

Р. М. КИРАКОСЯН

О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
 ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА, ПОЛУЧЕННЫМИ В УПРУГОЙ
 И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКАХ

В рамках соотношений теории малых упруго-пластических деформаций в геометрически линейной постановке рассматривается равновесие тел при смешанных краевых условиях. С помощью минимальных принципов краевой задачи при подходящем выборе статически и кинематически возможных распределений напряжений и деформаций получены некоторые неравенства, связывающие решения краевой задачи в упругой и упруго-пластической постановках.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассмотрим тело объема v , находящееся под действием массовых сил X_i , поверхностных нагрузок p_i , приложенных на части поверхности тела S_p , и перемещений u_α , заданных на остальной части поверхности S_u .

В качестве физических соотношений принимаются уравнения теории малых упруго-пластических деформаций упрочняющегося материала при только активных процессах деформирования [1] во всей среде

$$\begin{aligned} \sigma &= K\theta \\ \sigma_i &= 3G\varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь σ — среднее гидростатическое давление, θ — объемная деформация, σ_i и ε_i — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига, K и G — постоянные, определяющие материал с точностью обобщенного закона Гука.

Отклонение связи между напряжениями и деформациями от линейного закона характеризуется функцией $\omega(\varepsilon_i)$, которая удовлетворяет условиям упрочнения

$$1 \geq \omega + \varepsilon_i \frac{d\omega}{d\varepsilon_i} \geq \omega \geq 0, \quad \frac{d\omega}{d\varepsilon_i} > 0 \quad (1.2)$$

С помощью (1.1) связь между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, & \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^p \\ \varepsilon_{ij}^e &= A_{ijkl} \sigma_{hk}, & \varepsilon_{ij}^p &= \bar{A}_{ijkl} \sigma_{hk}, & \sigma_{ij}^e &= A_{ijkl}^{-1} \varepsilon_{hk}, & \sigma_{ij}^p &= A_{ijkl}^{-1} \varepsilon_{hk} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ε_{ij}^e и ε_{ij}^p — упругая и пластическая составляющие тензора деформаций, A_{ijkl} и A_{ijkl}^{-1} — тензоры упругих коэффициентов и модулей уп-

ругости материала. Тензор \bar{A}_{ijhk} получается из тензора A_{ijhk} путем замены коэффициента Пуассона ν и модуля Юнга E через

$$\bar{\nu} = 1/2, \quad \bar{E} = \frac{3G(1-\nu)}{\nu} \quad (1.4)$$

Очевидно, что в рассмотренной постановке упруго-пластическая краевая задача ничем не отличается от соответствующей краевой задачи нелинейной теории упругости.

В силу однозначной разрешимости краевой задачи минимальные принципы для напряжений и деформаций приобретают абсолютный характер.

Это означает, что сопряженная полная потенциальная энергия*

$$\bar{\Pi}^* = \int \int \int \left[\int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}^*} \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} \right] dv - \int_{\bar{\varepsilon}_p} \bar{\sigma}_{ij}^* n_j u_i^0 ds \quad (1.5)$$

и полная потенциальная энергия

$$\Pi^* = \int \int \int \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^*} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dv - \int_{\varepsilon_p} X_i u_i^0 dv - \int_{\varepsilon_p} P_i u_i^0 ds \quad (1.6)$$

определенные соответственно для всех статически возможных напряжений σ_{ij}^* и для всех кинематически возможных деформаций ε_{ij}^0 свои абсолютно минимальные значения получают только при истинных напряжениях σ_{ij} и истинных деформациях ε_{ij} .

С помощью (1.3) дополнительную работу деформаций

$$\bar{A}^* = \int \int \int \left[\int_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}^*} \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{\varepsilon}_{ij} \right] dv \quad (1.7)$$

соответствующую статически возможным напряжениям σ_{ij}^* и работу кинематически возможных деформаций ε_{ij}^0

$$A^* = \int \int \int \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^0} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right] dv \quad (1.8)$$

можно представить в виде

$$\bar{A}^* = \bar{A}^{*'} + \Delta \bar{A}^{*''}, \quad A^* = A^{*'} - A^{*''} \quad (1.9)$$

где приняты обозначения

* Для простоты сохранена терминология теории упругости.

$$\bar{A}^{*'} = \frac{1}{2} \int_{\nu} A_{ijhk} \sigma_{hk}^* \varepsilon_{ij}^* dv \quad (1.10)$$

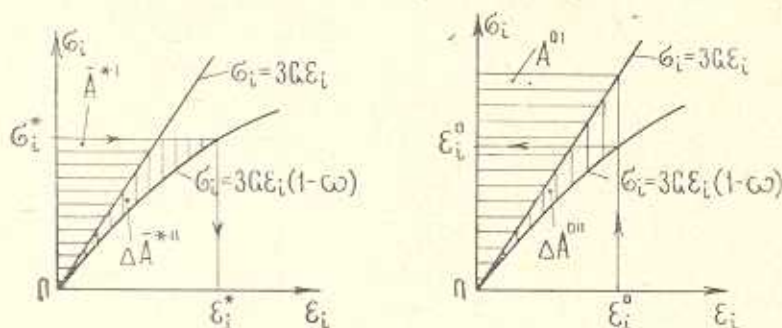
$$A^{0'} = \frac{1}{2} \int_{\nu} A_{ijhk}^{-1} \varepsilon_{hk}^0 \varepsilon_{ij}^0 dv \quad (1.11)$$

$$\Delta \bar{A}^{*''} = \int_{\nu} \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^*} \varepsilon_{ij}^* d\varepsilon_{ij} \right] dv \quad (1.12)$$

$$\Delta A^{0''} = \int_{\nu} \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^0} A_{ijhk}^{-1} \varepsilon_{hk}^0 d\varepsilon_{ij} \right] dv \quad (1.13)$$

Здесь $\bar{A}^{*'}$ и $A^{0'}$ — дополнительная работа и работа деформаций, которые соответствуют статически возможным напряжениям σ_{ij}^* и кинематически возможным деформациям ε_{ij}^0 по обобщенному закону Гука, а $\Delta \bar{A}^{*''}$ и $\Delta A^{0''}$ — их поправки из-за нелинейности физических соотношений.

На плоскости σ_i, ε_i (фиг. 1) даны механические изображения представлений (1.9) для единичного объема.



Фиг. 1.

Из минимального принципа для напряжений, когда в качестве статически возможного распределения выбрано распределение напряжений классической теории упругости $\sigma_{ij}^{(e)}$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\nu} A_{ijhk} \sigma_{hk}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)} dv - \Delta \bar{A}^{(e)''} - \int_{s_n} \sigma_{ij}^{(e)} n_j u_{i0} ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\nu} A_{ijhk} \sigma_{hk} \varepsilon_{ij} dv - \Delta \bar{A}'' + \int_{s_n} \sigma_{ij} n_j u_{i0} ds \geq 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

С другой стороны, из минимального принципа краевой задачи классической теории упругости в случае, когда в качестве статически возможного принято действительное распределение напряжений упруго-пластической краевой задачи σ_{ij} , следует

$$\frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \sigma_{kk} \sigma_{ij} dv - \int_{s_u} \sigma_{ij} n_j u_{i0} ds - \frac{1}{2} \int_V A_{ijkl} \varepsilon_{kk}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)} dv + \int_{s_u} \sigma_{ij}^{(\varepsilon)} n_j u_{i0} ds \geq 0 \quad (1.15)$$

Складывая неравенства (1.14) и (1.15), приходим к результату

$$\Delta \bar{A}^{(\varepsilon)''} \geq \Delta \bar{A}'' \quad (1.16)$$

Таким образом, действительная поправка к дополнительной работе $\Delta \bar{A}''$ не больше, чем та, которая соответствует напряжениям классической теории упругости $\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)}$.

Аналогичным образом из минимальных принципов деформаций для поправки к работе деформаций $\Delta A''$ можно получить неравенство обратного смысла

$$\Delta A'' \geq \Delta A^{(\varepsilon)''} \quad (1.17)$$

то есть действительная поправка к работе деформаций $\Delta A''$ не меньше, чем та, которая соответствует деформациям классической теории упругости $\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)}$.

Очевидно, что значения поправок к дополнительной работе $\Delta \bar{A}''$ и работе деформаций $\Delta A''$ могут играть роль своеобразных интегральных критериев развития пластического деформирования во всем теле. С этой точки зрения неравенства (1.16) и (1.17) позволяют на базе краевой задачи классической теории упругости получить односторонние интегральные оценки сверху и снизу пластического деформирования во всем теле.

Целесообразно неравенствам (1.16) и (1.17) придать удельный характер, разделив их на объем тела V ,

$$0 \leq \frac{1}{V} \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}^* dz_{ij} \right] dv \leq \frac{1}{V} \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)}} \varepsilon_{ij}^* dz_{ij} \right] dv \quad (1.18)$$

$$\frac{1}{V} \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}} A_{ijkl}^{-1} \varepsilon_{kk}^* d\varepsilon_{ij} \right] dv \geq \frac{1}{V} \int_V \left[\int_0^{\varepsilon_{ij}^{(\varepsilon)}} A_{ijkl}^{-1} \varepsilon_{kk}^* d\varepsilon_{ij} \right] dv$$

2. На основе уравнения виртуальных работ для самоуравновешенной разности напряжений $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(\varepsilon)}$ и совместных деформаций ε_{ij} , которым на s_u отвечают перемещения u_{i0} , справедливо равенство

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] \varepsilon_{ij} dv = \int_{s_u} [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] n_j u_{i0} ds \quad (2.1)$$

Имея в виду (2.1) и представление

$$\int_v A_{ijhk} \sigma_{hk} \varepsilon_{ij} dv = \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dv = \int_v \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)}) dv \quad (2.2)$$

из (1.15) получим

$$I \geq \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dv \quad (2.3)$$

где

$$I = \int_v [2\sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv \quad (2.4)$$

Так как

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \geq 0 \quad (2.5)$$

из (2.3) следует

$$I \geq 0 \quad (2.6)$$

Вычитая из (2.6)

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] [\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv = 0 \quad (2.7)$$

получим

$$\int_v [\sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv \geq 0 \quad (2.8)$$

Рассмотрим частные случаи:

а) случай защемленного тела ($u_{i0} = 0$ на s_u).

В этом случае

$$\int_v [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)}] \varepsilon_{ij} dv = 0 \quad (2.9)$$

Вычитая из (2.6) два раза (2.9) и имея в виду уравнение виртуальных работ, приходим к результату

$$\int_v [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)}] dv = \int_v X_i [u_i - u_i^{(e)}] dv + \int_{s_p} P_i [u_i - u_i^{(e)}] ds \geq 0 \quad (2.10)$$

б) случай штампов, когда отсутствуют массовые силы в объеме тела и поверхностные нагрузки на s_p . Тогда

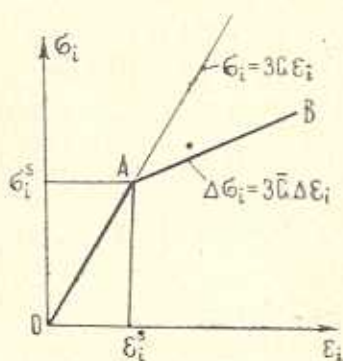
$$\int_V \sigma_{ij}^{(e)} [\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{(e)}] dV = 0 \quad (2.11)$$

и с учетом (2.6) получим

$$\int_V [\sigma_{ij}^{(e)} \varepsilon_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}] dV = \int_{s_u} [\sigma_{ij}^{(e)} - \sigma_{ij}] n_j u_{i0} ds \geq 0 \quad (2.12)$$

Отметим, что аналогичные вопросы без каких-либо осложнений можно рассмотреть как с учетом нелинейности связи между объемной деформацией и средним гидростатическим давлением, так и с учетом изменения температуры тела.

3. Хотя и вычисление значений удельных поправок, соответствующих решениям краевой задачи по классической теории упругости, не связано со специальными трудностями, целесообразно пользоваться упрощенными схемами физических соотношений. Здесь уместно отметить, что, конкретизируя физические соотношения, можно получить двусторонние одинаковые оценки для дополнительной работы и работы деформаций. Проиллюстрируем это на примере кусочно-линейной зависимости между интенсивностями касательных напряжений и деформаций сдвига.



Фиг. 2.

Пусть [1] (фиг. 2)

$$\begin{aligned} \sigma_i - \sigma_i^s &= 3G(1 - \lambda)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^s), \quad (\lambda = \text{const}) \\ \sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s &= 3G(\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда неравенства (1.18) примут вид

$$\frac{1}{V} \int_{V_p} (\sigma_i - \sigma_i^s)^2 dV \leq \frac{1}{V} \int_{V_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s)^2 dV$$

$$\frac{1}{v} \int_{v_p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s)^2 dv \geq \frac{1}{v} \int_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s)^2 dv \quad (3.2)$$

Здесь v_p — часть объема тела, где действительные пластические деформации отличны от нуля ($\varepsilon_i > \varepsilon_i^s$), $v_p^{(e)}$ — та часть, в которой отличны от нуля пластические деформации, вычисленные по напряжениям классической теории упругости ($\sigma_i^{(e)} > \sigma_i^s$).

С учетом (3.1) первое неравенство (3.2) запишем в виде

$$\frac{(1-\lambda)^2}{v} \int_{v_p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s)^2 dv \leq \frac{1}{v} \int_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s)^2 dv \quad (3.3)$$

Разделив обе части (3.3) на $(1-\lambda)^2$ и присоединив полученное со вторым неравенством (3.2), приходим к следующей двусторонней оценке для работы деформаций:

$$A = \frac{1}{v} \int_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s)^2 dv \leq \frac{1}{v} \int_{v_p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s)^2 dv \leq \frac{1}{v(1-\lambda)^2} \int_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^s)^2 dv = B \quad (3.4)$$

Используя соотношения (3.1), неравенствам (3.4) можно придать другой вид, записывая их в терминах напряжений

$$C = \frac{(1-\lambda)^2}{v} \int_{v_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s)^2 dv \leq \frac{1}{v} \int_{v_p} (\sigma_i - \sigma_i^s)^2 dv \leq \frac{1}{v} \int_{v_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^s)^2 dv = D \quad (3.5)$$

Очевидно, оценки (3.4) и (3.5) идентичны.

Эти оценки дают возможность на базе решений классической теории упругости сравнивать совершенно разные задачи и иногда определять, в какой задаче более интенсивно развит процесс действительного пластического деформирования в среднем. Например, если в одной задаче интервал AB (CD) на числовой оси целиком находится правее аналогичного интервала другой задачи A_1B_1 (C_1D_1), то, очевидно, средний уровень развития процесса пластического деформирования в этой задаче более высок.

Полезно заметить, что ширина вилки AB (CD) при таком сравнении никакого значения не имеет, так как относительное расхождение ее границ не зависит от характера задачи и для данного материала всегда одинаково

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = (1-\lambda)^2 \quad (3.6)$$

Варьируя способ приложения одних и тех же внешних воздействий, с помощью двусторонних оценок (3.4) можно добиться более удачного нагружения данного тела в смысле рационального использования материала.

Рассмотрим кручение сплошного круглого цилиндра радиуса R . Обозначая угол закручивания на единицу длины цилиндра вокруг его оси z через α , а радиус поверхности раздела упругой и пластической области через a , на основе гипотез [2]

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \alpha x, \quad \varepsilon_{zx} = -\alpha y \quad (3.7)$$

имеем

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha r}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_i = \begin{cases} \sqrt{3} G \alpha r, & 0 \leq r \leq a \\ \sqrt{3} G \alpha r \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{a}{r} \right) \right], & a \leq r \leq R \end{cases} \quad (3.8)$$

При этом связь между углом закручивания α и крутящим моментом M выражается формулой

$$M = \frac{\pi \alpha G}{2} R^4 (1 - \lambda k), \quad k = 1 - \frac{4}{3} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \frac{a^4}{R^4} \quad (3.9)$$

Из решения задачи по классической линейно-упругой теории при том же значении крутящего момента (3.9) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(e)} &= \frac{\alpha^{(e)} r}{\sqrt{3}} = \varepsilon_i (1 - \lambda k) \\ \sigma_i^{(e)} &= \sqrt{3} G \alpha^{(e)} r = \sqrt{3} G \alpha r (1 - \lambda k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя (3.8) и (3.10), получим

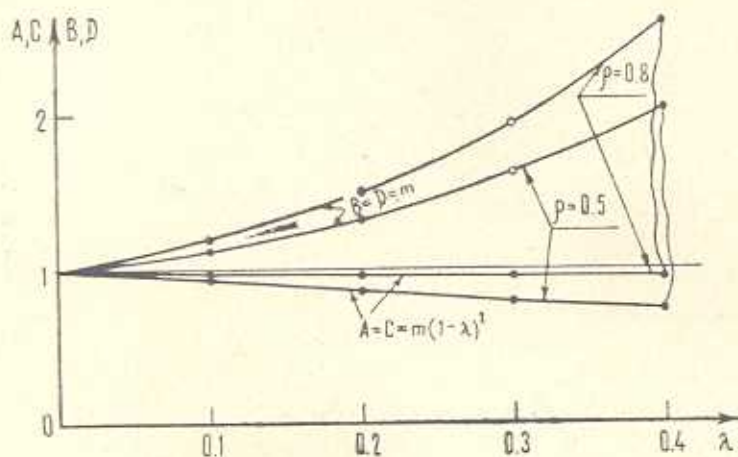
$$\begin{aligned} m &= \frac{\int_{v_p^{(e)}} (\sigma_i^{(e)} - \sigma_i^p)^2 dv}{\int_{v_p} (\sigma_i - \sigma_i^p)^2 dv} = \\ &= \frac{\frac{(1-\lambda k)^2}{4} [1 - \rho^4 (1+h)^4] - \frac{2\rho}{3} (1-\lambda k) [1 - \rho^3 (1+h)^3] + \frac{\rho^2}{2} [1 - \rho^2 (1+h)^2]}{(1-\lambda)^2 \left[\frac{1}{4} (1-\rho^4) - \frac{2\rho}{3} (1-\rho^3) + \frac{\rho^2}{2} (1-\rho^2) \right]} \\ n &= \frac{\int_{v_p} (\varepsilon_i - \varepsilon_i^p)^2 dv}{\int_{v_p^{(e)}} (\varepsilon_i^{(e)} - \varepsilon_i^p)^2 dv} = \frac{1}{m (1-\lambda)^2}, \quad \rho = \frac{a}{R}, \quad h = \frac{\lambda k}{1-\lambda k} \quad (3.11) \end{aligned}$$

В нижеприведенной таблице представлены значения m для некоторых λ и относительного радиуса поверхности раздела упругой и пластической областей цилиндра ρ .

Таблица 7

$\lambda \backslash \rho$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	2	3	4	5	6	7
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1487	1.1752	1.1986	1.2174	1.2300	1.2346
0.2	1.3490	1.4142	1.4722	1.5191	1.5508	1.5625
0.3	1.6302	1.7539	1.8651	1.9562	2.0180	2.0408
0.4	2.0465	2.2636	2.4613	2.6247	2.7364	2.7778

С помощью данных этой таблицы на фиг. 3 построены области, заключенные между верхними и нижними относительными границами оценок (3.4) и (3.5) для случаев, когда толщина пластического слоя составляет 0.5 и 0.2 части радиуса цилиндра (второй и пятый столбцы таблицы). Из



Фиг. 3.

фигуры и таблицы видно, что с увеличением пластической области (с уменьшением ρ) верхняя оценка улучшается, приближаясь, а нижняя оценка — ухудшается, удаляясь от действительных значений работы деформаций. Следовательно, для случаев хорошо развитых пластических областей можно с определенной уверенностью пользоваться верхней оценкой B или D .

Թ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԳԵՅՈՐՄԱՑՎՈՂ ՄԱՐՄԵՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԵՆԳՐԻ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆ ԵՎ
ԱՌԱԶԳԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ՍՏԱՑՎԱԾ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ
ԵՂԱՅ ԿԱՊԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջա-
նակներում դիտարկվում է մարմնի հավասարակշռությունը խառը եզրային
պայմանների առկայությամբ: Ստատիկորեն և կինեմատիկորեն հնարավոր
լարումների ու դեֆորմացիաների դաշտերի համապատասխան ընտրությամբ
օգտագործվում են եզրային խնդրի մինիմալ սկզբունքները և ստացվում են
մի քանի անհավասարություններ, որոնք կապ են հաստատում եզրային խնդրի
առաձգական և առաձգա-պլաստիկական դրվածքներով ստացված լուծում-
ների մեջ:

ON CORRELATION BETWEEN SOLUTIONS TO A BOUNDARY PROBLEM FOR A DEFORMED BODY RECEIVED IN ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC STATEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

Equilibrium of bodies under mixed boundary conditions in terms
of correlations of the theory of small elastic-plastic deformations is
considered in geometrically linear statement.

Using minimum principles of a boundary problem with pertinent
choice of statically and kinematically possible stress-strain distributions,
certain inequalities are obtained correlating the boundary problem so-
lutions in elastic and elastic-plastic statements.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
2. Коуджерер Г. Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.