для определения параметра контакта и критической нагрузки примут вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2 + 1}} \left[ B_5 F\left(k_0, \frac{\pi}{2}\right) + B_6 \Pi\left(n, k_0, \frac{\pi}{2}\right) + B_7 \Pi\left(m, k_0, \frac{\pi}{2}\right) \right] = -\frac{\mu h \pi}{Y \lambda_3 \sqrt{\lambda_3^2 + 1}} \quad (2.17)$$

$$\frac{1+x}{4} \ln \frac{\sqrt{\lambda_3^2 + 1} + 1}{\sqrt{\lambda_3^2 + 1} - 1} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3^2 + 1}} = \frac{\mu h \pi}{Y^2} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_6(z) &= \frac{B_3}{z^2 + b^2} + \frac{B_4(z^2 - b^2)}{(z^2 + b^2)^2} \\ B_3 &= -\frac{\mu b Y c}{2\pi d} \left( 1 + x + \frac{2b^2 a^2 k_0^2}{d^2 c^2} \right), \quad B_4 = \frac{b_1 Y c}{\pi d} \\ c &= \sqrt{b^2 + a^2}, \quad d = \sqrt{b^2 + x^2}, \quad \lambda_3 = \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$B_5 = \frac{1}{2} (1 - x) - \frac{\lambda_3^2}{\lambda_3^2 + 1}, \quad B_6 = \frac{1}{2} (1 + x) \frac{\lambda_3^2 + \lambda_3^2}{1 + \lambda_3^2}$$

$$B_7 = -\frac{\lambda_3^2}{1 + \lambda_3^2}, \quad n = \frac{\lambda_3^2 - 1}{1 + \lambda_3^2}, \quad m = \lambda_3^2 - 1$$

$F$  и  $\Pi$  — символы эллиптических интегралов первого и третьего рода.

На основании (2.9), распределение напряжений вдоль действительной оси определяется по формулам



$$Y_y^+ = Y_y^- = \begin{cases} 2A_1^{-1} \varphi_6(x) t_1(x) & |x| > a \\ 0 & a < |x| < a \\ 2A_1^{-1} \varphi_6(x) t_3(x) & |x| < a \end{cases} \quad (2.20)$$

$$X_y^+ = X_y^- = 0, \quad X_x^+ = X_x^- = Y_y^+ + 2\theta_2(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

где

$$\theta_2(x) = -\frac{Yb}{\pi(1+\nu)} \left[ \frac{1-\nu}{x^2+b^2} + \frac{2(x^2-b^2)}{(x^2+b^2)^2} \right]$$

В случае математической щели формулы (2.20) примут вид:

$$Y_y = \frac{bY}{\pi(1+\nu)} \left[ \frac{1-\nu}{x^2+b^2} - \frac{4b^2}{(x^2+b^2)^2} \right], \quad X_y = 0, \quad X_x = Y_y + 2\theta_2(x) \quad (2.21)$$

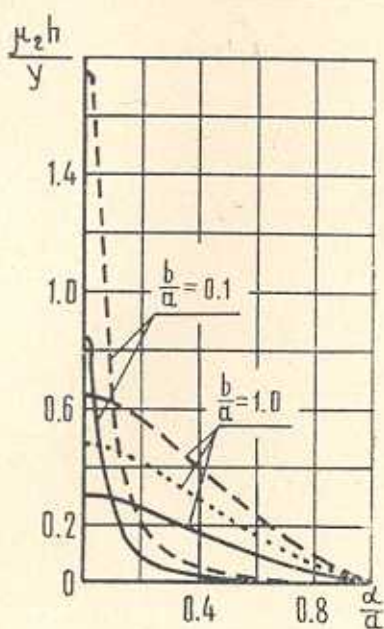
Анализируя выражения для компонент напряжений на линии сая (2.9) и (2.15) видим, что в случае физической щели они имеют колебательный характер и неограниченно возрастают при подходе к концам щели, в то время как для математической щели колебательного характера напряжений не наблюдается, напряжение  $Y_y^+$  ограничено на концах щели, а  $X_y^+$  — неограниченно. Таким образом, наличие физической щели на линии раздела материалов влияет на характер распределения напряжений вдоль линии сая.

Математическая щель в однородной плоскости в условиях сжатия не оказывает влияния на распределение напряжений.

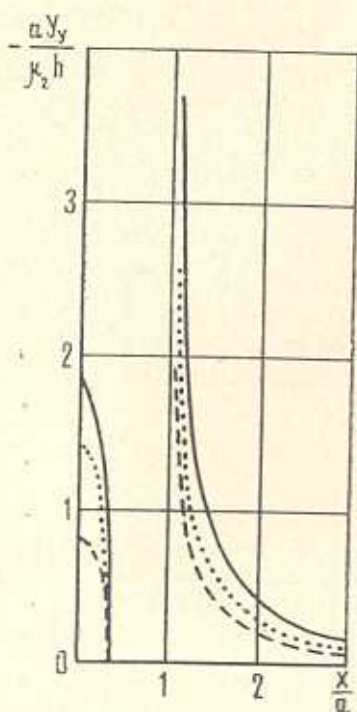
Численный анализ рассмотренной во втором параграфе задачи при условии, что  $b_1=b_2=b$  и  $Y_1=Y_2=Y$  был проведен на ЭВМ «Минск-22». Результаты вычислений приводятся на фиг. 2—4. Пунктирные линии соответствуют значениям параметров  $\mu_1=\mu_2$  и  $\nu_1=\nu_2=2$ ; точечные линии — значениям  $\mu_1=2\mu_2$ ,  $\nu_1=2$ ,  $\nu_2=1,9$ ; сплошные линии построены при значениях параметров:  $\nu_1=3$ ,  $\nu_2=2$ ,  $\frac{\mu_2}{\mu_1}=0$ . На фиг. 2 дается зависи-

мость величины  $\frac{\nu_2 h}{Y}$  от отношения  $\frac{x}{a}$  при разных значениях  $\frac{b}{a}$ . Графики на фиг. 3—4 построены при значении отношения  $\frac{b}{a}=1$ . Рас-

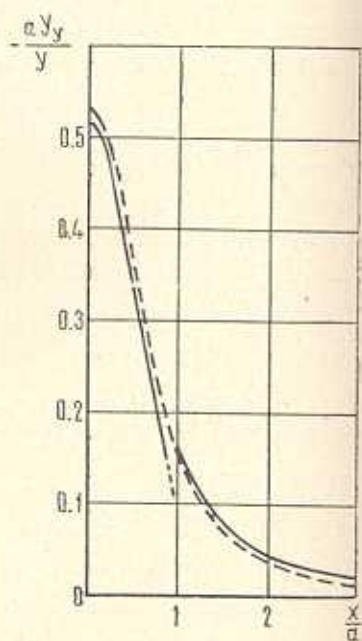
пределение контактных напряжений  $Y_y$  в зависимости от безразмерного параметра  $\frac{x}{a}$  при условии, что отношение длины площадки контакта к длине щели равно 0,4, приводится на фиг. 3. На фиг. 4 дается распределение тех же напряжений для математической щели. Вычисления показали, что в этом случае напряжение  $Y_y$  при подходе к концам щели с внутренней стороны является неограниченно положительным, причем точка, где  $Y_y$  меняет знак, лежит в малой окрестности конца щели.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для математической щели в однородной плоскости напряжение  $Y_T$  является ограниченным и знака не меняет.

Գ. Վ. ԳՐԻԼԻՏԿԻ, Վ. Կ. ՕՊԱՆԱՍՈՎԻՉ

ՃԵՂՔՈՎ ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ  
ԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՍԵՂՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում դիտարկվում է ճեղքով կտոր առ կտոր համասեռ իզոտրոպ սալի առաձգական հավասարակշռության որոշման խնդիրը, երբ փոփոխական լայնություն ունեցող ճեղքը գտնվում է նյութերի բաժանման ուղիղ գծի վրա այն պայմանով, որ ճեղքի ավերը տրված կենտրոնացած դործոնների և համասեռ լարված վիճակի ազդեցության տակ անվերջությունում քերվում են ողորկ կոնտակտի:

Գտնված են լարումների ֆունկցիաները և ճեղքի ավերի միջև կոնտակտի հատվածի երկարության որոշման համար պայմանները:

STRESS DISTRIBUTION IN A PIECE-HOMOGENEOUS  
PLATE WITH A CRACK UPON COMPRESSION

D. V. GRILITSKY, V. K. OPANASOVICH

## S u m m a r y

The problem on elastic equilibrium for a piece-homogeneous isotropic plate with a variable breadth crack along the straight line of division is considered. The edges of the crack are assumed to keep in smooth touch with each other under the action of specified concentrated factors and homogeneous stresses state. The stress junctions and conditions to determine the contact line length are obtained.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Загубиженко П. А. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН СССР, т. 94 № 4, 1954.
2. Моссаковский В. И., Загубиженко П. А. О сжатии упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН УССР, № 5, 1954.
3. Берковиц П. Е. Щель в неоднородном поле сжимающих напряжений. Прикл. механика, т. 2, вып. 5, 1966.
4. Берковиц П. Е., Чаплигина С. Н. Щель в плоскости, находящейся под действием неоднородного поля напряжений. Прикл. механика, т. 6, вып. 3, 1970.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.