ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОТЕРМОМАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ФРОНТОВ ВОЛН

1. Рассматривается задача определения параметров движения вязкотермомагнитоупругой среды в окрестности фронтов волн малой интенсивности. Предположено, что волна распространяется в неоднородной среде, невозмущенные параметры которой зависят от координат x, y, z.

Уравнения движения произвольной среды в окрестности фронта волны имеют вид [1, 2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{d\ln\Phi}{dt}u-\frac{1}{2}H_1\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}\right)=$$

$$=\lambda^1\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\tau} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial v_{x_2}}{H_1\partial\tau},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\partial v_{x_3}}{H_1\partial\tau}$$

где u есть проекция скорости возмущенного движения частицы на нормаль $\bar{n}$ к невозмущенной волне, τ—время пробега по нормали от волны до данной точки, $H_1=c_n+u_n$— нормальная скорость невозмущенной волны, u_n — невозмущенная скорость частицы, координаты x_2, x_3 выбраны в касательной плоскости волны, Φ есть амплитуда одномерного по τ линейного или лучевого решения, $\alpha=\alpha(\beta,\gamma)$ есть дисперсионное уравнение или уравнение характеристики, которое имеет вид

$$\alpha V_x+\beta V_y+\gamma V_z-1=-c_n\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \tag{1.2}$$

где (V_x, V_y, V_z) есть вектор невозмущенной скорости частиц. При получении (1.1) предположено, что ось $x=x_1$ выбрана по нормали к волне, поэтому при вычислении производных α по β и γ в (1.1), согласно (1.2), нужно учитывать, что $\beta\approx 0$, $\gamma\approx 0$. Значение λ^1 дает нелинейный добавок в нормальной скорости волны λ, причем $\lambda=H_1+\lambda^1 u$. Смысл v_{x_2}, v_{x_3} выясняется из проекций уравнений движения среды на направление медленного, по сравнению с τ, изменения параметров движения, которые обычно предельно упрощаются. Таким образом, для определения уравнения движения вблизи волны (1.1) нужно знать лучевое решение Φ, формулу для нормальной скорости волны λ в нелинейной задаче, формулу для нормальной скорости c_n волны относительно частиц в линейной задаче, а также выяснить смысл v_{x_2}, v_{x_3}.

Следует отметить, что при определении λ^1 из условий совместности на характеристике нелинейной задачи можно малые слагаемые, содержащие диссипативные члены, формально включить в формулу для λ, и тогда (1.1) будет описывать движение среды в окрестности волны для произвольной диссипативной среды.

Уравнения движения вязкотермомагнитоупругой среды в переменных Лагранжа x_k имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial X_k} + \frac{\partial \sigma_{ik}^{(\text{в})}}{\partial x_k} \tag{1.3}$$

где эйлерова координата $X_k = x_k + u_k$, u_k — вектор перемещений, $v_k = \dfrac{\partial u_k}{\partial t}$, ρ — плотность среды, тензор максвелловских напряжений

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}\right) \tag{1.4}$$

H_i — вектор напряженности магнитного поля и за волной $H_i = H_i^0 + h_i$, $|h_i| \ll |H_i^0|$, $\sigma_{ik}^{(\text{в})}$ есть тензор вязких напряжений, имеющий вид

$$\sigma_{ik}^{(\text{в})} = \lambda^{(1)} \operatorname{div} \bar{v} \delta_{ik} + \lambda^{(\text{в})} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

σ_{ik} в (1.3) есть тензор термомагнитоупругих напряжений.

Полагая для энергии термомагнитоупругой среды

$$U = U_0 - \gamma_0 \theta Y_1 + \frac{1}{2} \nu_1 \theta Y_1^2 + \nu_2 \theta Y_2 + \nu_3 \theta^2 Y_1$$

где U_0 есть энергия нелинейно-упругого тела в отсутствие температурных напряжений, $\theta = T - T_0$, T — температура, $Y_1 = u_{ee}$, $Y_2 = \dfrac{1}{2}(u_{ee}^2 - u_{ik}^2)$ суть инварианты тензора деформаций

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_e}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\right)$$

γ, $\nu_{1,2,3}$ — постоянные, можно получить

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial U_0}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)} - \gamma_0 \theta \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \left(\nu_1 \theta \frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \nu_3 \theta^2 + \nu_2 \theta \frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right) \delta_{ik} - \nu_2 \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{1.6}$$

где первый член в правой части дает тензор напряжений в нелинейной теории упругости и имеет вид формулы (8.16), стр. 297, в работе [3].

Кроме того, имеет место уравнение энергии и обобщенный закон теплопроводности [4, 5]

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \mathrm{div}\,\bar{q}, \qquad \bar{q} + \tau_0\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = \lambda_1\,\mathrm{grad}\,\theta \tag{1.7}$$

где постоянные τ_0, λ_1 малы, S — энтропия. Вязкостью и джоулевой диссипацией в (1.7) вблизи волны можно пренебречь.

Учитывая соотношения [4]

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ik}}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial T}\right)_{u_{ik}}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{u_{ik}} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{u_{ik}}$$

можно получить во втором порядке по u_{ik}, θ, $T\dfrac{dS}{dt} = \varphi_1$,

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = c\frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma_0 T\frac{\partial^2 u_e}{\partial t\,\partial x_e} + 2\gamma_0 T\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t\,\partial x_e} -$$

$$- T\left(\nu_1\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \nu_2\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + 2\nu_3\theta\right)\frac{\partial^2 u_e}{\partial t\,dx_e} +$$

$$+ \nu_2 T\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\,\partial t} - \gamma_0\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\frac{\partial \theta}{\partial t}, \qquad \varphi_1 + \tau_0\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \lambda_1\nabla^2\theta \tag{1.8}$$

где $c = \left(\dfrac{\partial U_0}{\partial T}\right)_{u_{ik}}$ есть коэффициент теплоемкости. Можно предполагать $|\tau_0| \ll \lambda_1$, тогда для основных волн теплопроводность будет, как и вязкость, влиять на размазывание профиля волны, не влияя на ее скорость. Далее, предполагается $\tau_0 \sim \lambda_1$. В силу того, что τ_0 мало, хоть и $\dfrac{\lambda_1}{\tau_0}$ конечно, и поскольку определяются лишь условия на нелинейной волне, на которые влияют коэффициенты при старших производных, а также лучевое решение Φ, которое дается линейной теорией, в (1.8) существенны лишь линейные слагаемые и можно написать по (1.7), вводя обозначения

$$\varkappa = \frac{\lambda_1}{c}, \qquad \eta = \gamma_0\frac{T}{\lambda_1} \tag{1.9}$$

$$\nabla^2\theta = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\bar{u}}{\partial t} + \tau_0\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2\,\mathrm{div}\,\bar{u}}{\partial t^2}\right) \tag{1.10}$$

Учитывая, что имеет место для начальных магнитных напряжений $\dfrac{\partial \Pi_{ik}^0}{\partial X_k} = 0$, а также то, что вблизи волны можно в (1.3) заменять X_k на x_k, с учетом (1.3)—(1.6), а также уравнения магнитной индукции [6] можно получить окончательные уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \mu\Delta u_i - (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial^2 u_e}{\partial x_e \partial x_i} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial (H_i^0 h_k + H_k^0 h_i - H_e^0 h_e \delta_{ik})}{\partial x_k} +$$

$$+ \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = F_i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(h_k h_i - \frac{1}{2} h_e^2 \delta_{ik}\right)}{\partial x_k} - (\gamma_0 + \nu_2)\frac{\partial\left(\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(\nu_1 + \nu_2)\theta\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \nu_3\theta^2\right\} + (\lambda^{(1)} + \lambda^{(a)})\frac{\partial \operatorname{div}\bar{v}}{\partial x_i} + \lambda^{(a)}\Delta v_i$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = H_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i\frac{\partial v_e}{\partial x_e} - H_k\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_e} + H_i\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_e} + \zeta^0\Delta h_i \tag{1.11}$$

В последнем уравнении совершен переход от X_i к переменным x_i. Здесь λ_0, μ — постоянные Ламе [3], $\zeta^0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ есть малый коэффициент электрического сопротивления, F_i — нелинейная часть в тензоре упругих напряжений, причем во втором порядке [3]

$$F_i = \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_e}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_e} + 2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_e \partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}\right) +$$

$$+ \left(K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_e \partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_e}\right) +$$

$$+ \left(K - \frac{2}{3}\mu + B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_e}{\partial x_e} + \left(\frac{A}{4} + B\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_e \partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_i} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\right) + (B + 2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_e} \tag{1.12}$$

где K, A, B, C — постоянные, причем $K = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu$.

2. Таким образом, для определения v_i, u_i, θ, h_i имеем $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ и уравнения (1.10), (1.11). В линейном приближении, отбрасывая также члены с вязкостью и конечной электропроводностью σ, получим уравнения

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = (\lambda_0 + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\bar{v}) + \mu\Delta u_i +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial (H_i^0 h_k + H_k^0 h_i - H_e^0 h_e \delta_{ik})}{\partial x_k} - \gamma_0\frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \qquad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = H_k^0\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - H_i^0\frac{\partial v_e}{\partial x_e}$$

$$\nabla^2\theta = \left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta\frac{\partial \operatorname{div}\bar{u}}{dt}\right) + \tau_0\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \eta\frac{\partial^2 \operatorname{div}\bar{u}}{\partial t^2}\right) \tag{2.1}$$

В дальнейшем, при определении условий на линейной, а также и нелинейной характеристике, выберем ось x по нормали к волне линейной задачи (невозмущенной волне), уравнение поверхности нормалей к которой дается (1.2). Кроме того, удобно выбрать плоскость (x, y), проходящую через невозмущенное магнитное поле $(H_x^0, H_y^0, 0)$. Далее предположено $V_x = V_y = V_z = 0$, поскольку при $\overline{V} \neq 0$ невозмущенный вектор перемещения $\overline{u}$ будет зависеть от времени t, а выше предположено, что невозмущенные волной параметры среды зависят лишь от x, y, z. Поэтому скорость невозмущенной волны $H_1 = c_n$.

Обозначая через $\delta = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\right\}$ скачок производной параметров по нормали к волне, можно получить из (2.1) условия на линейных характеристиках $c_n = c_n^{(1,2)}$

$$\delta h_y = \frac{H_y}{c_n}\,\frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \dfrac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}\,\delta v_x, \qquad \delta v_y = -\frac{H_x}{H_y}\,\frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2}{c_n^2 - b^2}\,\delta v_x$$

$$\delta h_x = \delta h_z = \delta v_z = 0, \quad \delta\theta = P_0 c_n \delta v_x$$

$$\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2\right)\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) = \frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}(c_n^2 - b^2) \qquad (2.2)$$

где $\quad P_0 = -\tau_0\gamma\left(1 - \dfrac{\tau_0}{\chi} c_n^2\right)^{-1}, \quad c_n = c_n^{(3)}$

$$\delta h_z = -\frac{H_x}{c_n}\delta v_z, \; \delta v_x = \delta v_y = \delta h_y = \delta h_x = \delta\theta = 0$$

$$c_n^2 = b^2 + \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} \qquad (2.3)$$

Здесь индекс 0 в выражениях H_x^0, H_y^0 опущен, $a^2 = \dfrac{\lambda_0 + 2\mu}{\rho_0}$, $b^2 = \dfrac{\mu}{\rho_0}$.

Уравнения (2.2) относятся к быстрым и медленным термомагнитоупругим волнам, уравнение (2.3) соответствует поперечной волне, которая при $\overline{H}=0$ совпадает с упругой поперечной волной, а при $b=0$ совпадает с волной Альфвена. Последние соотношения в (2.2), (2.3) дают уравнения скоростей волн. Те же уравнения (2.2), (2.3) имеют место и для величин возмущений параметров h_x, h_y, h_z, v_x, v_y, v_z, θ за волной.

Для получения условий на нелинейной волне для полных уравнений (1.8), (2.1) следует заменить [6] $\dfrac{\partial}{\partial t} = -\lambda\delta$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k} = n_k\delta$, где n_k есть вектор единичной нормали к возмущенной волне. Тогда можно показать, что вблизи волн $\lambda_{1,2}$, соответствующих в линейной задаче (2.2), производные по z не дадут вклада в решение, а вблизи волны $\lambda^{(3)}$, соответствующей в линейной задаче (2.3), в уравнениях выпадут члены, содержащие θ, а также нелинейные слагаемые.

Для волн $\lambda = \lambda_{1,2}$ получим соотношения на характеристике

$$\left\{\lambda^2 - a^2 - \lambda^2 \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} + 2\frac{A_1}{c_n} v_x - \frac{1}{c_n} \frac{\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0\right)^2}{H_y^2} 4\pi\rho_0 v_x + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_0 + \mu}{\rho_0} n_y \frac{H_x\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0\right)}{H_y (c_n^2 - b^2)} + \zeta v_x \right\} \delta v_x =$$

$$= \frac{c_n}{4\pi\rho_0} H_y \delta h_y - \frac{c_n}{\rho_0} \{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(a)}\} \delta \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad (2.4')$$

$$(\lambda^2 - b^2)\delta v_y + \left(-\frac{1}{c_n} 2A_2 v_x - \frac{\lambda_0 + \mu}{\rho_0} n_y - \lambda^2 \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} n_y + \eta v_x\right) \delta v_x =$$

$$= -\frac{c_n}{4\pi\rho_0} H_x \delta h_y - \frac{c_n}{\rho_0} \lambda^{(a)} \delta \frac{\partial v_y}{\partial x} \qquad (2.4'')$$

$$-\delta v_z \left(H_y + \frac{v_x}{c_n} \frac{H_x^2}{H_y^2} \frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0}{c_n^2 - b^2} + H_y \frac{v_x}{c_n}\right) +$$

$$+ H_z \delta v_y = -c_n \delta h_z - \nu_m \delta \frac{\partial h_z}{\partial x} \qquad (2.4''')$$

где

$$\zeta = 2P_0 (\gamma_0 - \nu_1 + \nu_3 P_0) \frac{c_n}{\rho_0} -$$

$$- \frac{c_n \gamma_0}{\rho_0} \frac{T(\nu_1 - \nu_2) - 2\nu_3 T P_0 c_n^2 - 2(\nu_0 + \nu_2) T\left(1 + \frac{v_y^2}{v_x^2}\right) - c_n^2 \gamma_0 P_0}{c_n^2 c - \frac{\nu_1}{\gamma_0}}$$

$$\eta = -2(\gamma_0 + \nu_2) P_0 \frac{H_x}{H_y} \frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0}{c_n^2 - b^2} \frac{c_n}{\rho_0}$$

Значения A_1, A_2 соответствуют нелинейным слагаемым в формуле для сил F_x, F_y, причем согласно (1.12) получим, заменяя v_y и h_y через v_x по (2.2),

$$\frac{c_n}{\rho_0} F_x \approx \frac{1}{c_n} A_1 \delta v_x^2, \qquad A_1 = \frac{1}{\rho_0}\left(\mu + \frac{A}{4}\right) \frac{H_x^2\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} c_n^2\right)^2}{(c_n^2 - b^2)^2 H_y^2} +$$

$$+\frac{2\mu + A + 3B + \frac{3}{2}K + C}{\rho_0} \tag{2.5}$$

$$\frac{c_n}{\rho_0} F_y \approx -\frac{1}{c_n} A_2 \delta v_x^2$$

$$A_2 = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4\mu}{3} + \frac{A}{2} + K + B\right)\frac{H_x}{H_y}\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 P_0}{\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0}}$$

Полагая $\lambda = c_n + \tilde{\lambda}$, где c_n удовлетворяет (2.2), $\tilde{\lambda}$ — мало, учитываем, что $\bar{n}$ есть нормаль к возмущенной волне, а H_x, H_y — проекции $\bar{H}$ на нормаль и касательную к невозмущенной волне и вводим проекции $\bar{H}$ на нормаль и касательную к возмущенной волне, причем

$$H_x \approx H_n - H_t n_y, \quad H_y \approx H_t + H_n n_y \tag{2.6}$$

Введем, кроме того, нормальную скорость невозмущенной волны (c^1), даваемую (2.2), где заменены H_x, H_y на H_n, H_t. Полагая еще $c_n = c^1 + \lambda^1 v_x$, получим $v_x \lambda^1 = c_n - c^1 + \tilde{\lambda}$ и из уравнений (2.4), (2.5) дающих соотношение для $\tilde{\lambda}$, после упрощений получится уравнение

$$D\lambda^1 = (c_n^2 - b^2)\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} + \left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2\right)\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$-\frac{\frac{4}{3}\mu + \frac{A}{2} + K + B}{\rho_0}\,\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0}{\rho_0} P_0 c_n^2}{c_n^2 - b^2}\,\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$-\frac{\mu + \frac{A}{4}}{\rho_0}\,\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} c_n^2}{c_n^2 - b^2}\,\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$-\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{A + 3B + \frac{3}{2}\lambda_0 + C}{\rho_0} - \frac{\zeta c_n}{2}\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) +$$

$$+\frac{\eta c_n}{2}\,\frac{H_x H_y}{4\pi\rho_0} + \frac{\Gamma}{c_n} D \frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}} \tag{2.7}$$

где

$$D = 2c_n^2\left|2c_n^2 - a^2 - b^2 - \frac{H^2}{4\pi\rho_0} - c_n^2\frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0} + \frac{c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}{\left(1 - \frac{\gamma_0}{\varkappa} c_n^2\right)^2}\,\frac{\gamma_0 \tau_0 \gamma}{\rho_0}\right|$$

$$-2\frac{1}{c_n}\Gamma D = c_n\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(a)}}{\rho_0} +$$

$$+\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}c_n\frac{\lambda^{(a)}}{\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0}c_n^2}{c_n^2 - b^2} + \frac{1}{c_n}(c_n^2 - b^2)\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0 P_0}{\rho_0}c_n^2\right)\zeta^0 \tag{2.8}$$

Полагая в (2.7) $\lambda^1 = \Lambda + \frac{\Gamma}{c_n}\frac{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}}$, причем Λ дает значение коэффициента при v_x в нелинейной скорости волны в недиссипативной задаче, то есть при $\Gamma = 0$, подставляя (2.7) в (1.1), где $v_x = u$, можно получить для первого уравнения в (1.1) в задаче термомагнитоупругости вблизи волны $\lambda_{1,2}$ следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d\ln\Phi}{dt}u - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{\Lambda u}{c_n}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad dx = H_1 d\tau,\ H_1 = c_n \tag{2.9}$$

Сравним значение для Λ из (2.7) со значением, полученным в магнитной газодинамике [1]. Для членов порядка $\frac{v_x^2}{\lambda^2}$ включительно имеет место $\frac{\rho_0}{\rho} \approx 1 + \operatorname{div}\bar{u}$ вблизи волн (2.2) и эйлеров тензор напряжений в жидкости $\sigma_{ik}' = -(P - P_0)\delta_{ik}$, согласно уравнению адиабаты, в указанном порядке примет вид

$$P = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \approx P_0\left(\frac{1}{1+\operatorname{div}\bar{u}}\right)^n \approx P_0 - nP_0\operatorname{div}\bar{u} + \frac{n(n+1)}{2}P_0(\operatorname{div}\bar{u})^2$$

Лагранжев тензор напряжений выражается в виде [7]

$$\sigma_{ik} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial x_k}{\partial X_e}\sigma_{ie}', \qquad X_i = x_i + u_i, \quad \frac{\partial x_k}{\partial X_e} \approx \delta_{ke} - \frac{\partial u_k}{\partial x_e}$$

или поскольку вблизи волны $\operatorname{div}\bar{u} \approx -\frac{v_n}{\lambda}$,

$$\sigma_{ik} \approx -\frac{nP_0}{\lambda}v_n\delta_{ik} - nP_0\frac{n+1}{2}\frac{v_n^2}{\lambda^2}\delta_{ik} + \frac{v_n^2}{\lambda^2}nP_0\delta_{ik} - nP_0\frac{v_i n_k}{\lambda^2}v_n$$

Сравнивая со значением σ_{ik} работы [3], стр. 297, (8.16), которое вблизи волн (2.2) имеет вид

$$\sigma_{xx} = -\lambda_0\frac{v_n}{\lambda} + \frac{A}{4}\frac{v_y^2}{\lambda^2} + \frac{v_n^2}{\lambda^2}\left(A + 3B + \frac{3}{2}\lambda_0 + C\right)$$

$$\sigma_{yy} = -\lambda_0 \frac{v_n}{\lambda} + \frac{A}{4} \frac{v_y^2}{\lambda^2} + \frac{v_n^2}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda_0}{2} + B + C \right)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{A}{4} v_n v_y \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{A}{4} + B \right) \frac{v_y v_n}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{A}{4} v_n v_y \frac{1}{\lambda^2} + \frac{v_y v_n}{\lambda^2} \left(\frac{A}{4} + \lambda_0 + B \right)$$

получим значения постоянных

$$\lambda_0 = nP_0, \quad \frac{A}{2} + B + \lambda_0 = 0, \quad A + 3B + \frac{3}{2}\lambda_0 + C = -\lambda_0 \frac{n+1}{2} - \frac{A}{4} \frac{H_z^2 (\lambda^2 - a^2)^2}{H_y^2 \lambda^4} \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.7), получим при $b = \mu = \zeta^0 = \eta = \Gamma = 0$,

$$\lambda^1 = \Lambda, \quad \lambda^1 = \frac{c_n^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}}{2c_n^2 - a^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}} \frac{n+1}{2} + \frac{c_n^2 - a^2}{2c_n^2 - a^2 - \dfrac{H^2}{4\pi\rho_0}} \tag{2.11}$$

что совпадает со значением, полученным в [1].

Для волны $\lambda = \lambda_3$ имеет место по (2.3) $\delta v_n = 0$, и уравнения (1.11) дают условия на характеристике

$$-(\lambda^2 - b^2)\, \delta v_z - \frac{\lambda}{4\pi\rho_0} H_n \delta h_z = \frac{\lambda}{\rho_0} \lambda^{(a)} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \qquad -\lambda \delta h_z = H_n \delta v_z + \zeta^0 \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}$$

При $\lambda^{(a)} = 0$, $\zeta^0 = 0$ получится $\lambda_3^2 = b^2 + \dfrac{H_n^2}{4\pi\rho_0}$, то есть скорость волны не зависит ни от температурных, ни от нелинейных эффектов. В общей задаче

$$v_z \lambda^1 = -\frac{1}{2c_n^2} \frac{H_n^2}{4\pi\rho_0} \zeta^0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \frac{1}{\delta v_z} - \frac{1}{2\rho_0} \lambda^{(a)} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \frac{1}{\delta v_z}$$

где

$$v_z \lambda^1 = \lambda_3 - \sqrt{b^2 + \frac{H_n^2}{4\pi\rho_0}}$$

Учитывая, что для волны λ_3 величиной основного порядка является v_z, в первом уравнении (1.1) следует взять $u = v_z$ и, подставляя λ^1 в (1.1), можно получить

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{d \ln \Phi}{dt} v_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x_2 \partial x_3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \zeta^0 \frac{H_n^2}{\lambda_3^2 4\pi\rho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \lambda^{(a)} \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \qquad dx = \lambda_3 d\tau \tag{2.12}$$

Как видно из (2.12), нелинейные члены выпали из уравнения (1.1) вблизи поперечной волны $\lambda = \lambda_3$.

3. Для определения лучевого решения Φ в (1.1) применим к линейным уравнениям термомагнитоупругости (2.1) метод [8]. В целях общности можно рассмотреть анизотропную упругую среду, для которой при отсутствии температурных напряжений

$$\sigma_{ik} = a_{ikje}\varepsilon_{je}, \quad a_{ikje} = a_{kije} = a_{ikej} = a_{jeik} \tag{3.1}$$

В [8] рассмотрен лучевой метод для такой среды.

В задаче магнитотермоупругости имеем уравнения § 1

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial b_{ikje} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_e}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_j H_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial H_i H_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} - \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$$

$$\nabla^2 \theta = \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \right) \tag{3.2}$$

где

$$b_{ikje} = a_{ikje} + A_{ikje}$$

$$A_{ikje} = H_i H_e \delta_{kj} + H_k H_e \delta_{ij} - 2 H_i H_k \delta_{ej} - H_j H_e \delta_{ik} + H^2 \delta_{ej} \delta_{ik} \tag{3.3}$$

Следует отметить, что $A_{ikje} = A_{kije}$, но $A_{ikje} \neq A_{ikej}$, $A_{jeik} \neq A_{ikje}$, то есть не все свойства симметрии коэффициентов a_{ikje} сохраняются для A_{ikje}, что несколько затрудняет применение лучевого подхода [8] к данной задаче.

Трудности представляет также и термоупругий член, что приводит к тому, что характеристическая форма $A = \frac{1}{\rho}(b_{ikje} + \gamma_0 P_0 \delta_{ik} \delta_{je}) \times$ $\times S_i S_j \tau_e \tau_k$, где $\tau_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k}$ — компоненты вектора нормали к волне, S_i — координаты собственного вектора характеристической матрицы для уравнений (3.2), не является однородной функцией по τ_{i}. Тем не менее, лучевой метод применим к (3.2), и в результате получается решение вдоль луча для вектора перемещения

$$u_i = S_i \Phi f_0 (t - \tau), \qquad \Phi = \frac{1}{\sqrt{\rho J}} e^{-\int \frac{K}{\rho} d\tau_\lambda} \text{const} \tag{3.4}$$

где S_i есть собственный вектор характеристической матрицы, J — функциональный определитель для перехода от декартовых к лучевым координатам, причем $J = c_n \Sigma$ [6], Σ — площадь волны внутри заданной лучевой трубки, τ_λ — параметр вдоль луча, даваемый уравнением луча

$$\frac{dt}{d\tau_\lambda} = \tau_k \frac{\partial A}{\partial \tau_k}, \qquad K = \frac{\tau_i^2 \gamma_0 \eta (\tau_e S_e)^2}{\left(\tau_i^2 - \frac{\tau_0}{\varkappa} \right)^2}, \quad f_0 (t - \tau)$$

дает профиль волны. Лишь для квадратичной однородной по τ_k зависимости, то есть в магнитоупругости, $\tau_k \dfrac{\partial A}{\partial \tau_k} = 1$, $\tau_\lambda = t$. В частности, в одномерной задаче по x получится

$$\tau_\lambda = \frac{1}{2}\, x\, \frac{1 - \frac{\tau_0}{\varkappa} c_n^2}{a^2 - c_n^4 \frac{\tau_0}{\varkappa}}$$

Для задачи магнитоупругости получится из (3.4)

$$\rho \Phi^2 \sum c_n = \text{const} \tag{3.5}$$

что выражает закон сохранения энергии волнового фронта [9, 10]. Для определения $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}$, $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2}$, $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma}$ в уравнениях (2.9), (2.12) следует использовать (1.2) и уравнения (2.2), (2.3) для скоростей волн $c_n^{1,2}$ и $c_n^{(3)}$. Для волны $c_n = c_n^{(3)}$ получится

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = c_n - 2\frac{b^2}{c_n} - \frac{a_1^2 b^2}{c_n^3} - \frac{1}{c_n^3}(c_n^2 - b^2)^2 + \frac{1}{c_n^3}\frac{H_z^2}{4\pi\rho_0} b^2$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = c_n - 2\frac{b^2}{c_n} - \frac{a_1^2 b^2}{c_n^3} - \frac{1}{c_n^3}(c_n^2 - b^2)^2 + \frac{1}{c_n^3}\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} b^2$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = -b^2 \frac{H_y H_z}{c_n^3 4\pi\rho_0}, \qquad a_1^2 = \frac{H^2}{4\pi\rho_0} \tag{3.6}$$

Для $H_z = 0$, $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$, то есть выбором осей y, z всегда можно (и в общей задаче) добиться выпадения из (1.1) смешанной производной. При $b = 0$, то есть в магнитной газодинамике, в уравнении (2.12) [10], $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} = \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$.

Для волн $c_n^{1,2}$, даваемых (2.2), указанные коэффициенты несколько громоздки, однако в задаче магнитоупругости они упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} = \frac{c_n^2 \mu^2 - \omega\nu}{c_n^3 \mu^3}\left\{(a^2 - b^2)\, a_1^2 - c_n^2 (a^2 + b^2 + a_1^2) - \frac{H_z^2}{4\pi\rho_0}(a^2 - b^2)\right\} +$$

$$+ \frac{2c_n^2 (a^2 + a_1^2)\, b^2 \mu^2 - \omega\nu\, (c_n^4 - a^2 b^2 - a_1^2 b^2)}{c_n^3 \mu^3}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = (a^2 - b^2)\,\frac{H_z H_y}{4\pi\rho_0}\,\frac{c_n^2 \mu^2 - \nu\omega}{c_n^3 \mu^3} \tag{3.7}$$

причем формула для $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma_1^2}$ имеет то же выражение, что и $\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta_1^2}$, где заменено H_z на H_y,

$$\omega = c_n^4 - c_n^2(a^2 + b^2 + a_1^2) - b^2(a^2 + a_1^2)$$

$$\nu = 6c_n^2 - a_0^2 - a_1^2 - b^2$$

Остается выяснить смысл величин v_{x_2}, v_{x_3}, фигурирующих в (1.1), для задачи магнитоупругости вблизи волн $\lambda_{1,2}$. Из уравнения индукции в проекции на оси x, z и уравнения движения в проекции на ось z в (2.1) можно найти после упрощения

$$-c_n\frac{\partial h_x}{\partial x} = H_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - H_x\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$-c_n\frac{\partial h_z}{\partial x} = H_x\frac{\partial v_z}{\partial x}, \qquad \vartheta = P_0 c_n v_x$$

$$-\frac{\partial K}{\partial x} = \left(\frac{\mu}{\rho_0} - c_n^2 + \frac{\gamma_0}{\rho_0}P_0c_n^2\right)\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\gamma_0}{\rho_0}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}c_n \tag{3.8}$$

где $K = \left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)v_z$.

Используя (2.2) и обозначая $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, окончательно можно получить, что в (1.1) $v_{x_2} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$, $v_{x_3} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$

$$h_x = -\frac{1}{c_n}H_y\frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad h_z = -\frac{H_x}{c_n}v_z$$

$$v_z = \frac{c_n^2 - b^2}{c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{3.9}$$

откуда ясен смысл v_{x_2}, v_{x_3}, причем термические эффекты не влияют на (3.9). Таким образом, получены упрощенные нелинейные уравнения (1.1), (1.9) вблизи волн $\lambda_{1,2}$ и (2.12) вблизи волны λ_3.

4. Определим теперь нелинейные уравнения вблизи волн $\lambda_{4,5}$, близких по свойствам магнитоупругим волнам и соответствующих колебаниям низкой частоты, что дает низшие производные в (1.10). Из (1.10) получим в основном порядке

$$\frac{1}{\chi}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \gamma_1\frac{\partial\,\mathrm{div}\,\bar{u}}{\partial t} = 0, \qquad \delta\theta = \frac{\gamma_0 T}{c_0}\delta v_x \tag{4.1}$$

Тогда в линейном решении вблизи волны получится $\lambda_{4,5} = c_n$,

$$\delta h_y = \frac{1}{c_n} \frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{c\rho_0}}{\dfrac{H_y}{4\pi\rho_0}} \delta v_x$$

$$\delta v_y = -\frac{H_x}{H_y} \frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{c\rho_0}}{c_n^2 - b^2} \delta v_x, \quad \delta h_z = \delta v_z = \delta h_x = 0 \qquad (4.2)$$

где для скорости волны c_n имеет место

$$c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c} = \frac{\dfrac{H_y^2}{4\pi\rho_0}(c_n^2 - b^2)}{c_n^2 - b^2 - \dfrac{H_x^2}{4\pi\rho_0}} \qquad (4.3)$$

В основном порядке из (1.10) и (4.1) $\operatorname{div} \overline{q} = \lambda_1 \nabla^2 \theta$,

$$\delta\theta = \frac{T\gamma_0}{c^k} \delta v_x + \chi v_x \delta v_x - \frac{1}{c^2 c_n^2} T \gamma_0 \lambda_1 \nabla^2 v_x + \frac{T\gamma_0}{cc_n} n_y \delta v_y \qquad (4.4)$$

где $\chi = -\dfrac{T}{cc_n^2}\left(2\gamma_0 - \nu_1 + \dfrac{2\nu_3 T\gamma_0}{c} + \dfrac{\gamma_0^2}{c}\right) - \dfrac{2T\gamma_0 + T\nu_0}{cc_n^2} \dfrac{v_y \delta v_y}{v_x \delta v_x}$, причем

$\dfrac{v_y}{v_x}$ дается (4.2).

Повторяя выкладки § 2, получим $c_n = c^1 + \lambda^1 v_x$

$$D_1 \lambda^1 = (c_n^2 - b^2)\frac{H_y^2}{4\pi\rho_0} + \left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$- \frac{\dfrac{7}{3}\mu + \dfrac{3A}{4} + K + B}{\rho_0} \frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{4\pi\rho_0}}{c_n^2 - b^2} \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0} -$$

$$- \left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) \frac{A + 3B + \dfrac{3}{2}\lambda_0 + C}{\rho_0} +$$

$$+ \frac{\chi}{2} \frac{\gamma_0}{\rho_0} c_n^2 \left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) - \frac{\gamma_3 c_n}{2}\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right) +$$

$$+ \frac{\ddot{\gamma}_3 c_n}{2} \frac{H_x H_y}{4\pi\rho_0} + \Gamma_1 D_1 \frac{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}} \qquad (4.5)$$

где

$$\zeta_3 = \left(-\frac{\gamma_0 - \nu_1}{c_n^2}\frac{\gamma_0 T}{c} + \nu_3 \frac{\gamma_0^2 T^2}{c^2 c_n^2}\right)\frac{c_n}{\rho_0}$$

$$\eta_3 = -2(\gamma_0 + \nu_2)\frac{\gamma_0 T}{\rho_0 c c_n}\frac{H_x}{H_y}\frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}}{c_n^2 - b^2}$$

$$D_1 = c_n^2\left(2c_n^2 - a^2 - b^2 - \frac{H^2}{4\pi\rho_0} - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)$$

$$-2D_1\Gamma_1 = c_n^2\left(c_n^2 - b^2 - \frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\lambda^{(1)} + 2\lambda^{(a)}}{\rho_0} +$$

$$+\frac{H_x^2}{4\pi\rho_0}c_n^2\frac{\lambda^{(a)}}{\rho_0}\frac{c_n^2 - a^2 - \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}}{c_n^2 - b^2} + (c_n^2 - b^2)\left(c_n^2 - a^2 - \frac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}\right)\zeta^0 \tag{4.6}$$

Полагая в (4.5) $\lambda^1 = \Lambda_1 + \dfrac{\Gamma_1}{c_n}\dfrac{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}{v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}$, причем Λ_1 дает значение λ^1 при $\Gamma_1 = 0$, подставляя (4.5) в (1.1), где $v_x = u$, можно для первого уравнения в (1.1) в задаче вязкотермомагнитоупругости вблизи волн $\lambda_{4,5}$ получить

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d\ln\Phi}{dt}u - \frac{1}{2}c_n\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{\Lambda_1 u}{c_n}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \Gamma_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad dx = c_n d\tau \tag{4.7}$$

где Λ_1, Γ_1 даются (4.5), (4.6). Мы видим, что для волн $\lambda_{4,5}$ параметр τ_0 не влияет на вид уравнения (4.7), что также отмечено в [11, 12], в то время как λ_1 входит как эффект диффузии волны наряду с вязкими коэффициентами $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(a)}$ и ζ^0. Смысл величин v_{x_2}, v_{x_3}, как видно из (3.9), не зависит от температурных эффектов, поэтому v_{x_2}, v_{x_3} даются и здесь (3.9).

Значение лучевого решения совпадает с магнитоупругим и дается (3.5), только вместо a^2 нужно писать $a^2 + \dfrac{\gamma_0^2 T}{\rho_0 c}$. Наконец, коэффициенты $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}$, $\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}$ в (4.7) совпадают с магнитоупругими (3.7), где a^2 заменяется вышеуказанным способом. Таким образом, получены упрощенные нелинейные уравнения движения термомагнитоупругой среды (1.1), которые конкретизированы в виде (2.9), (2.7), (2.8), (3.4), (3.7) для волн $\lambda_{1,2}$, в виде (2.12), (3.6), (3.5) для волны λ_3 и в виде (4.5), (4.6), (4.7), (3.7) для волн $\lambda_{4,5}$.

Институт Механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 III 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՋԵՐՄԱՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՃԱԿԱՏՆԵՐԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

Որոշվում են մածուցիկ ջերմամագնիսաառաձգական միջավայրի շարժման պարամետրերը թույլ հարվածային ալիքների շրջակայքում: Ստացված են պարզեցված հավասարումներ, որոնք նկարագրում են պարամետրերի փոփոխությունները դանդաղ և արագ ջերմաառաձգական, ձևափոխված ալֆենյան դանդաղ և արագ ձևափոխված մագնիսաառաձգական ալիքների մոտ:

THE EQUATIONS OF VISCOUS THERMOMAGNETOELASTIC NONLINEAR MEDIUM NEAR THE WAVE FRONTS

A. G. BAGDOEV

Summary

The problem of determination of the parameters of medium motion near a wave for a viscous thermomagnetoelastic medium is considered. The simplified equations, describing the neighbourhood of fast and slow thermoelastic, modified Alfen waves as well as of fast and slow modified magnetoelastic waves, are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследование движения среды в окрестности точки касания ударных волн. Ж. вычис. матем. и матем. физики, т. 12, № 6, 1972.
2. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Вывод нелинейных уравнений движения среды вблизи волны. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
3. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. Изд. „Наука", М., 1966.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. „Мир", М., 1970.
5. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика. Изд. „Высшая школа", М., 1965.
6. *Jeffrey A., Tanuiti T.* Nonlinear wave propagation, New-York, 1964.
7. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. „Мир" М., 1972.
8. *Бабич В. М.* Лучевой метод для анизотропной упругой среды. Вопросы динамической теории. Л., т. V, 1961.
9. *Рыжов О. С., Шефтер Г. П.* Об энергии звуковых волн. ПММ. т. XXVI, в. 5, 1962.
10. *Минасян М. М.* О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН Арм.ССР, т. LV, № 5, 1972.
11. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Изд. АН Эстонской ССР, Таллин, 1972.
12. *Попов Е. Б.* Динамическая связная задача термоупругости. ПММ, № 2, 1967.