

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, Б. Г. ШЕЛЕСТОВСКИЙ

К ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ НАГРЕТОГО ШТАМПА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Контактные задачи теории упругости служат теоретической базой многих инженерных методов расчета на прочность и жесткость в строительной механике и машиностроении. Задача о вдавливании штампа в упругое полупространство или слой конечной толщины рассматривалась многими авторами. Сравнительно мало работ посвящено исследованию влияния температуры нагретого штампа на распределение контактных напряжений. Впервые осесимметричная задача о вдавливании горячего штампа в изотропное полупространство при условии, что граница полупространства вне штампа поддерживается при нулевой температуре, поставлена и решена в работах [1], [2]. В публикациях [3], [4] рассматривается аналогичная задача для упругого изотропного слоя. В работе [5] исследована задача о вдавливании системы нагретых штампов в полупространство. В статье авторов [6] изучено влияние теплоизоляции границы полупространства вне штампа на распределение напряжений под горячим штампом.

В данной работе исследуется осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства при условии теплоотдачи на границе полупространства вне штампа. Изучается влияние температуры штампа и величины коэффициента теплоотдачи на распределение контактных напряжений.

1. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z , ось oz которой направлена во внутрь полупространства. На поверхности упругой среды расположен штамп с заданной температурой основания, представляющего собой поверхность вращения. На штамп действует сила P , направленная вдоль оси симметрии штампа, под действием которой нагретый штамп вдавливается в полупространство. Предполагаем, что тепловой контакт штампа с полупространством идеальный, силы трения отсутствуют, поверхность полупространства вне штампа свободна от внешней нагрузки. Вне штампа на границе полупространства происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

Требуется определить нормальные контактные напряжения под штампом и величину радиуса площадки контакта.

Граничные условия задачи при $z=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} w(r, 0) = w(r), & \quad 0 \leq r < a; & \quad \sigma_{zz}(r, 0) = 0, & \quad r > a \\ T(r, 0) = T_0(r), & & \quad \frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = k' T(r, 0), & \quad k' = \frac{\alpha}{\lambda} \\ \sigma_{rz}(r, 0) = 0, & \quad 0 \leq r < \infty; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где α и λ — соответственно коэффициенты теплообмена и теплопроводности упругого тела.

В работе [6] получена формула, связывающая нормальные перемещения границы transversально изотропного полупространства с нормальными напряжениями и температурой на границе

$$-c_0 w(r, 0) = \int_0^{\infty} [\bar{\sigma}(\xi) + k_0 \bar{T}(\xi)] J_0(\xi r) d\xi \quad (1.2)$$

Здесь

$\bar{\sigma}(\xi)$ и $\bar{T}(\xi)$ — трансформанты Ханкеля нулевого порядка нормального напряжения и температуры, $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода; c_0, k_0 — параметры, зависящие от механических и теплофизических характеристик материала; для изотропного полупространства, например, они принимают значения

$$c_0 = \frac{\mu}{1-\nu}, \quad k_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_1 \mu$$

где ν — коэффициент Пуассона, μ — постоянная Ляме, α_1 — коэффициент линейного температурного расширения.

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + L^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3)$$

для transversально изотропного полупространства ищем в виде

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} E(p) e^{-\frac{pz}{L}} J_0(pr) dp, \quad E(p) = p \bar{T}(p) \quad (1.4)$$

где L^2 — отношение коэффициента теплопроводности тела в направлении оси oz к коэффициенту теплопроводности в плоскостях изотропии.

Удовлетворив температурной части граничных условий (1.1) рассматриваемой задачи, получим парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} E(x) J_0(\alpha \rho) dx = \alpha T_0(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x E(x)}{1-g(x)} J_0(\alpha \rho) dx = 0, \quad \rho > 1 \quad (1.5)$$

Здесь

$$g(x) = \frac{k}{\alpha + k}, \quad k = k' a L, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}$$

Следуя работе [7], решение уравнений (1.5) ищем в виде

$$E(x) = [1 - g(x)] \int_0^1 \varphi(t) \cos xt \quad (1.6)$$

где функция $\varphi(t)$ в данном случае удовлетворяет следующему интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \frac{2}{\pi} k \int_0^1 \varphi(t) dt \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x \cos \alpha t}{\alpha + k} d\alpha = aF(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.7)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \left[T_0(0) + x \int_0^{\pi/2} T_0(x \sin \theta) d\theta \right]$$

Используя соотношения (1.4)–(1.7) и следуя работе [6], формулу (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}(x) J_0(\alpha x) dx + k_0 a \int_0^1 \varphi(y) dy \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha y J_0(\alpha x)}{\alpha + k} d\alpha = \\ = -ac_0 w(\alpha_0) + k_0 a \ln \frac{1+k}{k} \int_0^1 \varphi(y) dy \end{aligned} \quad (1.8)$$

Удовлетворив силовой части граничных условий (1.1), приходим к парным интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{\sigma}(p) J_0(p\rho) dp = -ac_0 w(\alpha_0) - k_0 a \int_0^1 \varphi(y) dy \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha y J_0(\alpha \rho)}{\alpha + k} d\alpha + \\ + k_0 a \ln \frac{k+1}{k} \int_0^1 \varphi(y) dy, \quad 0 \leq \rho < 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\int_0^{\infty} p \bar{\sigma}(p) J_0(p\rho) dp = 0, \quad \rho > 1$$

Рассмотрим случай, когда функцию $w(r)$ ($0 \leq r < a$), входящую в правую часть первого соотношения (1.9), можно представить в виде следующего степенного ряда:

$$w(r) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i r^i, \quad \text{где } A_i = \text{const}$$

Применяя к соотношениям (1.9) формулу обращения парных интегральных уравнений и теорему обращения интегрального преобразования Ханкеля, найдем выражение для определения контактных напряжений под штампом

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\rho, 0) = & -\frac{c_0}{V\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)} a^{i-1} A_i \int_0^{\pi} \left[\cos \xi + \right. \\ & \left. + \xi \int_0^1 x^{i+1} \sin \xi x dx \right] J_0(\xi r) d\xi + \omega(\rho) - \psi(\rho) \quad 0 \leq \rho < 1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\rho) = & \frac{k_0 \pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_0(j_n) J_0(j_n \rho)}{J_1(j_n)} \int_0^1 \varphi(y) dy \left[j_n \cos j_n B(y, j_n) - \right. \\ & \left. - j_n \sin j_n A(y, j_n) + k^2 \sin j_n A(y, k) - k j_n \cos j_n B(y, k) \right] \frac{1}{k^2 - j_n^2} + \\ & \left. + \frac{\pi \cos j_n y}{k + j_n} \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} A(y, k) = & \sin(1+y)k \operatorname{si}(1+y)k + \cos(1+y)k \operatorname{ci}(1+y)k + \\ & + \sin(1-y)k \operatorname{si}(1-y)k + \cos(1-y)k \operatorname{ci}(1-y)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(y, k) = & \sin(1+y)k \operatorname{ci}(1+y)k - \cos(1+y)k \operatorname{si}(1+y)k + \\ & + \sin(1-y)k \operatorname{ci}(1-y)k - \cos(1-y)k \operatorname{si}(1-y)k \end{aligned}$$

$$\omega(\rho) = \frac{k_0 \pi}{a \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \left[2 \ln \frac{1+k}{k} + A(y, k) \right] \varphi(y) dy \quad (1.12)$$

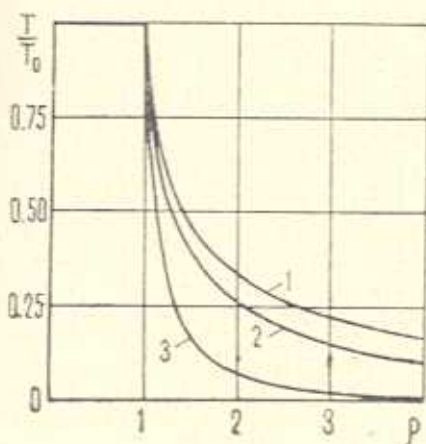
Здесь

$N_0(x)$ — функция Бесселя второго рода; $\operatorname{si}(x)$ и $\operatorname{ci}(x)$ — интегральный синус и косинус, j_n — положительные нули функции $J_0(x)$.

В формулы (1.11) и (1.12) входит функция $\varphi(y)$, определяемая из уравнения (1.7), решение которого находим методом последовательных приближений, который, как доказано при помощи принципа сжатых отображений, сходится, если параметр k удовлетворяет неравенству $0 \leq k < 1.35$. При этом рассмотрим случай $T_0(r) = T_0 = \text{const}$. Для аналитических исследований и расчетов ограничимся вторым приближением, с учетом которого для определения функции $\varphi(x)$ получаем соотношение

$$\varphi(x) = aT_0 \left\{ \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} [\pi - B(x, k)] + \frac{4}{\pi^2} k^2 \int_0^1 (k \sin \alpha A(x, \alpha) - k \cos \alpha B(x, \alpha) + \alpha \cos \alpha B(x, k) - k \sin \alpha A(x, k)) \frac{1}{\alpha^2 - k^2} - \frac{\pi \cos \alpha x}{\alpha + k} \Big| \frac{\sin \alpha}{\alpha(\alpha + k)} d\alpha \right\} \quad (1.13)$$

Для значений k , не удовлетворяющих указанному неравенству, уравнение (1.17) решалось численным методом, то есть путем сведения к конечной системе алгебраических уравнений. Сначала брали систему «11» уравнений с «11» неизвестными. При этом получаем, в результате решения системы уравнений, значения функции $\varphi(x)$ в точках от 0 до 1 через 0.1. В следующем шаге брали систему «21» уравнения и получали значения $\varphi(x)$ от 0 до 1 через 0.05. Значения функции в точках, подсчитанные в первом шаге, совпадали тремя знаками со значениями функции, полученными при повторном разбиении отрезка. Функция $\varphi(x)$ протабулирована для значений k от 1 до 10 с интервалом в 1. При подстановке $\varphi(x)$ в формулу для температуры и ее определении, граничное условие при $0 \leq x < 1, z = 0$ выполнялось с точностью до 1%.



Фиг. 1.

На фиг. 1 показано распределение температуры на границе полупространства соответственно для $k=0, 1, 10$ (кривые 1, 2 и 3).

2. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие влияние температуры и коэффициента теплоотдачи k на распределение контактных напряжений под штампом.

Пример 1. Цилиндрический круговой штамп с плоским основанием

$$w(r) = b_0, \quad 0 \leq r < a; \quad A_0 = b_0, \quad A_n = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.1)$$

Используя формулу (1.10), найдем

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0 b_0}{\pi a \sqrt{1-\rho^2}} + w(\rho) - \psi(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.2)$$

Из условия равновесия штампа определим зависимость между его вертикальным смещением, температурой и силой, вдавливающей штамп в полупространство

$$P = -2\pi a^2 \int_0^1 \rho \sigma_{zz}(\rho, 0) d\rho = \delta + 4ac_0 b_0 \quad (2.3)$$

где δ зависит от величины параметра k . Подставляя b_0 из (2.3) в соотношение (2.2), будем иметь

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \frac{\delta - P}{2\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2}} + w(\rho) - \psi(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.4)$$

Отметим, что для значений k , равных 0, 1 и 10, δ равно соответственно $1.03 a^2 k_0 T_0$; $1.82 a^2 k_0 T_0$ и $3.01 a^2 k_0 T_0$.

Формула (2.4) верна при условии, что под штампом не возникает растягивающих напряжений, откуда следует условие ее применимости

$$P - \delta - k_0 \pi a \int_0^1 \left[2 \ln \frac{1+k}{k} + A(y, k) \right] \varphi(y) dy > 0 \quad (2.5)$$

Пример 2. Штамп в виде параболоида вращения

$$w(r) = b_0 + b_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad 0 \leq r < a; \quad A_0 = b_0 + b_1$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{b_1}{a^2}, \quad A_n = 0, \quad n > 2$$

Нормальные контактные напряжения, согласно (1.10), определяются по формуле

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0}{\pi} \left[\frac{b_0 - b_1}{a \sqrt{1-\rho^2}} + \frac{4b_1}{a} \sqrt{1-\rho^2} \right] + w(\rho) - \psi(\rho) \quad (2.6)$$

$$0 \leq \rho < 1$$

Из условия ограниченности нормальных напряжений на краю площадки контакта получим

$$b_0 = \frac{b_1 c_0 + \beta k_0 T_0 a}{c_0}, \quad P = \delta_0 + \frac{16}{3} a c_0 b_1 \quad (2.7)$$

Как и в предыдущем случае, β и δ_0 вычисляются для заданных значений k .

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 1.72 a^2 k_0 T_0, & \beta &= 0.175, & k &= 0 \\ \delta_0 &= 2.27 a^2 k_0 T_0, & \beta &= 0.113, & k &= 1 \\ \delta_0 &= 3.08 a^2 k_0 T_0, & \beta &= 0.062, & k &= 10 \end{aligned}$$

Если $R = \frac{a^2}{2b_1}$, где R —радиус кривизны параболоида в его вершине, то радиус площадки контакта определяется из уравнения

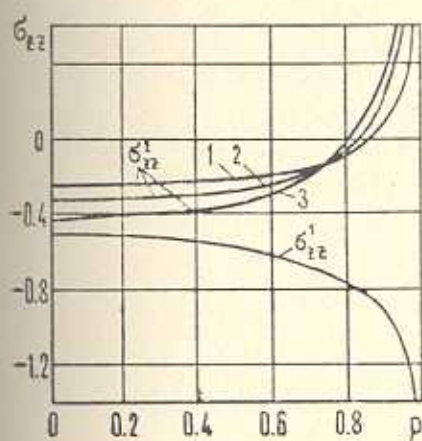
$$a^3 + \frac{3}{8} \frac{R}{c_0} \delta_0 = \frac{3PR}{8c_0}$$

Подставляя b_1 из (2.7) в (2.6), будем иметь

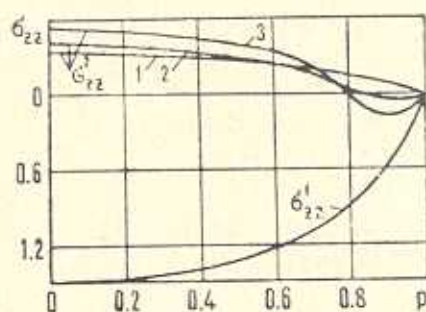
$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = \frac{3(\delta_0 - P)}{2\pi a^2} \sqrt{1 - \rho^2} - \psi(\rho), \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (2.8)$$

Функция $\psi(\rho)$ определяется соотношением (1.11), условием применимости формулы (2.8) служит неравенство

$$P \geq \delta_0$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 2 и 3 показано распределение контактных напряжений соответственно для штампа с плоским основанием и параболоидального штампа. При этом

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{\pi a^2 \sigma_{zz}^P}{P} \text{ — силовая часть напряжений,}$$

$$\sigma_{zz}^2 = \frac{\sigma_{zz}^T}{k_0 T_0} \text{ — температурная часть напряжений.}$$

Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям параметра k , равным 0, 1 и 10. Суммарное напряжение получим, наложив напряжения

$$\frac{P}{\pi a^2} \sigma_{zz}^1 \quad \text{и} \quad k_0 T_0 \sigma_{zz}^2$$

Как видно из приведенных графиков, наибольшая величина температурной части напряжений будет в том случае, если поверхность полупространства вне штампа поддерживается при нулевой температуре, наименьшая—при теплоизолированной границе.

Львовский государственный
физико-механический институт
АН УССР

Поступила 7 II 1972

Գ. Վ. ԳՐԻԼԻՑԿԻ, Բ. Գ. ՇԵԼԵՍՏՈՎՍԿԻ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԿ ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՏԱՔԱՑՎԱԾ ԳՐՈՇՄԻ
ՆԵՐՄՂՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԿ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրվել է տրանսվերսալ իզոտրոպ կիսատարածության մեջ տաքացված գրոշմի ներմղման մասին չերմաստաձգակախոթյան առանցքային մեարիկ կոնտակտային խնդիրը այն պայմանով, որ գրոշմից դուրս գտնվող կիսատարածության մակերևույթի վրայից չերմափոխանակությունը շրջապատող միջավայրի հետ իրադործվում է նյութանի օրենքով: Զերմությունը և նորմալ կոնտակտային լարումը արտահայտվել են Զերեդճոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարմանը բավարարող ֆունկցիայի միջոցով: Այդ հավասարման թվային լուծումը կառուցվել է հաջորդական մոտավորությունների եղանակով: Դիտարկվել են օրինակներ:

ON AXISYMMETRIC PROBLEM ON A HEATED PUNCH PRESSED INTO TRANSVERSALLY ISOTROPIC SEMISPACE

D. V. GRILITSKY, B. G. SHELESTOVSKY

S u m m a r y

The axisymmetric contact thermoelastic problem on a heated punch pressed into transversally isotropic semispace is considered under condition that beyond the punch the heat exchange with environment takes place according to Newton's law. The temperature and normal contact stresses are expressed through the function satisfying the integral equation of the Fredholm type of the second kind whose solution is constructed by the method of consecutive approximations as well as numerically. Some examples are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бородачев Н. М.* О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
2. *George D. L., Sneddon I. N.* The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch. J. Math. and Mech., vol. 11, № 5, 1962.
3. *Петришин В. И., Шевляков Ю. А.* Вдавливание нагретого штампа в упругий слой конечной толщины в случае осевой симметрии. Прикл. механ., т. 4, в. 3, 1968.
4. *Koer L. M., Fu W. S.* Some stress distributions in an elastic plate due to rigid heated punches. Internat. J. Engng. Sci., vol. 5, No. 7, 1967.
5. *Андрейкив А. Е.* О решении некоторых задач термоупругости путем использования гармонических функций. Прикл. механика, т. 7, в. 9, 1971.
6. *Грилицкий Д. В., Шелестовский Б. Г.* Осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного полупространства. Прикл. механ., т. 6, в. 8, 1970.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во „Наука“, Л., 1967.