

Г. Б. ВЕРМИШАН

## КРУЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО СОСТАВНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Исследовано кручение составного призматического вязко-упругого стержня некругового сечения при действии вибрационной нагрузки.

Прилагаемая нагрузка меняется по гармоническому закону, причем ее амплитуда постоянна. Для установления связи между деформациями сдвига и касательными напряжениями, возникающими в стержне, необходимо знать составляющие комплексного модуля для отдельных материалов.

Как показано в работе [1], составляющие комплексного модуля существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры в каждом участке стержня получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем.

В предельном стационарном случае температура не будет зависеть от времени, и вопрос сводится к решению дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Задача решена для стержня, составленного из двух различных вязко-упругих материалов.

Принято, что на боковой поверхности стержня температура неизменна и равна температуре окружающей среды, а на линии раздела различных материалов одной и другой областей температура и тепловой поток равны. Кроме того, предполагается, что температура вдоль оси стержня не изменяется.

1. Рассмотрим кручение призматического стержня, составленного из двух различных вязко-упругих материалов, на одном основании которого действуют усилия, меняющиеся по гармоническому закону, статически эквивалентные некоторому крутящему моменту.

Пусть компоненты деформации в поперечном сечении стержня в каждой области изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(j)} &= x^0 (\partial \varphi_j / \partial x - y) \cos \omega t \\ \tau_{yz}^{(j)} &= x^0 (\partial \varphi_j / \partial y + x) \cos \omega t \quad \text{на } S_j \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В этом случае соответствующие компоненты напряжения будут

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(j)} &= \tilde{\tau}_{xz}^{(j)} \cos (\omega t - \varphi_j^{(0)}) \\ \tau_{yz}^{(j)} &= \tilde{\tau}_{yz}^{(j)} \cos (\omega t - \varphi_j^{(0)}) \quad \text{на } S_j \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha^0$  — постоянная, равная углу закручивания,  $\varphi_j(x, y)$  — некоторые функции, подлежащие определению,  $\varphi_j^{(0)}$  — сдвиг фаз между деформацией и напряжением,  $S_j$  — области поперечного нормального сечения стержня, соответствующие различным материалам. Остальные компоненты деформации и напряжения отсутствуют.

Связь между компонентами напряжения и деформации возьмем в виде

$$\varepsilon_{xz}^{(j)} = \int_{-\infty}^t K_j(T, t-\tau) \gamma_{xz}^{(j)}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_{yz}^{(j)} = \int_{-\infty}^t K_j(T, t-\tau) \gamma_{yz}^{(j)}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

( $j = 1, 2$ )

Подставляя значения  $\gamma_{xz}^{(j)}$ ,  $\gamma_{yz}^{(j)}$  из (1.1) в (1.3) и вводя переменную  $\zeta = t - \tau$ , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}^{(j)} &= \alpha^0 \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - y \right) \left\{ \left[ \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \\ \varepsilon_{yz}^{(j)} &= \alpha^0 \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + x \right) \left\{ \left[ \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \operatorname{Im} \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем комплексный модуль [1]

$$\begin{aligned} E_j^*(T, \omega) &= \int_0^{\infty} K_j(T, \zeta) e^{i\omega\zeta} d\zeta = E_j'(T, \omega) + iE_j''(T, \omega) = \\ &= E_j(T, \omega) \cos \varphi_j^{(0)} + iE_j(T, \omega) \sin \varphi_j^{(0)} \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}^{(j)} &= \alpha^0 (\partial \varphi_j / \partial x - y) [E_j'(T, \omega) \cos \omega t + E_j''(T, \omega) \sin \omega t] \\ \varepsilon_{yz}^{(j)} &= \alpha^0 (\partial \varphi_j / \partial y + x) [E_j'(T, \omega) \cos \omega t + E_j''(T, \omega) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Можно установить связь между амплитудами напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xz}^{(j)} &= \alpha^0 (\partial \varphi_j / \partial x - y) E_j(T, \omega) \\ \tilde{\varepsilon}_{yz}^{(j)} &= \alpha^0 (\partial \varphi_j / \partial y + x) E_j(T, \omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для  $E_j(T, \omega)$  и  $E_j^*(T, \omega)$  можно воспользоваться линейной аппроксимацией. При этом  $E_j(T, \omega)$  можно считать постоянным

$$E_j^*(T, \omega) = A_j, \quad E_j(T, \omega) = B_j + C_j T_j^* \quad (j=1, 2) \quad (1.8)$$

Кроме того, так как обычно  $E_j^*(T, \omega) \ll E_j(T, \omega)$ , то величиной  $E_j^*(T, \omega)$  по сравнению с  $E_j(T, \omega)$  можно пренебречь. Из уравнений равновесия и совместности получаем, что искомые функции  $\varphi_j(x, y)$  удовлетворяют уравнению Лапласа в каждой области  $S_j$

$$\Delta \varphi_j(x, y) = 0 \quad \text{на } S_j \quad (j=1, 2) \quad (1.9)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \quad \text{на } l_1 \\ d\varphi_2/dn &= y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \quad \text{на } l_2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$E_2 d\varphi_2/dn - E_1 d\varphi_1/dn = (E_2 - E_1)[y \cos(n, x) - x \cos(n, y)] \quad \text{на } l_1$$

где  $l_1$  — граница области  $S_1$ ,  $l_2$  — граница области  $S_2$ . Введем сопряженные гармонические функции  $\Psi_j(x, y)$ . Находим, что на границах области  $S_j$  функции  $\Psi_j(x, y)$  удовлетворяют следующему граничному условию:

$$\begin{aligned} d\Psi_1/dn &= d\Psi_2/dn \quad \text{на } l_1 \\ \Psi_2(x, y) &= 1/2(x^2 + y^2) \quad \text{на } l_2 \\ E_2 \Psi_2(x, y) - E_1 \Psi_1(x, y) &= 1/2(E_2 - E_1)(x^2 + y^2) \quad \text{на } l_1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Введем аналитические функции комплексного переменного в области  $S_j$

$$F_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\Psi_j(x, y) \quad (j=1, 2) \quad (1.12)$$

Пусть

$$z = x + iy = \omega_1(\zeta) \quad (1.13)$$

соотношение, отображающее плоскость  $z = x + iy$  на плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ , так, чтобы контурам  $l_1$  и  $l_2$  соответствовали концентрические окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  радиусов  $\rho = R$  и  $\rho = 1$  ( $R < 1$ ). Область  $S_1$  будет соответствовать кругу  $|\zeta| < R$ , а область  $S_2$  — круговое кольцо  $R < |\zeta| < 1$ .

Из (1.12) и (1.13) получаем

$$\varphi_j + i\Psi_j = F_j(z) = F_j[\omega_1(\zeta)] = f_j(\zeta) \quad (j=1, 2) \quad (1.14)$$

соответственно в круге  $|\zeta| < R$  и в кольце  $R < |\zeta| < 1$ . Граничные условия (1.11) преобразуются следующим образом:



$$\partial \Psi_1 / \partial \rho = \partial \Psi_2 / \partial \rho \text{ на } \gamma_1$$

$$\Psi_2 = 1/2 \omega_1 (\sigma_2) \overline{\omega_1 (\sigma_2)} + \text{const на } \gamma_2 \quad (1.15)$$

$$E_2 \Psi_2 - E_1 \Psi_1 = 1/2 (E_2 - E_1) \omega_1 (\sigma_1) \overline{\omega_1 (\sigma_1)} + \text{const на } \gamma_1$$

где через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  обозначены точки на окружностях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Возьмем

$$f_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a'_k + i b'_k) \zeta^k \text{ в круге } |\zeta| < R \quad (1.16)$$

$$f_2(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a''_k + i b''_k) \zeta^k \text{ в кольце } R < |\zeta| < 1$$

Функции  $\omega_1(\zeta)$  представим в виде степенного ряда

$$\omega_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(0)} \zeta^k \quad (1.17)$$

где  $a_k^{(0)}$  — действительные постоянные.

Используя граничные условия (1.15), после элементарных вычислений получаем

$$f_1(\zeta) = i \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \zeta^k, \quad f_2(\zeta) = i \sum_{k=1}^{\infty} (b''_k \zeta^k + b''_{-k} \zeta^{-k}) \quad (1.18)$$

где

$$b'_k = \frac{(1 + \lambda_0) R^k q_k(1) - \lambda_0 q_k(R) (1 + R^{2k})}{2R^k (1 - \lambda_0 R^{2k})}, \quad b''_k = \frac{q_k(1) - \lambda_0 R^k q_k(R)}{2(1 - \lambda_0 R^{2k})} \quad (1.19)$$

$$b''_{-k} = -\frac{\lambda_0 R^k [R^k q_k(1) - q_k(R)]}{2(1 - \lambda_0 R^{2k})}, \quad \lambda_0 = \frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}$$

где  $q_k(\rho)$  — коэффициенты разложения

$$\omega_1(\sigma) \overline{\omega_1(\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\rho) \cos k\theta, \quad \sigma = \rho e^{i\theta} \quad (1.20)$$

Вычислим момент, действующий на основание стержня

$$M = \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} (x \tau_{yz}^{(j)} - y \tau_{xz}^{(j)}) dx dy = \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} (x \tilde{\tau}_{yz}^{(j)} - y \tilde{\tau}_{xz}^{(j)}) \cos(\omega t - \varphi_j^{(0)}) dx dy =$$

$$= \rho^2 \left\{ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left[ x \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + x \right) - y \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - y \right) \right] E_j(T, \omega) \cos \varphi_j^{(0)} dx dy \right\} \cos \omega t +$$

$$\begin{aligned}
 & + x^0 \left\{ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left[ x \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + x \right) - y \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - y \right) \right] E_j(T, \omega) \sin \varphi_j^{(0)} dx dy \right\} \sin \omega t = \\
 & = M_0 \cos(\omega t - \varphi_0^{(0)})
 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь  $M_0$  — амплитуда момента  $M$ , а  $\varphi_0^{(0)}$  — соответствующий сдвиг фаз. На основании этого получаем

$$\begin{aligned}
 M_0 = x^0 & \left\{ \left[ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) E_j(T, \omega) \cos \varphi_j^{(0)} dx dy \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \left[ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) E_j(T, \omega) \sin \varphi_j^{(0)} dx dy \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание (1.5) и (1.22), получим

$$x^0 = M_0^2 / Q \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q = & \left[ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) E_j(T, \omega) dx dy \right]^2 + \\
 & + \left[ \sum_{j=1}^2 \iint_{S_j} \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) E_j(T, \omega) dx dy \right]^2 \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

откуда, переходя на плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ , получаем [2]

$$\begin{aligned}
 Q = & \left\{ \sum_{j=1}^2 \iint_{\sigma_j} \left[ |\omega_1(\zeta)|^2 - \operatorname{Im} \left( \omega_1(\zeta) \frac{f_j(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)} \right) \right] E_j(T, \omega) |\omega_1'(\zeta)|^2 d\zeta d\bar{\zeta} \right\}^2 + \\
 & + \left\{ \sum_{j=1}^2 \iint_{\sigma_j} \left[ |\omega_1(\zeta)|^2 - \operatorname{Im} \left( \omega_1(\zeta) \frac{f_j(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)} \right) \right] E_j(T, \omega) |\omega_1'(\zeta)|^2 d\zeta d\bar{\zeta} \right\}^2 \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

где через  $\sigma_1$  обозначена область, представляющая круг  $|\zeta| < R$ , а через  $\sigma_2$  — кольцо  $R < |\zeta| < 1$ .

$\omega_1(\zeta)$  — отображающая функция, а  $f_j(\zeta)$  дается по формуле (1.18). Работа, совершаемая при вязко-упругой деформации, будет равна

$$W_A = \int_{-\sigma_j^0}^{\sigma_j^0} \gamma_j^* d\sigma_j^* \text{ на } S_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.26)$$

$$\gamma_j^* = \sqrt{[\gamma_{xz}^{(j)}]^2 + [\gamma_{yz}^{(j)}]^2}, \quad z_j^* = \sqrt{[z_{xz}^{(j)}]^2 + [z_{yz}^{(j)}]^2} \quad (1.27)$$

Вводя безразмерные координаты  $\alpha^* = \gamma_j^*/\gamma_j^0$ ,  $\beta^* = z_j^*/z_j^0$ , получим [1]

$$W_j = \int_{-1}^1 \gamma_j^0 z_j^0 \alpha^* d\beta^* = \pi \gamma_j^0 z_j^0 \sin \varphi_j^{(0)} = \pi \alpha^{0^3} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + x \right)^2 \right] E_j(T, \omega) \quad (1.28)$$

откуда на основании (1.23) после перехода на плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$  будем иметь

$$W_j = \frac{|f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2}{|\omega_1(\zeta)|^2} \frac{\pi M_0^2 E_j(T, \omega)}{Q} \quad (1.29)$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязко-упругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла в каждой области

$$q_j^* = \frac{|f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2}{|\omega_1(\zeta)|^2} \frac{i\omega k_j^* M_0^2 E_j(T, \omega)}{2Q} \text{ на } z_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.30)$$

Здесь  $k_j^*$  — величины, обратные механическому эквиваленту тепла,  $\lambda$  — коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в каждой области  $z_j$  ( $j = 1, 2$ ) принимает вид

$$L_j^*(T_j) \equiv \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_j^*}{\partial \eta^2} + \frac{\nu_j^*}{Q} E_j(T_j^*, \omega) |f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta)\overline{\omega_1(\zeta)}|^2 = 0 \quad (1.31)$$

на  $z_j$  ( $j = 1, 2$ )

где

$$\nu_j^* = \frac{i\omega k_j^* M_0^2}{2a_j^* c_j^*} \quad (1.32)$$

Здесь  $a_j^*$  — коэффициент теплопроводности различных материалов,  $c_j^*$  — объемная теплоемкость.

Граничные условия для температуры таковы

$$\begin{aligned} T_1^* &= T_2^* \text{ на окружности } |\zeta| = R \\ k_2 d T_2^*/dn &= k_1 d T_1^*/dn \text{ на окружности } |\zeta| = R \\ T_2^* &= T_0 \text{ на окружности } |\zeta| = 1 \end{aligned} \quad (1.33)$$

то есть на линии раздела различных материалов температура и тепловой поток равны, а температура на боковой поверхности стержня равна температуре окружающей среды;  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты теплопроводности одного и другого материала.



Используя (1.8) и вводя полярные координаты, уравнение (1.31) приводим к виду

$$L_j(T_j) \equiv \Delta T_j + f_j^*(\rho, \vartheta) T_j = -F_j^*(\rho, \vartheta) \quad \text{на } \sigma_j \quad (j=1, 2) \quad (1.34)$$

где

$$f_j^*(\rho, \vartheta) = \frac{\nu_j^* C_j}{Q} |f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1(\zeta)}|^2$$

$$F_j^*(\rho, \vartheta) = \frac{\nu_j^* B_j}{Q} |f_j(\zeta) - i\omega_1(\zeta) \overline{\omega_1(\zeta)}|^2, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta} \quad (j=1, 2) \quad (1.35)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \quad (1.36)$$

Граничное условие преобразуется следующим образом:

$$T_1 = T_2 \quad \text{при } \rho = R$$

$$k_2 \partial T_2 / \partial \rho = k_1 \partial T_1 / \partial \rho \quad \text{при } \rho = R \quad (1.37)$$

$$T_2 = T_0 \quad \text{при } \rho = 1$$

Примем

$$T_1 = T_2 = T_*(\vartheta) \quad \text{при } \rho = R \quad (1.38)$$

где  $T_*(\vartheta)$  — пока неизвестная функция, подлежащая определению.

Ищем решение уравнений (1.34) при граничном условии (1.37), соответственно, в виде

$$T_1(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{\rho_0^2}{R^2} T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \quad (1.39)$$

$$T_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{(\rho_0^2 - R^2) T_0 + (1 - \rho_0^2) T_*(\vartheta_0)}{1 - R^2} + \int_0^{2\pi} \int_R^1 G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \quad (1.40)$$

где  $G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$  — функция Грина уравнения Лапласа для круга;  $G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$  — функция Грина уравнения Лапласа для кольца  $R < |\zeta| < 1$  [3];  $\mu_1(\rho, \vartheta)$  и  $\mu_2(\rho, \vartheta)$  — произвольные неизвестные функции, непрерывные и имеющие непрерывные производные соответственно в круге и в кольце.

После подстановки (1.39) и (1.40) в (1.34) для нахождения  $\mu_1(\rho, \vartheta)$  и  $\mu_2(\rho, \vartheta)$  получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода [2]

$$\mu_j(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) + \int_{\sigma_j} \mathcal{K}_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_j(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \quad (j=1, 2) \quad (1.41)$$

где

$$\Phi_1(\rho_0, \vartheta_0) = F_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + L_1 \left\{ \frac{\rho_0^2}{R^2} T_*(\vartheta_0) \right\} \quad (1.42)$$

$$\Phi_2(\rho_0, \vartheta_0) = F_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + L_2 \left\{ \frac{(\rho_0^2 - R^2) T_0 + (1 - \rho_0^2) T_*(\vartheta_0)}{1 - R^2} \right\}$$

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = f_1^*(\rho_0, \vartheta_0) G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \quad (1.43)$$

$$K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = f_2^*(\rho_0, \vartheta_0) G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta)$$

$f_1^*(\rho_0, \vartheta_0)$  и  $F_1^*(\rho, \vartheta)$  — даются формулой (1.35).

Из граничных условий (1.37) первое и третье удовлетворяются автоматически; из второго условия получаем уравнение для определения неизвестной функции  $T_*(\vartheta_0)$

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{k_2 R^2 T_0}{k_1(1 - R^2) + k_2 R^2} + \frac{R(1 - R^2)}{2[k_1(1 - R^2) + k_2 R^2]} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left\{ k_2 \int_0^{2\pi} \int_0^R G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho_2(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta - \right.$$

$$\left. - k_1 \int_0^{2\pi} \int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho_1(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right\}_{\rho=R} \quad (1.44)$$

2. Для решения интегральных уравнений (1.41) их ядра заменим вырожденными. Разлагаем ядра в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций соответственно в круге  $|\zeta| < R$  и в кольце  $R < |\zeta| < 1$

$$|z_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0), z_m^{(j)}(\rho, \vartheta)| \quad \text{на } z_j \quad (j = 1, 2; k, m = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

в виде

$$K_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km}^{(j)} z_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) z_m^{(j)}(\rho, \vartheta) \quad \text{на } z_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.2)$$

Для коэффициентов  $A_{km}^{(j)}$  получаем следующее выражение:

$$A_{km}^{(j)} = \iint_{z_j} \left\{ \iint_{z_j} K_j^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) z_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) z_m^{(j)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right\} z_m^{(j)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \quad (2.3)$$

$$(j = 1, 2)$$

После преобразования интегральные уравнения (1.41) принимают вид

$$\rho_j(\rho_0, \vartheta_0) = \sum_{k, m=1}^N A_{km}^{(j)} z_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) \iint_{z_j} z_m^{(j)}(\rho, \vartheta) \rho_2(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) \quad (2.4)$$

$$(j = 1, 2)$$



Как известно [4], решение интегральных уравнений с вырожденным ядром можно свести к решению линейной системы алгебраических уравнений.

После некоторых вычислений получаем [2]

$$\mu_j(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_k^{(j)} \tau_k^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) \text{ на } \tau_j \quad (j=1, 2) \quad (2.5)$$

$$Y_k^{(j)} = \sum_{m=1}^N A_{km}^{(j)} X_m^{(j)} \quad (2.6)$$

где постоянное  $X_m^{(j)}$  определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(j)} - \sum_{k=1}^N A_{mk}^{(j)} X_k^{(j)} = \Phi_m^{(j)} \quad (j=1, 2; m=1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

где

$$\Phi_m^{(j)} = \int \int_{\tau_j} \Phi_j(\rho_0, \vartheta_0) \tau_m^{(j)}(\rho_0, \vartheta_0) \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \quad (m=1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

Подставляя значения  $\mu_1(\rho_0, \vartheta_0)$  и  $\mu_2(\rho_0, \vartheta_0)$  из (2.5) в (1.39) и (1.40), соответственно получаем

$$T_1(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{\rho_0^2}{R^2} T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \Phi_1(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta + \\ + \sum_{k=1}^N Y_k^{(1)} \int_0^{2\pi} \int_0^R G(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \tau_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad 0 < \rho_0 < R \quad (2.9)$$

$$T_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{(\rho_0^2 - R^2) T_0 + (1 - \rho_0^2) T_*(\vartheta_0)}{1 - R^2} - \int_0^{2\pi} \int_R^1 G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \Phi_2(\rho, \vartheta) \times \\ \times \rho d\rho d\vartheta + \sum_{k=1}^N Y_k^{(2)} \int_0^{2\pi} \int_R^1 G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \tau_k^{(2)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad R < \rho_0 < 1 \quad (2.10)$$

где  $\Phi_1(\rho, \vartheta)$  и  $\Phi_2(\rho, \vartheta)$  даются формулами (1.42).

В решение задачи входит неизвестная функция  $T_*(\vartheta)$ , для определения которой из (2.5) подставляем значения  $\mu_1(\rho_0, \vartheta_0)$  и  $\mu_2(\rho_0, \vartheta_0)$  в уравнение (1.44), после преобразования получаем следующие сингулярные интегро-дифференциальные уравнения относительно функции  $T_*(\vartheta)$

$$T_*(\vartheta_0) = \Psi(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \left[ \frac{h_1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} + H_1(\vartheta - \vartheta_0) \right] T_*(\vartheta) d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} H_2(\vartheta, \vartheta_0) T_*(\vartheta) d\vartheta \quad (2.11)$$

при граничных условиях

$$T_*(0) = T_*(2\pi), \quad T'_*(0) = T'_*(2\pi) \quad (2.12)$$

Функция  $\Psi(\vartheta_0)$  и ядра  $H_1(\vartheta - \vartheta_0)$ ,  $H_2(\vartheta, \vartheta_0)$  — некоторые регулярные функции (явные выражения для них не приводим),

$$\lambda_1 = \frac{k_1(1 - R^2) + k_2}{2[k_1(1 - R^2) + k_2 R^2]} \quad (2.13)$$

3. Для решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения (2.11) при граничных условиях (2.12) сведем его к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого преобразуем его и воспользуемся известной формулой обращения Гильберта [5, 6]

$$T'_*(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi\lambda_1} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \left\{ T_*(\vartheta) - \Psi(\vartheta) + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} [H_{11}(t - \vartheta) - H_2(t, \vartheta)] T_*(t) dt \right\} d\vartheta + \alpha_0 \quad (3.1)$$

при этом должно выполняться равенство

$$\int_0^{2\pi} \left\{ T_*(\vartheta_0) - \Psi(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} [H_{11}(t - \vartheta_0) - H_2(t, \vartheta_0)] T_*(t) dt \right\} d\vartheta_0 = 0 \quad (3.2)$$

В (3.1)  $\alpha_0$  — постоянная, подлежащая определению.

Интегрируя обе части (3.1), для определения  $T_*(\vartheta_0)$  получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$T_*(\vartheta_0) = \int_0^{2\pi} K(t, \vartheta_0) T_*(t) dt + f(\vartheta_0) + \alpha_0 \vartheta_0 + \alpha_1 \quad (3.3)$$

где

$$K(t, \vartheta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1} \left\{ \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right| + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} [H_{11}(y - t) - H_2(y, t)] \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy \right\} \quad (3.4)$$

$$f(\vartheta_0) = -\frac{1}{\pi\lambda_1} \int_0^{2\pi} \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right| \Psi(t) dt \quad (3.5)$$

$\alpha_1$  — постоянная интегрирования.

Из граничных условий (2.12) находим, что  $\alpha_0 = 0$ , а из (3.2) и (3.3) получим

$$z_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(y, t) T_*(y) dy dt \quad (3.6)$$

4. Для решения интегрального уравнения (3.3) его ядро заменим вырожденным. Разлагаем ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k\vartheta, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\vartheta_0 \right\} \quad (k, m = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

в виде

$$K(t, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km}^{(0)} \cos kt \cos m\vartheta_0 \quad (4.2)$$

где

$$A_{km}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K(t, \vartheta_0) \cos kt dt \cos m\vartheta_0 d\vartheta_0 \quad (4.3)$$

После преобразования интегральное уравнение (3.3) принимает следующий вид:

$$T_*(\vartheta_0) - \frac{1}{\pi} \sum_{k, m=1}^N A_{km}^{(0)} \cos m\vartheta_0 \int_0^{2\pi} T_*(t) \cos kt dt = f(\vartheta_0) + z_1 \quad (4.4)$$

Решение интегрального уравнения (4.4) имеет вид

$$T_*(\vartheta_0) = z_1 + f(\vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_k^{(0)} \cos k\vartheta_0 \quad (4.5)$$

где

$$Y_k^{(0)} = \sum_{m=1}^N A_{km}^{(0)} X_m^{(0)} \quad (4.6)$$

а постоянная  $X_m^{(0)}$  определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(0)} - \sum_{k=1}^N A_{mk}^{(0)} X_k^{(0)} = F_m^{(0)} \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4.7)$$

где

$$F_m^{(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos m\vartheta d\vartheta \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4.8)$$



5. В качестве примера отображающую функцию  $\omega_1(\zeta)$  возьмем в виде

$$z = \omega_1(\zeta) = \alpha(\zeta + \alpha\zeta^2), \quad \alpha > 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

Окружности  $\rho=R$  соответствует кривая  $l_1$  на плоскости  $z=x+iy$ , а окружности  $\rho=1$  — кривая  $l_2$ , которые представляют собой кардионды.

Тогда  $f_1(\zeta)$  и  $f_2(\zeta)$  согласно формуле (1.18) соответственно в круге  $|\zeta| < R$  и в кольце  $R < |\zeta| < 1$  даются в виде:

$$f_1(\zeta) = i\alpha^2 b_1 \zeta, \quad f_2(\zeta) = i\alpha^2 (b_2 \zeta + b_3 \zeta^{-1}) \quad (5.2)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  и  $\lambda_0$  определяются из (1.19).

На основании формулы (1.35) после элементарных преобразований получаем

$$f_j^*(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha^4 \mu_j^* C_j}{Q} [g_0^{(j)}(\rho) + g_1^{(j)}(\rho) \cos \vartheta + g_2^{(j)}(\rho) \cos 2\vartheta] \quad (j=1, 2) \quad (5.3)$$

$$f_j^*(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha^4 \mu_j^* B_j}{Q} [g_0^{(j)}(\rho) + g_1^{(j)}(\rho) \cos \vartheta + g_2^{(j)}(\rho) \cos 2\vartheta] \quad (j=1, 2)$$

где  $g_i^{(j)}(\rho)$  ( $j=1, 2; i=0, 1, 2$ ) — определенные функции.

В формуле (2.1) ортонормированные системы функций возьмем в виде

$$\left\{ \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \frac{\rho^k}{R^{k+1}} \cos k\vartheta, \quad \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}} \frac{\rho_0^m}{R^{m+1}} \cos m\vartheta_0 \right\}$$

в круге  $|\zeta| < R$  ( $k, m = 1, 2, \dots$ )

$$(5.4)$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi(1-R^{2k+2})}} \rho^k \cos k\vartheta, \quad \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi(1-R^{2m+2})}} \rho_0^m \cos m\vartheta_0 \right\}$$

в кольце  $R < |\zeta| < 1$  ( $k, m = 1, 2, \dots$ )

На основании формул (1.43), (2.3), (3.4), (4.3), (5.3) и (5.4) получены выражения для коэффициентов Фурье  $A_{km}^{(j)}$  и  $A_{km}^{(0)}$ . Из-за громоздкости не приводим явное выражение для  $A_{km}^{(j)}$  и  $A_{km}^{(0)}$ .

После некоторых вычислений находим из (3.5) и (4.5) неизвестную функцию  $T_*(\vartheta_0)$ , то есть температуру на линии раздела различных материалов, в виде

$$T_*(\vartheta_0) = \alpha_1 + \sum_{k=1}^N X_k^{(0)} \cos k\vartheta_0 \quad (5.5)$$

Постоянные  $X_m^{(0)}$  определяются из уравнений (4.7), где  $F_m^{(0)}$  даются на основании (4.8). После вычисления получим

$$F_1^{(0)} = c_1 + a_1 a^4 / \lambda_1 Q, \quad F_2^{(0)} = c_2 / 2 + a_2 a^4 / 2 \lambda_1 Q$$

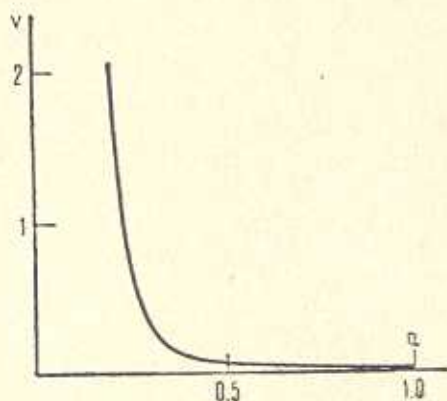
$$F_m^{(0)} = c_m / m \quad (m = 3, 4, \dots, N) \quad (5.6)$$

Явные выражения для  $c_m$ ,  $a_1$  и  $a_2$  не приводятся из-за громоздкости.

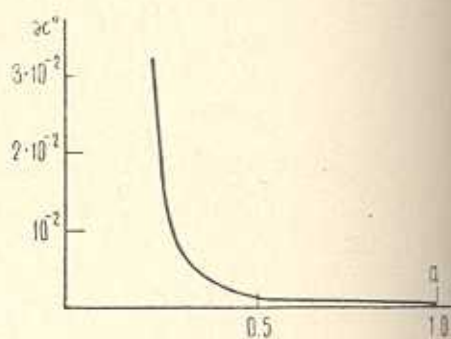
Подставляя выражение (5.5) в (2.9) и (2.10), получаем решение задачи. Затем полученный результат подставим в (1.25), после чего найдем уравнения для определения параметра  $Q$ .

Заметим, что в формулы (2.11), (3.4), (3.5) входят интегралы, которые следует понимать в смысле главного значения.

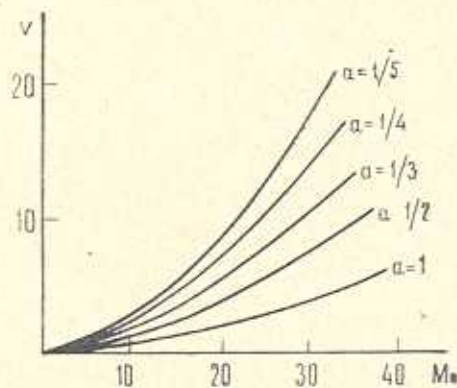
На основании формул (1.23), (1.25) и (5.5) построен график. На фиг. 1 показано соотношение между перепадом температур  $v = T_w - T_0$  и величиной  $a$ , входящей в уравнение кардионды, на фиг. 2—связь между углом закручивания и величиной  $a$ , на фиг. 3—соотношение между амплитудой момента и перепадом температур.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Ниже в таблице даны значения  $T_w$  и  $\alpha^0$  в зависимости от  $a$ . При этом использованы данные, соответствующие двум видам полиэтилена

Таблица 1

$a$	1	1/2	1/3	1/4	1/5
$\gamma^0$	$10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$8.055 \cdot 10^{-3}$	$2.552 \cdot 10^{-2}$	$6.233 \cdot 10^{-2}$
$T_*(0)$	20.0029	20.0519	20.2624	20.8311	22.0287
$T_*(\pi/2)$	20.0029	20.0513	20.2593	20.8210	22.0042
$T_*(\pi)$	20.0029	20.0508	20.2566	20.8127	21.9839

$$A_1 = 3.4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; \quad A_2 = 5.1 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2; \quad B_1 = B_2 = 3.87 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2$$

$$k_1^* = k_2^* = 0.00234 \text{ ккал/кгм}; \quad a_1^* c_1^* = a_2^* c_2^* = 0.23 \text{ ккал/м час град}$$

$$k_1 = k_2; \quad \omega = 100 \text{ уг}; \quad T_0 = 20^\circ; \quad M_0 = 10 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right] \text{ см}$$

$$\lambda = 0.25; \quad R = 0.5; \quad C_1 = C_2 = 3.87 \text{ кг/см}^2 \text{ град}$$

Автор искренне признателен Л. А. Галину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт проблем механики  
АН СССР

Поступила 26 IV 1973.

Գ. Ք. ՎԵՐՄԵՇՅԱՆ

ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՄԱՄՈՒՅԻԿ-ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՉՈՂԻ ՈՂՐՈՒՄԸ  
ՎԻՐՐԱՅԻՈՆ ՈՒԺԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկված է պրիզմատիկ մածուցիկ-առաձգական բաղադրյալ ոչ կոորկտրվածքով ձողի ուղորուձք վիբրացիոն ուժի ազդեցության տակ:

Ազդող բեռը փոփոխվում է հաստատուն ամպլիտուդայով հարմոնիկ օրենքով:

Ինչպես հայտնի է, կոմպլեքս մոդուլի բաղադրիչները նշանակալիորեն կախված են տատանման հաճախականությունից և ջերմաստիճանից, որի հետևանքով դիսսիպատիվ ուժի հաշվին տեղի է ունենում ջերմության անջատում, այդ պատճառով ձողի յուրաքանչյուր տեղամասում ջերմաստիճանը որոշելու համար, ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխման դեպքում, ստացվում է էլիպտական տիպի դիֆերենցիալ հավասարում:

Ենդիրը լուծված է երկու տարբեր մածուցիկ-առաձգական նյութերից կազմված բաղադրյալ ձողի համար:

Ձողի կոդմնային մակերևույթի վրա ջերմաստիճանը ընդունվում է հաստատուն և հավասար շրջապատող միջավայրի ջերմաստիճանին, իսկ տարբեր նյութերի միացման գծի վրա մեկ և մյուս տիրույթներում հավասար են ջերմաստիճանը և ջերմային հոսքը: Ընդունվում է, որ ձողի առանցքի երկարությամբ ջերմաստիճանը չի փոխվում:

Բերված են հաշվումներ մեկ մասնավոր դեպքի համար:



THE TWISTING OF A VISCOUS-ELASTIC PRISMATIC  
COMPOSITE ROD UNDER VIBRATIONAL LOAD

G. B. VERMISHIAN

## S u m m a r y

The twisting of a prismatic viscous-elastic composite rod with a non-circular cross-section under vibrational load has been studied.

The applied load changes according to the harmonic law, with a constant amplitude.

As is known, the components of the complex modulus essentially depend on the frequency of vibration and temperature, with heat being evolved due to dissipative forces. Therefore to determine the temperature at each part of the rod for a stationary case a differential equation of an elliptic type is derived.

The problem is solved for a rod consisting of two different visco-elastic materials.

The temperature on the boundary surface of the rod is equal to the ambient temperature but on the interface of different materials the temperature and heat flow are equal. The temperature along the rod axis is assumed to be invariable. Calculations for a special case are presented.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Галин Л. А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. Изв. АН СССР, Механика, № 6, 1965.
2. Вермишян Г. Б., Галин Л. А. Кручение вязко-упругого призматического стержня при действии вибрационной нагрузки. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1972.
3. Арсенин В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. Изд. „Наука“, М., 1966.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. „Наука“, М., 1968.