ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К УРАВНЕНИЯМ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах [1, 2], выводятся уравнения магнитоупругих колебаний тонких токонесущих пластин, помещенных в магнитное поле. Полученные уравнения рассматриваются для частного случая — задачи колебаний бесконечной пластинки, несущей равномерно распределенный электрический ток.

1. Пластинка постоянной толщины $2h$ служит проводником стационарного электрического тока в направлении, параллельном срединной плоскости. Кроме магнитного поля, обусловленного заданным электрическим током в пластинке, предполагается также наличие внешнего магнитного поля, которое до тех пор, пока пластинка находится в покое, не создает электрического тока.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε.

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0 [E_{0x}, E_{0y}, 0]$ обусловленный током в пластинке, должен удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}_0$ внутри пластинки не зависит от координаты z, а вне пластинки равняется нулю.

Предполагается, что задача магнитостатики для невозбужденного состояния пластинки решена. Задача магнитостатики требует решения уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \tag{1.2}$$

при условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку

$$[\mathbf{B}_0^{(e)} - \mathbf{B}_0^{(i)}] \cdot n = 0, \qquad [\mathbf{H}_0^{(e)} - \mathbf{H}_0^{(i)}] \times \mathbf{n} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индекс (i) показывает принадлежность к внутренней области, ограниченной поверхностями пластинки, индекс (e) — к внешней области, $\mathbf{n}$ — нормаль к соответствующей поверхности пластинки, $\mathbf{B}_0\{B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}\}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}_0^{(e)} = \mathbf{B}_0^{(e)}$, $\mu\mathbf{H}_0^{(i)} = \mathbf{B}_0^{(i)}$.

Уравнения электродинамики для движущейся среды принимаются в виде [3]:

во внутренней области ($|z| \leqslant h$)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{E}^{(i)} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{B}^{(i)}\right] + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}^{(i)}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}^{(i)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\rho_e \tag{1.4}$$

во внешней области ($|z| \geqslant h$)

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D}^{(e)} = 0 \tag{1.5}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ — соответственно векторы напряженности и индукции электрического поля, $\mathbf{u}\{u_x, u_y, u_z\}$ — вектор перемещения частиц пластинки, c — скорость света в вакууме, ρ_e — плотность электрических зарядов в пластинке.

Связи между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в системе координат, связанной с движущейся поверхностью раздела двух сред, принимаются в виде

$$\mathbf{B}_*^{(i)} = \mu\mathbf{H}_*^{(i)}, \quad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{D}_*^{(i)} = \varepsilon\mathbf{E}_*^{(i)}, \quad \mathbf{D}_*^{(e)} = \mathbf{E}_*^{(e)} \tag{1.6}$$

Векторы, характеризующие рассматриваемое электромагнитное поле в подвижной системе координат, отмеченные индексом (*), выражаются через соответствующие векторы неподвижной системы координат (x, y, z) по формулам [1]

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\mathbf{v}_n\times\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_* = \mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{v}_n\times\mathbf{D}$$
$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_n\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{D} + \frac{1}{c}\mathbf{v}_n\times\mathbf{H} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{v}_n$ — вектор скорости перемещения поверхности раздела в направлении нормали, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела в неподвижной системе координат.

Рассматриваемая здесь задача колебаний токонесущей пластинки будет полностью поставлена, если к уравнениям (1.3) и (1.4) присоединить уравнения движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения и соответствующих граничных условий на поверхности раздела двух сред (пластинки и вакуума). Силы и моменты электромагнитного происхождения определяются из формул

$$\mathbf{R} = \int_{-h}^{h} \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \rho_e \mathbf{E} \right] dz$$

$$\mathbf{m} = \int_{-h}^{h} \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \rho_e \mathbf{E} \right] z dz \tag{1.8}$$

В настоящей работе рассматриваются задачи магнитоупругих колебаний при малых возмущениях. Принимая для компонент возмущенного электромагнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e} \tag{1.9}$$

и учитывая, что компоненты векторов **h** и **e** индуцированного электромагнитного поля и компоненты вектора **u** малы, уравнения (1.4) и (1.5) линеаризуются. Используя при этом связи (1.6) и линеаризованные соотношения (1.7), получим уравнения электродинамики в следующем виде:

для внутренней области (здесь и в дальнейшем индекс (i) опускается)

$$\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_x + \frac{1}{c} \left(B_{0z} \frac{\partial u_y}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_y + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial u_z}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_z + \frac{1}{c} \left(B_{0y} \frac{\partial u_x}{\partial t} - B_{0x} \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_z}{\partial t} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_z}{\partial t} \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \left(E_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial t} - E_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial t} \right) = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial x}+\frac{\partial e_y}{\partial y}+\frac{\partial e_z}{\partial z}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\mu c}\left(H_{0x}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\partial t}-H_{0y}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial t}\right)=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_e \quad (1.17)$$

для внешней области

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{e}^{(e)}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{e}^{(e)}=0 \quad (1.18)$$

Члены с коэффициентами ε и $\varepsilon\mu-1$ в уравнениях (1.10)—(1.12) обусловлены токами смещения. Для проводников, обладающих хорошей проводимостью, токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости, что в дальнейшем и делается.

2. Гипотезы магнитоупругости, предложенные в работах [1, 2], аналитически записываются следующим образом:

$$u_x=-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_y=-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_z=w(x,y,t)$$
$$e_x=\varphi(x,y,t),\quad e_y=\psi(x,y,t),\quad h_z=f(x,y,t) \quad (2.1)$$

Интегрируя уравнения (1.10) и (1.11) по z и используя соотношения (2.1), компоненты индуцированного магнитного поля h_x и h_y определим посредством их граничных значений при $z=\pm h$ и функций φ, ψ, f, w

$$h_x=\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}+z\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right)+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_x\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)$$
$$h_y=\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}+z\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_y\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) \quad (2.2)$$

Здесь h_x^+, h_x^- и h_y^+, h_y^- — значения компонент h_x и h_y при $z=\pm h$ соответственно,

$$a=\int_{-h}^{z}B_{0z}zdz-\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}B_{0z}zdz,\quad a_i=\int_{-h}^{z}B_{0i}dz-\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}B_{0i}dz \quad (i=x,y,z)$$

В выражениях (2.2), как было оговорено выше, токи смещения не учтены. Однако, из уравнений (1.10) и (1.11) легко заметить, что при определении h_x и h_y учет токов смещения не представляет трудности.

Аналогичным образом из уравнения (1.12) определяется компонента электрического поля e_z. При этом пренебрежение токами смещения существенно облегчает нахождение e_z

$$e_z=\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right]-z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{c}\left[\left(a_y-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left(a_x-\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right]+\frac{z}{c}\left(B_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-B_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) \quad (2.3)$$

При необходимости учета токов смещения приведенный в настоящей работе способ получения уравнений магнитоупругости можно применить в следующих случаях:

а) при решении задач с периодическими колебаниями. Искомые величины в этих задачах представляются в виде $q(x, y, z)\exp(i\omega t)$ и компонента e_z определяется из уравнения (1.12);

б) при решении задач магнитоупругости, для которых выполняются условия отсутствия электрических зарядов [4]. Тогда компоненту e_z следует определять из уравнения (1.17) при $\rho_e=0$ после соответствующего интегрирования по z.

Используя соотношения (2,1) и интегрируя уравнения (1.15), (1.10) и (1.11) по z в пределах от $-h$ до h, получим следующие уравнения, определяющие неизвестные функции φ, ψ, f:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\\
\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi+\frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+b_y\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{h_y^+-h_y^-}{2h}\\
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi+\frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left(c_z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+b_x\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{h_x^+-h_x^-}{2h}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где

$$
b_i=\int_{-h}^{h}B_{0i}\,dz,\qquad c_i=\int_{-h}^{h}zB_{0i}\,dz\qquad (i=x,\ y,\ z)
$$

Соответствующее интегрирование остальных уравнений из (1.10)—(1.16) после некоторых преобразований приводит к дополнительным условиям, налагаемым на граничные значения искомых величин при $z=\pm h$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^++h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^++h_x^-}{2}\right)\right]=\\
=-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_x^++h_x^-}{2}\right)+\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)-\right.\\
\left.-\frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+g_z\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}E_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^++h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^++h_x^-}{2}\right)\right]=\\
=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left[\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_y^++h_y^-}{2}\right)-\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)-\right.\\
\left.-\frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2}\left(c_y\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+g_z\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\right)-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}E_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) = \frac{4\pi\sigma^2}{2hc^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(c_x\frac{\partial w}{\partial t} + g_z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_y\frac{\partial w}{\partial t} + g_z\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)\right] - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c}\left(E_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - E_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) \qquad (2.5)$$

где

$$g_i = \int_{-h}^{h} z^2 B_{0i} dz \qquad (i = x,\ y,\ z)$$

К уравнениям (2.4) необходимо присоединить линейное уравнение движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения [1]

$$D\Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{0y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \qquad (2.6)$$

Здесь T_{0x} и T_{0y} — усилия в направлениях x и y, определяемые из решения соответствующей задачи упругости при наличии статических объемных сил электромагнитного происхождения в направлениях x и y

$$R_{0x} = \frac{\sigma}{c} b_z E_{0y}, \qquad R_{0y} = -\frac{\sigma}{c} b_z E_{0x}$$

Сила R_z и моменты m_x, m_y определяются согласно формулам (1.8) следующим образом (формулы (1.8) предварительно линеаризуются и преобразуются с учетом (2.1)—(2.3)):

$$R_z = \frac{\sigma}{c}\left\{b_y(E_{0x} + \varphi) - b_x(E_{0y} + \psi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c}\left[(b_{xx} + b_{yy})\frac{\partial w}{\partial t} + c_{xz}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + c_{yz}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right]\right\}$$

$$m_x = \frac{\sigma}{c}\left\{c_z(E_{0y} + \psi) - c_y\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] + \right.$$

$$+ g_y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{c_{xz}}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{c}\left[l_{yy} - \frac{1}{2}b_y c_y - \frac{\partial}{\partial y}\left(l_y - \frac{1}{2}c_z c_y\right) - \right.$$

$$\left. - g_{zz}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \frac{1}{c}\left[l_{xy} - \frac{1}{2}b_x c_y - \frac{\partial}{\partial x}\left(l_y - \frac{1}{2}c_z c_y\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} + \qquad (2.7)$$

$$+ \frac{2h\varepsilon E_{0x}}{4\pi}\left\{\frac{e_z^+ + e_z^-}{2} - \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2hc}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right) + \frac{\varepsilon\mu - 1}{2h\varepsilon c}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t} - c_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right\}$$

$$m_y=\frac{\sigma}{c}\left\{-c_z(E_{0x}+\varphi)+c_x\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right]-\right.$$

$$-g_x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{c_{yz}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{c}\left[l_{yx}-\frac{1}{2}b_yc_x-\frac{\partial}{\partial y}\left(l_x-\frac{1}{2}c_zc_x\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-$$

$$-\frac{1}{c}\left[l_{yx}-\frac{1}{2}b_xc_x-\frac{\partial}{\partial x}\left(l_x-\frac{1}{2}c_zc_x\right)-g_{zz}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}+ \tag{2.7}$$

$$+\frac{2h\varepsilon E_{0y}}{4\pi}\left\{\frac{e_z^+ + e_z^-}{2}-\frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2hc}\left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\frac{\partial g_z}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{2h\varepsilon c}\left(c_x\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}-c_y\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right\}$$

где

$$b_{ij}=\int_{-h}^{h}B_{0i}B_{0j}\,dz,\qquad c_{ij}=\int_{-h}^{h}zB_{0i}B_{0j}\,dz,\qquad g_{zz}=\int_{-h}^{h}z^2B_{0z}^2\,dz$$

$$l_{ij}=\int_{-h}^{h}\left(\int_{-h}^{z}B_{0i}\,d\xi\right)B_{0j}z\,dz,\qquad l_i=\int_{-h}^{h}\left(\int_{-h}^{z}\xi B_{0z}\,d\xi\right)zB_{0i}\,dz$$

$$(i,\ j=x,\ y,\ z)$$

В четырех уравнениях (2.4) и (2.6) относительно искомых функций φ, ψ, f, ω содержатся также неизвестные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля и нормальной компоненты индуцированного электрического поля (согласно (2.7)) при $z=\pm h$. Поэтому уравнения (2.4) и (2.6), вообще, следует решать совместно с уравнениями электродинамики (1.18) для внешней области при общих граничных условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку. Схема вывода указанных граничных условий на основе гипотез (2.1) для линейных задач магнитоупругости имеется в работе [2]. В рассматриваемом случае граничные условия на поверхности $z=\pm h$ запишутся следующим образом:

$$h_x=h_x^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0z}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c}E_{0y}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$h_y=h_y^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0z}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\varepsilon}{c}E_{0x}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$h_z=\frac{1}{\mu}h_z^{(e)}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0x}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\mu-1}{\mu}B_{0y}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.8}$$

$$e_x=e_x^{(e)}+\frac{\mu-1}{c}B_{0y}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial t},\qquad e_y=e_y^{(e)}-\frac{\mu-1}{c}B_{0x}^{(e)}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$e_z=\frac{1}{\varepsilon}e_z^{(e)}+E_{0x}\frac{\partial w}{\partial x}+E_{0y}\frac{\partial w}{\partial y}$$

3. Пусть бесконечная пластинка служит проводником равномерно распределенного тока в направлении оси x. Электрическое поле в пластинке дается вектором $\mathbf{E}_0 \{E_{0x}, 0, 0\}$, $E_{0x} = \text{const}$.

Решая задачу магнитостатики — уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3),— найдем

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 \{0, H_{0y}, 0\}, \qquad H_{0y} = \begin{cases} -\dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при} \quad z > h \\ -\dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} z & \text{при} \quad |z| \leqslant h \\ \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при} \quad z < -h \end{cases} \tag{3.1}$$

Используя (2.7) и (3.1), уравнения (2.4) и (2.6), определяющие искомые функции φ, ψ, f, w, приведем к следующему виду:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}$$

$$\begin{gathered} D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \frac{2h^3\sigma}{3c^2}E_{0x}^2\left[\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\right)^2\frac{h^2}{5} + (\varepsilon\mu - 1)\right]\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\varepsilon h E_{0x}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e_z^+ + e_z^-}{2}\right) + \\ + \frac{2h^3\sigma E_{0x}}{3c}\left[1 - \frac{3\varepsilon c^2}{(4\pi\sigma)^2 h^2}\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2}\right)\right] \end{gathered} \tag{3.2}$$

В частном случае, когда колебания не зависят от координаты x, получаем $\psi \equiv 0$, а вместо (3.2) — следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} \\ D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^3\sigma}{3c^2}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2\frac{\partial w}{\partial t} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно, что в этом случае уравнение движения пластинки отделяется от уравнений для индуцированного электромагнитного поля. Представляя решение уравнения движения пластинки в виде

$$w = w_0 \exp i(\omega t - kx)$$

получим характеристическое уравнение, определяющее частоту колебаний

$$\Omega^2 + 2\beta\Omega + 1 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь

$$\Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0}, \qquad \beta = \frac{\sigma h^2}{6\rho c^2 \Omega_0}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}E_{0x}\right)^2, \qquad \Omega_0 = \frac{Dk^4}{2\rho h}$$

Решение уравнения (3.4) показывает, что при $\beta<1$ возмущения затухают по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания и частотой $(1-\beta^2)^{1/2}$, а при $\beta\geqslant 1$ возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $\beta+(\beta^2-1)^{1/2}$.

В рассмотренном частном случае условие отсутствия электрического заряда, приведенное в работе [4], выполняется. Следовательно, как было указано выше, легко можно учитывать токи смещения, определяя компоненту e_z из уравнения (1.17) интегрированием по z. Повторяя далее процедуру, приведенную в пункте 2, можно показать, что первое и третье уравнения из (3.2) остаются без изменений, а вместо второго уравнения получим

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{h_y^{+}-h_y^{-}}{2h}$$

Таким образом, в этом случае с точностью гипотез магнитоупругости токи смещения не влияют на характер упругих колебаний пластинки.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1973

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔԱՏԱՐ ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

[1, 2] աշխատանքներում առաջարկված մագնիսաառաձգականության վարկածների հիման վրա ստացված են մագնիսական դաշտում տեղադրված հոսանքատար սալերի մագնիսաառաձգականության հավասարումները: Ենթադրված է, որ էլեկտրական հոսանքը զուգահեռ է սալի միջին հարթությանը:

Ստացված հավասարումները ուսումնասիրված են մասնավոր դեպքի համար: Դիտարկված են անվերջ սալի տատանումները, որին հաղորդվում է հավասարաչափ բաշխված էլեկտրական հոսանք: Գտնված են տատանումների հաճախականությունը և մարման օրենքը՝ կախված հոսանքի խտությունից:

ON MAGNETOELASTIC EGUATIONS FOR CURRENT-CARRYING PLATES

M. V. BELUBEKIAN

Summary

On the basis of magnetoelasticity hypothesis the equations for magnetoelastic oscillations of plates are deduced. The plates carry electrical current and are placed in a magnetic field.

The frequency of oscillations and the law of damping dependent on electrical current density are defined for a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред, т. 1. «Наука», М., 1970.
4. *Белубекян М. В.* Условия отсутствия электрического заряда в задачах электромагнитоупругости. Докл. АН Арм. ССР, т. LVI, № 2, 1973.