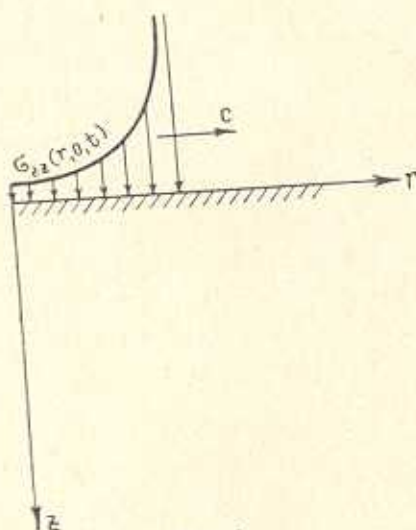


С. Г. СААКЯН

ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВЫЗВАННЫЕ
 БЕГУЩЕЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

§ 1. Постановка задачи и ее решение в образах

Пусть давление за фронтом ударной волны, распространяющейся с постоянной скоростью c по поверхности однородного, изотропного упругого полупространства, имеет вид (фиг. 1)



Фиг. 1.

$$p(r, t) = \frac{P_0 H(ct - r)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \quad (1.1)$$

где H — функция Хевисайда, P_0 — постоянная.

При отсутствии объемных сил поведение полупространства описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_d^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

где скалярный и векторный потенциалы φ и ψ связаны с вектором перемещения $\vec{u} = u_r \hat{r} + u_z \hat{k}$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \quad (1.3)$$

$c_d^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$, $c_s^2 = \mu/\rho_0$ — скорости распространения продольной и поперечной волн, λ , μ — постоянные Ламе, ρ_0 — плотность среды.

Граничные условия, выражающие отсутствие касательных напряжений и равенство нормальных напряжений заданному давлению, следующие:

$$\tau_{zz}(r, 0, t) = -p(r, t), \quad \tau_{rz}(r, 0, t) = 0 \quad (1.4)$$

Начальные условия для φ и ψ имеют вид

$$\varphi(r, z, 0) = \frac{\partial \varphi(r, z, 0)}{\partial t} = \psi(r, z, 0) = \frac{\partial \psi(r, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнений (1.1), ограниченное в бесконечности и удовлетворяющее начальным (1.5) и граничным (1.4) условиям, получим, если применим преобразование Лапласа, а затем к полученным уравнениям — преобразование Ганкеля. Обращая преобразование Ганкеля полученного решения и используя соотношение (1.3) между потенциалами и перемещениями, получим перемещение в преобразовании Лапласа

$$\bar{u}_j = \bar{u}_{jd} + \bar{u}_{js} \quad (j = r, z) \quad (1.6)$$

где

$$\frac{\mu c}{P_0} \bar{u}_{js} = \int_0^{\infty} N_{js}(k, p) e^{-zn_s} dk \quad (z = d, s) \quad (1.7)$$

и

$$\begin{aligned} N_{rd} &= k^2 n_0 G J_1(kr), & N_{rs} &= -2k^2 n_d n_s G J_1(kr) \\ N_{zd} &= k n_0 n_d G J_0(kr), & N_{zs} &= -2k^3 n_d G J_0(kr) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} n_0 &= 2k^2 + p^2/c_s^2, & n_d^2 &= k^2 + p^2/c_d^2, & n_s^2 &= k^2 + p^2/c_s^2 \\ n_c &= k^2 + p^2/c^2, & L &= n_0^2 - 4k^2 n_d n_s, & G &= 1/n_c L \end{aligned} \quad (1.9)$$

В формулах \bar{u}_{js} представляет изображение Лапласа оригинала u_{js} ; p , k — параметры преобразований Лапласа и Ганкеля. Ветви радикалов n_d и n_s фиксированы условиями $\arg n_d = 0$, $\arg n_s = 0$ при $k > 0$, $p > 0$.

Преобразования Лапласа и Ганкеля приложенной нагрузки вычислялись по формулам [1].

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{P_0 H(ct-r) e^{-pt} dt}{V(ct)^2 - r^2} &= \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right) \\ \int_0^{\infty} \frac{P_0}{c} K_0\left(\frac{rp}{c}\right) J_0(kr) r dr &= \frac{P_0}{cn_c} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя третьего рода.

§ 2. Переход к оригиналам

Подставим в формулы (1.7) вместо бесселевых функций J_0 и J_1 их интегральное представление Пуассона

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos x} dx, \quad J_1(kr) = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr) \quad (2.1)$$

и введем обозначения $p^0 = k \cos x$, $pq = k \sin x$.

Для изображений радиального и вертикального компонентов скорости получаем

$$\bar{v}_j = \bar{v}_{jd} + \bar{v}_{js} \quad (j = r, z) \quad (2.2)$$

где

$$\frac{\pi c^2}{P_0} \bar{v}_{js} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{js}(\omega, q) \exp[-p(i\omega r + m_z z)] d\omega dq \quad (z = d, s) \quad (2.3)$$

и

$$M_{rd}(\omega, q) = i\omega m_0 g, \quad M_{rs}(\omega, q) = -2i\omega m_d m_s g \\ M_{zd}(\omega, q) = m_0 m_d g, \quad M_{zs}(\omega, q) = -2(\omega^2 + q^2) m_d g \quad (2.4)$$

$$m_0 = 2\omega^2 + 2q^2 + 1/c_s^2, \quad m_d^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_d^2, \quad m_s^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_s^2 \\ m_c = \omega^2 + q^2 + 1/c^2, \quad R = m_0^2 - 4(\omega^2 + q^2) m_d m_s, \quad g = 1/m_c R \quad (2.5)$$

При обращении \bar{v}_r и \bar{v}_z имеются три случая в зависимости от значения отношений скорости распространения фронта нагрузки ударной волны к скоростям упругих объемных волн. Эти случаи таковы: сверхзвуковой ($c > c_d$), транзвуковой ($c_s < c < c_d$) и дозвуковой ($c < c_s$).

Продольные волны

а) фронт нагрузки распространяется со сверхзвуковой скоростью. Из (2.3) имеем

$$\frac{\pi c^2}{P_0} \bar{v}_{rd} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{rd}(\omega, q) \exp[-p(i\omega r + m_d z)] d\omega dq \quad (2.6)$$

На комплексной плоскости ω подинтегральная функция $M_{rd}(\omega, q)$ имеет особенности: точки ветвления при $\omega = \Omega_d^{\pm}$ и $\omega = \Omega_s^{\pm}$ и простые полюсы при $\omega = \Omega_c^{\pm}$ и $\omega = \Omega_R^{\pm}$, где

$$\Omega_d^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + 1/c_d^2}, \quad \Omega_s^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \\ \Omega_c^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + 1/c^2}, \quad \Omega_R^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + 1/c_R^2} \quad (2.7)$$

Полюсы при $\omega = \Omega_{\bar{R}}$ соответствуют нулям функции Рэлея $R(\omega^2 + q^2)$, которая имеет простые нули при $\omega^2 + q^2 = -\frac{1}{c_R^2}$, где $c_R < c_s$ — скорость поверхностных волн Рэлея.

Чтобы перевести \bar{v}_{rd} в преобразование Лапласа известной функции, рассмотрим в плоскости ω контур $\omega = \omega_{\bar{d}}^{\pm}(q)$, который получается при разрешении соотношения

$$t = i\omega r + z \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_d^2} \quad (2.8)$$

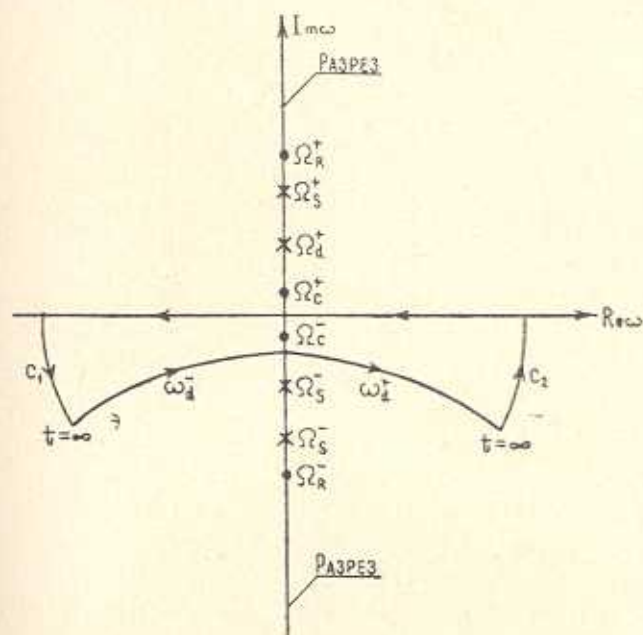
относительно ω , то есть

$$\omega = \omega_{\bar{d}}^{\pm}(q) = (-itr \pm z \sqrt{t^2 - t_{qd}^2})/z^2 \quad (2.9)$$

где

$$t_{qd} = \rho \sqrt{q^2 + 1/c_d^2}, \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9) определяет в параметрической форме одну ветвь гиперболы с вершиной в точке $\omega = -\frac{ir}{\rho} \sqrt{q^2 + 1/c_d^2}$ и асимптотами $\arg \omega = \pm r/z$, когда параметр t изменяется от t_{qd} до бесконечности. Эта гипербола не пересекает разрезы в плоскости ω , так как $r/\rho < 1$.



Фиг. 2.

Образует замкнутый контур $C = (\text{Im } \omega = 0) + C_1 + \omega_{\bar{d}}^- + \omega_{\bar{d}}^+ + C_2$, где C_1 и C_2 — дуги окружности с центром в начале координат и с большим радиусом R_1 (фиг. 2). В зависимости от того, выполняется или нет условие

$$-t_{qd}r/\rho^2 < -\sqrt{q^2 + 1/c^2} \quad (2.11)$$

то есть лежит внутри или вне контура C полюс $\omega = \Omega_c^-$, все пространство разделим на две области.

Область I: $r/z > l/\sqrt{1-l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{dc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{dc}, \infty)$, где $Q_{dc} = \frac{1}{c_d} \sqrt{(1-l^2) \frac{r^2}{z^2} - l^2}$, $l = \frac{c_d}{c}$. Уравнение $r/z = l/\sqrt{1-l^2}$ определяет поверхность конуса, ось которого совпадает с положительной осью z .

Область II: $r/z < l/\sqrt{1-l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит вне контура C для $q \in [0, \infty)$.

Область I. Рассмотрим \bar{v}_{rd} для контура C и применим теорию вычетов Коши. В пределе, когда $R_1 \rightarrow \infty$, интегралы вдоль C_1 и C_2 по лемме Жордана стремятся к нулю, и мы имеем

$$\frac{\pi c_1^n}{P_0} = \int_0^\infty \int_{t_{qd}}^\infty F_1(\omega_d, q) e^{-\rho t} dt dq + \Gamma_1 \int_0^{Q_{dc}} \exp \left[-\rho \left(r \sqrt{q^2 + 1/c^2} + z \sqrt{\frac{1}{c_d^2} - \frac{1}{c^2}} \right) \right] dq \quad (2.12)$$

где

$$F_1(\omega, q) = -2 \operatorname{Re} M_{rd}(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega_d = \omega_d^-(q)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\pi c_d^2 (\gamma^2 - 2l^2)}{(\gamma^2 - 2l^2)^2 + 4l^2 \sqrt{1-l^2} \sqrt{\gamma^2 - l^2}}, \quad \gamma = \frac{c_d}{c} \quad (2.13)$$

Изменим порядок интегрирования в двухкратном интеграле (2.12) и сделаем замену $t = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c^2}} + z \sqrt{\frac{1}{c_d^2} - \frac{1}{c^2}}$ во втором интеграле.

Получим

$$\frac{\pi c_1^n}{P_0} = \int_{t_d^0}^\infty \int_{t_d^*}^{q_d} F_1(\omega_d, q) e^{-\rho t} dq dt + \Gamma_1 \int_{t_{dc}}^{t_{dc}^*} \frac{[c(t-t_{dc})+r] e^{-\rho t} dt}{r \sqrt{[c(t-t_{dc})+r]^2 - r^2}} \quad (2.14)$$

где

$$t_d = \rho/c_d, \quad t_{dc} = \left(r + z \sqrt{\frac{c^2}{c_d^2} - 1} \right) / c$$

$$t_{dc}^* = \rho^2 \sqrt{1-l^2} / c_d z, \quad q_d = \sqrt{t_{dc}^2 - t_d^2} / \rho \quad (2.15)$$

После обращения \bar{v}_{rd} имеем

$$\frac{\pi c^2}{P_0} v_{rd} = H(t - t_d) \text{v. p.} \int_0^{q_d} F_1(v_d, q) dq + \\ + H(t - t_{dc}) H(t'_{dc} - t) \frac{\Gamma_1[c(t - t_{dc}) + r]}{r V [c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2} \quad (2.16)$$

Таким образом, при сверхзвуковом распространении ударной волны v_{rd} состоит из двух слагаемых, одно из которых представляет скорость в области внутри фронта полусферической волны при $t = t_d$ с центром в точке начального положения нагрузки. Второе представляет скорость в области позади фронта конической волны при $t = t_{dc}$, следующей за фронтом распространяющейся по границе ударной волны. Уравнение $t = t'_{dc}$ для фиксированного t определяет сферическую поверхность с центром $r = 0$, $z = c_d t / 2 \sqrt{1 - l^2}$ и радиусом $c_d t / 2 \sqrt{1 - l^2}$. Эта поверхность не является фронтом волны потому, что она не является ни характеристической и ни огибающей характеристических поверхностей волнового уравнения (1.2) для φ . Поэтому на этой поверхности решение не имеет разрыва непрерывности.

Интеграл в v_{rd} является несобственным для $t = t'_{dc}$, так как множитель $\omega_d^2 + q^2 + 1/c^2$ в знаменателе подинтегральной функции равен нулю при $q = q_d$. Поскольку алгебраический член в v_{rd} имеет конечный разрыв непрерывности при $t = t'_{dc}$, а v_{rd} непрерывна при $t = t'_{dc}$, то это означает, что первый член при $t = t'_{dc}$ имеет конечный разрыв, равный разрыву алгебраического члена с противоположным знаком.

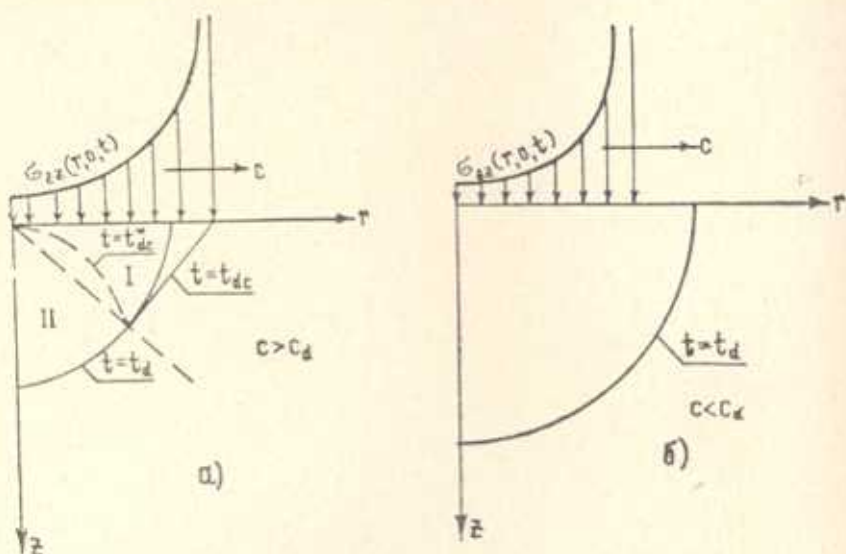
Область II. Для этой области полюс $\omega = \Omega_c^-$ на плоскости ω лежит вне контура C , поэтому вклад от вычета в полюсе $\omega = \Omega_c^-$ в формуле (2.16) отсутствует.

Полученные результаты для областей I и II можно объединить в одну формулу

$$\frac{\pi c^2}{P_0} v_{rd} = H(t - t_d) \text{v. p.} \int_0^{q_d} F_1(\omega_d, q) dq + \\ + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{1 - l^2}}\right) H(t - t_{dc}) H(t'_{dc} - t) \frac{\Gamma_1[c(t - t_{dc}) + r]}{r V [c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2} \quad (2.17)$$

которая справедлива для $r \geq 0$, $z > 0$. На фиг. 3а показана волновая картина для v_{rd} , фронты волн $t = t_d$ и $t = t_{dc}$, полусферическая поверхность $t = t'_{dc}$ и области I и II;

б) фронт нагрузки распространяется с трансзвуковой или дозвуковой скоростями.



Фиг. 3

Для $c < c_d$ (независимо от того, какое из условий $c_s < c < c_d$ или $c < c_s$ имеет место) полюс $\omega = \Omega_c^-$ на плоскости ω всегда лежит вне контура C (фиг. 4). Следовательно, обращение \bar{v}_{rd} для области $r \geq 0, z > 0$ производится точно так же, как и для области II, поэтому результат имеет вид

$$\frac{\pi c^2}{P_0} \bar{v}_{rd} = H(t - t_d) \int_0^{q_d} F_1(\omega_d, q) dq \quad (2.18)$$

Как видно из (2.18), для трансзвуковой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки конические волны в \bar{v}_{rd} не появляются. Волновая картина для этих случаев показана на фиг. 3б.

Обращение \bar{v}_{rd} находится точно так же, как и обращение \bar{v}_{rd} . Не останавливаясь на подробностях обращения \bar{v}_{rd} , приведем окончательные результаты.

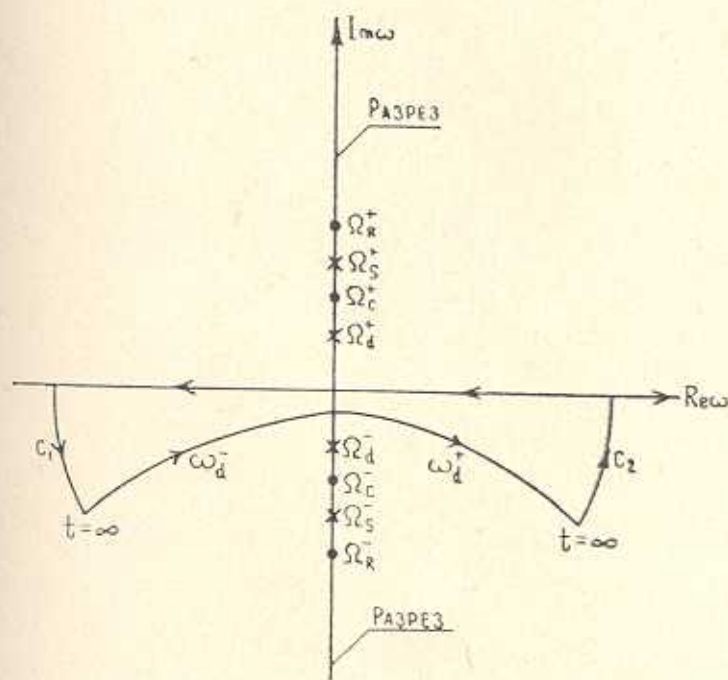
Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi c^2 \bar{v}_{rd}}{P_0} = & H(t - t_d) v. \text{ p. } \int_0^{q_d} F_2(\omega_d, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\sqrt{1-l^2}}\right) H(t - t_{dc}) H(t_{dc} - t) \frac{\Gamma_2}{V[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

для сверхзвуковой скорости распространения фронта нагрузки, и

$$\frac{\pi c^2 \bar{v}_{zd}}{P_0} = H(t - t_d) \int_0^{q_d} F_2(\omega_d, q) dq \quad (2.20)$$

для трансзвуковой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки:



Фиг. 4.

В формуле (2.19) приняты обозначения:

$$F_2(\omega, q) = 2 \operatorname{Re} M_{zd}(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, \quad \Gamma_2 = \Gamma_1 \sqrt{1 - I^2} / l \quad (2.21)$$

Поперечные волны

а) Фронт нагрузки распространяется со сверхзвуковой скоростью. Обращение выражения

$$\frac{\pi c^2 \bar{v}_{rs}}{P_0} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{rs}(\omega, q) \exp[-p(i\omega r + m_s z)] d\omega dq \quad (2.22)$$

производится так же, как и для \bar{v}_{rd} , однако процедура обращения и результат сложнее, чем в случае \bar{v}_{rd} . На плоскости ω уравнению

$$t = i\omega r + z \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1/c_s^2} \quad (2.23)$$

соответствует ветвь гиперболы

$$\omega = \omega_{\pm}(q) = (-itr \pm z \sqrt{t^2 - t_{qs}^2})/\rho^2, \quad t \geq t_{qs} \quad (2.24)$$

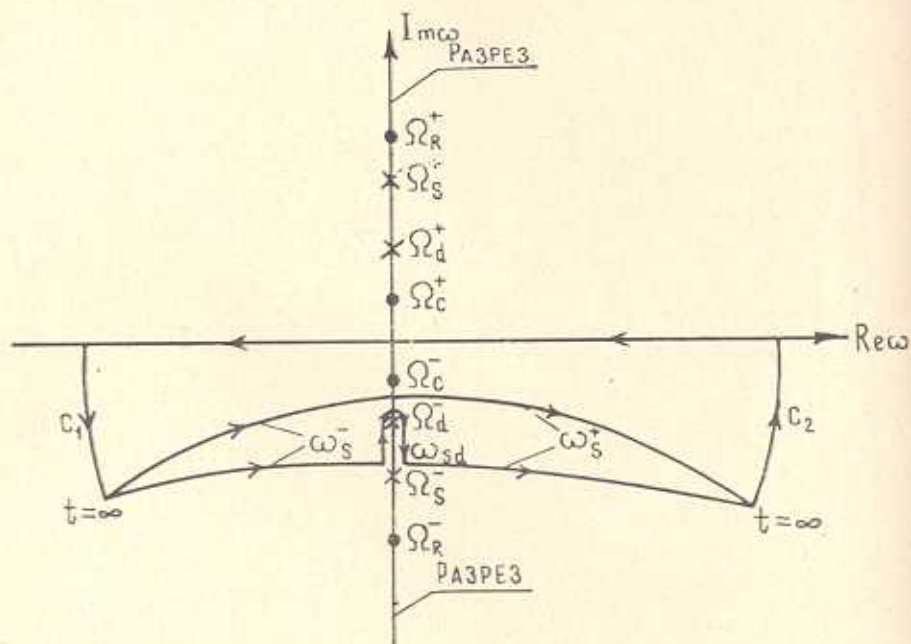
где

$$t_{qs} = \rho \sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \quad (2.25)$$

Эта гиперболола имеет вершину на плоскости ω в точке $\omega = -\frac{ir}{\rho} \sqrt{q^2 + 1/c_s^2}$ и асимптоты $\arg \omega = \pm r/z$. В зависимости от того, выполняется или нет условие

$$-\frac{rt_{qs}}{\rho^2} > -\sqrt{q^2 + 1/c_s^2} \quad (2.26)$$

контур C имеет на плоскости ω две возможные конфигурации, как это показано на фиг. 5. Таким образом, если $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ и $q \in [0, \infty)$,



Фиг. 5.

имеем контур $C = (\text{Im } \omega = 0) + C_1 + \omega_s^- + \omega_s^+ + C_2$. Но если $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ и $q \in [0, Q_{sd})$, вершина гиперболы ω_s^- лежит на разрезе между точками ветвления $\omega = \Omega_d^-$, $\omega = \Omega_s^-$, и мы имеем контур $C = (\text{Im } \omega = 0) + C_1 + \omega_s^- + \omega_{sd} + \omega_s^+ + C_2$, где

$$\omega_{sd} = i(-rt + z \sqrt{t_{qs}^2 - t^2})/\rho^2$$

$$t_{qs} < t \leq t_{qs}, \quad t_{qs} = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2}} + z \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_d^2}} \quad (2.27)$$

Полус $\omega = \Omega_c^-$ может лежать как внутри, так и вне контура C . В зависимости от положений полюса $\omega = \Omega_c^-$ и вершины гиперболы ω_s^\pm все полупространство разделим на три области, которым соответствуют разные случаи обращения \bar{v}_{rs} .

Область I: $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{sc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{sc}, \infty)$, где $Q_{sc} = \frac{1}{c_d} \sqrt{(\gamma^2 - l^2) \frac{r^2}{z^2} - l^2}$. Вершина гиперболы ω_s^\pm лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит на разрезе для $q \in (Q_{sd}, \infty)$, где $Q_{sd} = \frac{1}{c_d} \sqrt{(\gamma^2 - 1) \frac{r^2}{z^2} - 1}$.

Область II: $l/\sqrt{\gamma^2 - l^2} < r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит внутри C для $q \in [0, Q_{sc})$ и лежит вне C для $q \in (Q_{sc}, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Область III: $r/z < l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит вне C для $q \in [0, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Область I. Выражение \bar{v}_{rs} в виде интеграла по контуру C в плоскости ω позволяет применить теорию вычетов Коши и привести это выражение к виду

$$\frac{\pi c_d^3 \bar{v}_{rs}}{P_0} = \int_0^{\bar{t}_{qs}} \int_{\bar{t}_{qs}}^{\bar{t}_{qs}} F_3(\omega_s, q) e^{-pt} dt dq + \int_0^{Q_{sd}} \int_{\bar{t}_{qsd}}^{\bar{t}_{qsd}} F_3(\omega_{sd}, q) e^{-pt} dt dq + \\ + \Gamma_3 \int_0^{Q_{sc}} \exp \left[-p \left(r \sqrt{q^2 + 1/c^2} + z \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_d^2}} \right) \right] dq \quad (2.28)$$

где

$$F_3(\omega, q) = 2 \operatorname{Re} M_{rs}(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, \quad \Gamma_3 = -\frac{2\Gamma_d l}{V \sqrt{\gamma^2 - l^2}} \quad (2.29)$$

В формуле (2.28) первое слагаемое представляет собой вклад контура ω_s^\pm , где $\omega_s = \omega_s^\pm(q)$, второе — контура ω_{sd} и, наконец, последнее — вклад вычета в полюсе $\omega = \Omega_c^-$. В двухкратных интегралах изменим порядок интегрирования, а в одинарном интеграле сделаем замену $t = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c^2}} + z \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_d^2}}$, после чего обращение преобразования Лапласа дает

$$\frac{\pi c_d^3 v_{rs}}{P_0} = H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q) dq +$$

$$\begin{aligned}
& + H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \int_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q) dq + \\
& + H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_3}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \quad (2.30)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
t_s &= \varrho/c_s, \quad t_{sd} = (r + z \sqrt{\gamma^2 - 1})/c_d, \quad t_{sc} = \left(r + z \sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1} \right) / c \\
t_{sd}^* &= \varrho^2 \sqrt{\gamma^2 - 1} / c_d z, \quad t_{sc}^* = \varrho^2 \sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1} / cz, \quad q_s = \sqrt{t^2 - t_s^2} / \varrho \quad (2.31)
\end{aligned}$$

$$q_{sd} = \frac{1}{c_d} \sqrt{\left[\frac{c_d(t - t_{sd})}{r} + 1 \right]^2 - 1}, \quad q_{sd}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_s \\ q_s & \text{при } t > t_s \end{cases}$$

Область II. С учетом того, что вершина гиперболы ω_s^\pm не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$, то есть при контурном интегрировании вклад контура ω_{sd} отсутствует, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\pi c_s^{\mu\nu} v_{rs}}{P_0} &= H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q) dq + \\
& + H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_3}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Область III. Так как и полюс $\omega = \Omega_c^-$, и вершина гиперболы ω_s^\pm лежат вне C , то при контурном интегрировании остается лишь вклад контура ω_s^\pm , то есть первый член в (2.32).

Сравнивая полученные результаты для трех областей полупространства, легко заметить, что их можно представить следующим единым выражением:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi c_s^{\mu\nu} v_{rs}}{P_0} &= H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q) dq + \\
& + H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \int_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q) dq + \\
& + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\gamma^2 - l^2}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_3}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Первый член в v_{rs} представляет собой скорость за фронтом поперечной полусферической волны при $t = t_s$. Второй член — скорость за фронтом так называемой головной волны или волны Шмидта. Фронтом этой волны является поверхность усеченного конуса $t = t_{sd}$ при $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, которая распространяется впереди $t = t_{sd}$, и, таким образом, оказывает действие как впереди, так и позади фронта поперечной волны при $t = t_s$ для $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$. Для фиксированного момента времени t уравнение $t = t_{sd}^*$ определяет поверхность сферы с центром $r = 0$, $z = ct/2\sqrt{\gamma^2 - 1}$ и радиусом $ct/2\sqrt{\gamma^2 - 1}$. Поверхность $t = t_{sd}^*$ аналогична поверхности $t = t_{dc}^*$ и не является фронтом волны, так как она не является ни характеристической, ни огибающей характеристических поверхностей волнового уравнения (1.2) для ψ . При приближении к поверхности $t = t_{sd}^*$ решение является непрерывным, в чем легко убедиться, если заметим, что второй интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow t_{sd}^*$.

Последний член в v_{rs} представляет собой коническую волну, следующую за фронтом нагрузки. Он является вкладом вычета подинтегральной функции в полюсе $\omega = \Omega_c^-$. Фронтом этой волны является поверхность усеченного конуса $t = t_{sc}$ при $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$ и она распространяется впереди $t = t_{sc}^*$. Для фиксированного момента времени уравнение определяет поверхность сферы с центром $r = 0$, $z = ct/2\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1}$ и радиусом $ct/2\sqrt{\frac{c^2}{c_s^2} - 1}$. Поверхность $t = t_{sc}^*$ не является фронтом волны по той же причине, что и для $t = t_{dc}^*$.

На фиг. 6а показана волновая картина (вместе с фронтами продольных волн), соответствующая v_{rs} .

б) Фронт нагрузки распространяется с трансзвуковой скоростью.

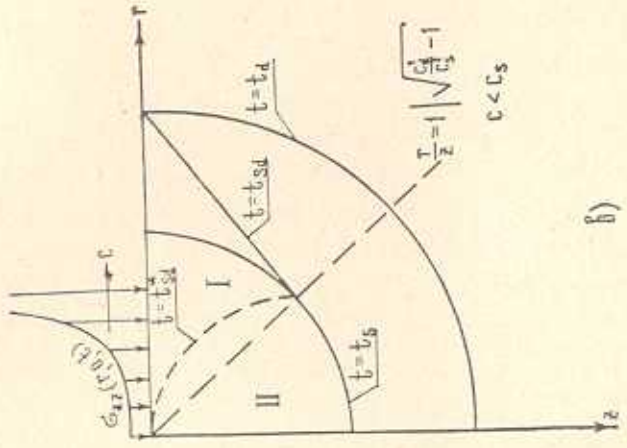
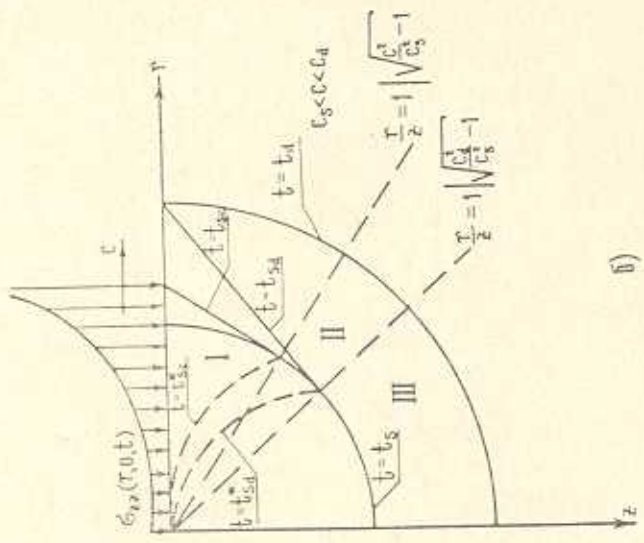
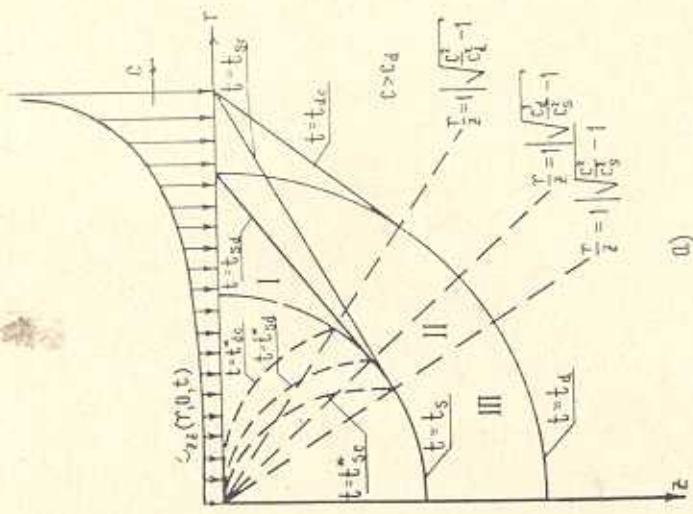
Расположение особенностей подинтегральной функции в плоскости ω для $c_s < c < c_d$ показано на фиг. 7. В зависимости от положения вершины гиперболы ω_s^+ и полюса $\omega = \Omega_c^-$ имеем три случая обращения v_{rs} , каждый из которых соответствует некоторой области полупространства.

Область I: $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ лежит на контуре ω_{sd} для $q \in [0, Q_{sc})$ и не лежит для $q \in (Q_{sc}, \infty)$. Вершина гиперболы ω_s^+ лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

Область II: $1/\sqrt{\gamma^2 - 1} < r/z < l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$. Полюс $\omega = \Omega_c^-$ не лежит на контуре ω_{sd} для $q \in [0, \infty)$. Вершина лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и не лежит для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

Область III: $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Полюс не лежит на ω_{sd} для $q \in [0, \infty)$. Вершина не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

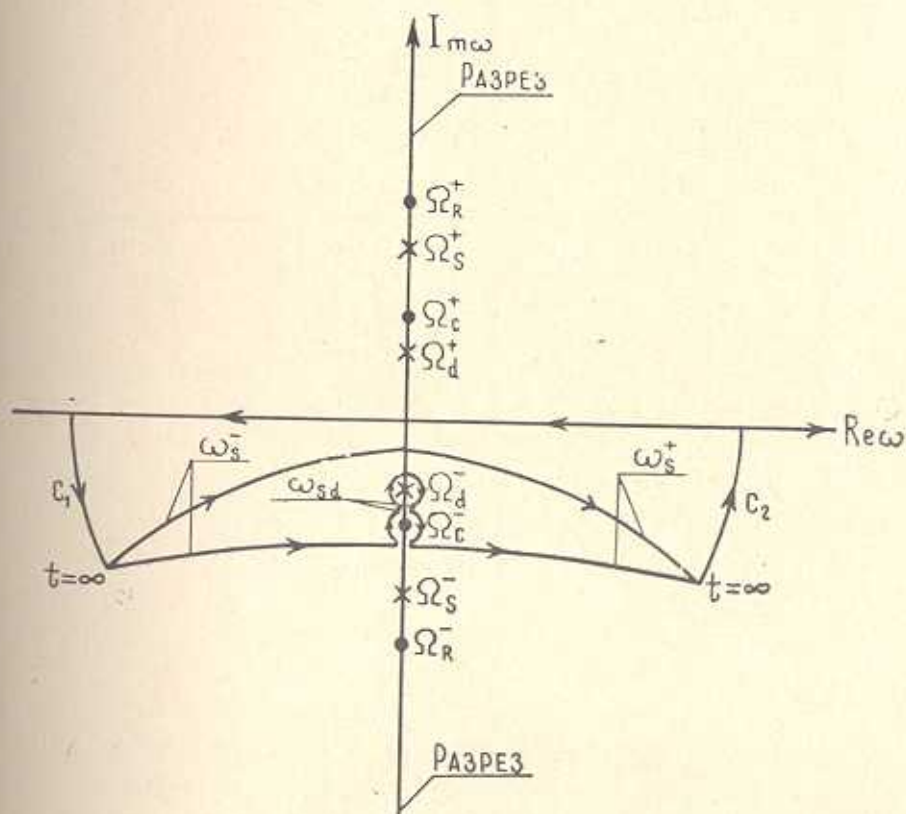
В каждой из этих областей \bar{v}_{rs} обращается для $c_s < c < c_d$ так же, как и для $c > c_d$, за исключением того, что вклад вычета в полюсе $\omega = \Omega_c^-$ вычисляется путем предельного перехода, когда радиусы



Фиг. 6.

двух достаточно маленьких полуокружностей с центром в точке $\omega = \Omega_c^-$ стремятся к нулю. Обращая \bar{v}_{rs} для каждой области и комбинируя полученные результаты в одну формулу, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\pi c^2 v_{rs}}{P_0} = & H(t - t_s) \text{ v. p. } \int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \text{ v. p. } \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{\sqrt{\gamma^2 - l^2}}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_5}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.34)$$



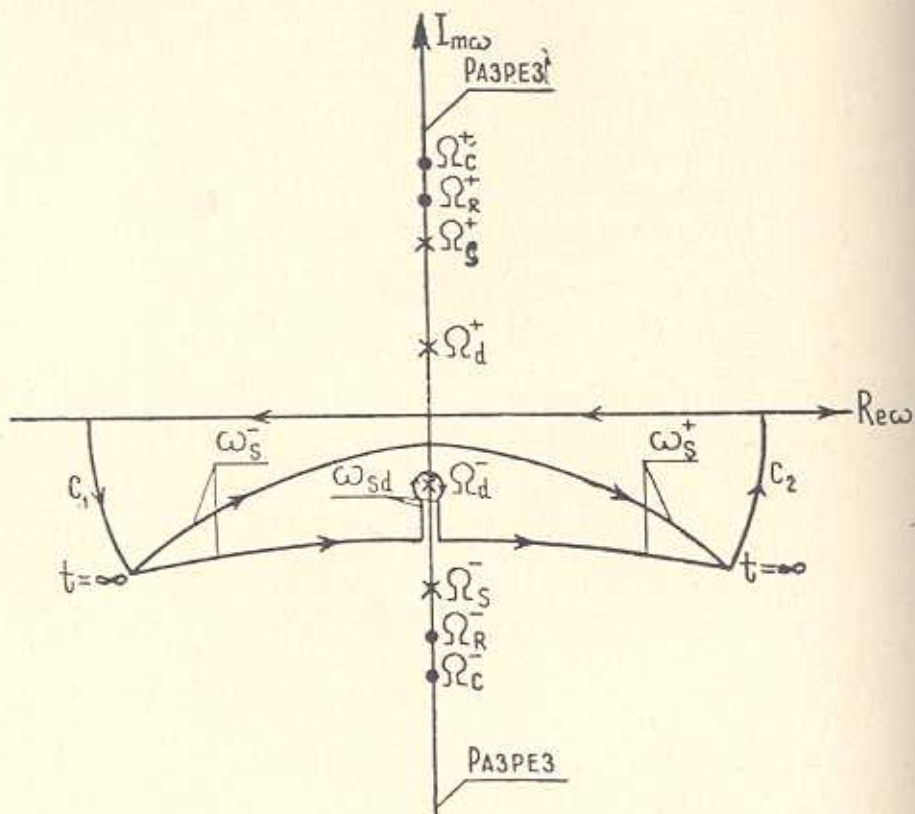
Фиг. 7.

$$\Gamma_5 = - \frac{8\pi c_d^2 l^2 (l^2 - 1) (\gamma^2 - l^2)}{(\gamma^2 - 2l^2)^2 + 16l^4 (\gamma^2 - l^2) (l^2 - 1)} \quad (2.35)$$

Второй интеграл в v_{rs} вычисляется в смысле главного значения по Коши, потому что полюс $\omega = \Omega_c^-$ находится между пределами интегрирования. Волновая картина, соответствующая этому случаю, показана на фиг. 6б.

в) Фронт нагрузки распространяется с дозвуковой скоростью.

Для $c < c_s$ полюс $\omega = \Omega_c^-$ в плоскости ω всегда лежит вне контура S (фиг. 8). Следовательно, имеем два случая обращения \bar{v}_{rs} , каждый из которых соответствует некоторой области полупространства.



Фиг. 8.

Область I: $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Вершина гиперболы ω_s^- лежит на разрезе для $q \in [0, Q_{sd})$ и лежит вне разреза для $q \in (Q_{sd}, \infty)$.

Область II: $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$, $z > 0$. Вершина гиперболы ω_s^+ не лежит на разрезе для $q \in [0, \infty)$.

Обращая \bar{v}_{rs} в этих двух областях и комбинируя их в одну формулу, имеем

$$\frac{\pi c^{1/2} v_{rs}}{P_0} = H(t - t_s) \int_0^{q_s} F_2(\omega_s, q) dq +$$

$$+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_3(\omega_{sd}, q) dq \quad (2.36)$$

Как и следовало ожидать, волна, следующая за фронтом распространяющейся нагрузки, в случае $c < c_s$ отсутствует.

Обращение выражения для \bar{v}_{zs}

$$\frac{\pi c_s^3 \bar{v}_{zs}}{P_0} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty M_{zs}(\omega, q) \exp[-p(i\omega r + m_s z)] d\omega dq \quad (2.37)$$

производится точно так же, как и для \bar{v}_{rs} . Приводим окончательные результаты для сверхзвуковой, транззвуковой и дозвуковой скоростей распространения фронта нагрузки соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\pi c_s^3 v_{zs}}{P} &= H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} F_4(\omega_s, q) dq + \\ &+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_4(\omega_{sd}, q) dq + \\ &+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\gamma^2 - l^2}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_4}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c_s^3 v_{zs}}{P_0} &= H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} F_4(\omega_s, q) dq + \\ &+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \text{v. p.} \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_4(\omega_{sd}, q) dq + \\ &+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\gamma^2 - l^2}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_4}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c_s^3 v_{zs}}{P_0} &= H(t - t_s) \int_0^{q_s} F_4(\omega_s, q) dq + \\ &+ H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_4(\omega_{sd}, q) dq \end{aligned} \quad (2.40)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$F_4(\omega, q) = 2 \operatorname{Re} M_{zs}(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, \quad \Gamma_4 = -\frac{l\Gamma_3}{V\gamma^2 - l^2}, \quad \Gamma_4 = -\frac{l\Gamma_3}{V\gamma^2 - l^2} \quad (2.41)$$

Сумма v_{jd} и v_{js} ($j = r, z$) определяет радиальную и вертикальную скорости. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi c p v_r}{P_0} = & H(t - t_d) v. \text{ p. } \int_0^{q_d} F_1(\omega_d, q) dq + H(t - t_s) v. \text{ p. } \int_0^{q_s} F_3(\omega_s, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) v. \text{ p. } \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_2(\omega_{sd}, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V1 - l^2}\right) H(t - t_{dc}) H(t_{dc}^* - t) \frac{\Gamma_{c1}[c(t - t_{dc}) + r]}{rV[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2} + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\gamma^2 - l^2}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_{c3}}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi c p v_z}{P_0} = & H(t - t_d) v. \text{ p. } \int_0^{q_d} F_2(\omega_d, q) dq + H(t - t_s) v. \text{ p. } \int_0^{q_s} F_4(\omega_s, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{1}{V\gamma^2 - 1}\right) H(t - t_{sd}) H(t_{sd}^* - t) v. \text{ p. } \int_{q_{sd}}^{q_{sd}} F_4(\omega_{sd}, q) dq + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V1 - l^2}\right) H(t - t_{dc}) H(t_{dc}^* - t) \frac{\Gamma_{c2}}{V[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2} + \\ & + H\left(\frac{r}{z} - \frac{l}{V\gamma^2 - l^2}\right) H(t - t_{sc}) H(t_{sc}^* - t) \frac{\Gamma_{c4}}{V[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{ci} = \begin{cases} \Gamma_i & \text{при } c > c_d, \\ 0 & \text{при } c < c_d, \end{cases} \quad \Gamma_{ci+2} = \begin{cases} \Gamma_{i+2} & \text{при } c > c_d \\ \Gamma_{i+4} & \text{при } c_s < c < c_d \\ 0 & \text{при } c < c_s \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (2.44)$$

В этих формулах одинарные интегралы представляют волны, исходящие из начального положения нагрузки, а алгебраические члены — волны, следующие за фронтом распространяющейся нагрузки.

Полученное решение справедливо для внутренних точек полупространства, то есть для области $r \geq 0, z > 0$. Когда $z \rightarrow 0$, контуры ω_1^+ и ω_1^- обходят полюс $\omega = \Omega_R^-$ в плоскости ω . Следовательно, при обращении \bar{v}_{jd} и \bar{v}_{js} ($j = r, z$) появляется вклад от вычета подинтегральной функции в полюсе $\omega = \Omega_R^-$, соответствующий поверхностной волне Рэлея.

Обращение формул (2.3) для $z=0$ мы не приводим.

§ 3. Поведение решения в окрестностях фронтов волн

Когда t стремится к характерным временам t_d, t_s, t_{sd} и t_{sc} , компоненты скорости становятся неопределенными. Выясним характер этих неопределенностей, то есть поведение решения в окрестностях фронтов волн. Поведение решения вблизи фронтов волн, исходящих из начального положения нагрузки, получим, если исключим время в пределах рассматриваемых интегралов с помощью замены

$$q = V \sqrt{q_1^2 + (q_2^2 - q_1^2) \sin^2 \alpha} \quad (3.1)$$

где q_1 и q_2 — нижний и верхний пределы рассматриваемого интеграла, а потом разложим в ряды подинтегральные выражения при $t \rightarrow t_d, t \rightarrow t_s$ и $t \rightarrow t_{sd}$.

Для волн, исходящих из начального положения нагрузки, имеют место разложения

$$\int_0^{q_d} [F_1(\omega_d, q) + F_2(\omega_d, q)] dq = \frac{\pi c_d^2 \rho z (r+z) a_1}{2a_0 (a_1^2 + 4r^2 z a_2)} + O(t-t_d)^{1/2} \quad (3.2)$$

когда $t \rightarrow t_d$

$$\int_0^{q_s} [F_3(\omega_s, q) + F_4(\omega_s, q)] dq = \frac{\pi c_d^2 \rho z (r-z) a_2}{a_3 (\gamma a_1^2 + 4r^2 z a_2)} + O(t-t_s)^{1/2} \quad (3.3)$$

$$\text{для } \frac{r}{z} < \frac{1}{V \gamma^2 - 1}, \quad \text{когда } t \rightarrow t_s$$

$$\int_{q_{sd}}^{q_{sd}} [F_2(\omega_{sd}, q) + F_4(\omega_{sd}, q)] dq = \frac{8c_d^3 \sqrt{(\gamma^2 - 1)^3 (V \gamma^2 - 1 + 1)} (t - t_{sd})}{V r (\gamma^2 - 2)^2 (l^2 - 1) a_5^3} +$$

$$+ O(t - t_{sd})^2 \quad \text{для } r/z > 1/V \gamma^2 - 1, \quad \text{когда } t \rightarrow t_{sd} \quad (3.4)$$

$$\int_{q_{sd}^*}^{q_{sd}} [F_2(\omega_{sd}, q) + F_4(\omega_{sd}, q)] dq = \frac{4c_j^2 r z^2 \rho a_2 (\gamma a_4^2 - 4r^3 a_2) \ln \left| \frac{t}{t_s} - 1 \right|}{a_3 (\gamma^2 a_4^2 + 16 r^4 z^2 a_2^2)} +$$

$$+ O(1) \quad \text{для } r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}, \text{ когда } t \rightarrow t_s \quad (3.5)$$

где

$$a_0 = l^2 \rho^2 - r^2, \quad a_1 = \gamma^2 \rho^2 - 2r^2, \quad a_2 = \sqrt{\gamma^2 \rho^2 - r^2}$$

$$a_3 = l^2 \rho^2 - \gamma^2 r^2, \quad a_4 = \rho^2 - 2r^2, \quad a_5 = \sqrt{r \sqrt{\gamma^2 - 1} - z} \quad (3.6)$$

Волны, следующие за фронтом распространяющейся нагрузки, в окрестностях фронтов $t = t_{dc}$ и $t = t_{sc}$ имеют разложения

$$\frac{\Gamma_{c1} [c(t - t_{dc}) + r] + r\Gamma_{c3}}{r \sqrt{[c(t - t_{dc}) + r]^2 - r^2}} = \frac{\Gamma_{c1} + \Gamma_{c3}}{\sqrt{2cr}} (t - t_{dc})^{-1/2} + O(t - t_{dc})^{1/2} \quad (3.7)$$

для $r/z > l/\sqrt{1 - l^2}$, когда $t \rightarrow t_{dc}$

$$\frac{\Gamma_{c2} + \Gamma_{c4}}{\sqrt{[c(t - t_{sc}) + r]^2 - r^2}} = \frac{\Gamma_{c2} + \Gamma_{c4}}{\sqrt{2cr}} (t - t_{sc})^{-1/2} + O(t - t_{sc})^{1/2}$$

для $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, когда $t \rightarrow t_{sc}$

Полученные результаты справедливы для области $r \geq 0$, $z > 0$, за исключением конических поверхностей $lz - r\sqrt{1 - l^2} = 0$, $lz - r\sqrt{\gamma^2 - l^2} = 0$, $z - r\sqrt{\gamma^2 - 1} = 0$ — следов линий смыкания сферических и конических фронтов волн, так как при этом формулы теряют смысл. Поведение решения вблизи этих особых поверхностей может быть получено из общей теории [2].

Прифронтовые разложения показывают следующее.

1. Скорости v_j ($j = r, z$) теряют конечный разрыв на фронтах полусферических продольных волн при $t = t_d$ и поперечных волн при $t = t_s$ для $r/z < 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$. Скорости остаются непрерывными на фронте конической волны при $t = t_{sd}$. Вблизи фронта $t = t_s$ для $r/z > 1/\sqrt{\gamma^2 - 1}$ скорости имеют логарифмическую двухстороннюю симметричную особенность.

2. На конических фронтах, исходящих от фронта нагрузки, скорости имеют особенности половинного порядка $(t - t_{dc})^{-1/2}$ и $(t - t_{sc})^{-1/2}$ при $t \rightarrow t_{dc}$ и $t \rightarrow t_{sc}$, то есть ту же особенность, что и внешняя нагрузка. Физически такие сильные разрывы и особенности в окрестностях фронтов волн нереальны, и, по-видимому, обусловлены тем, что фронт распространяющейся нагрузки сам несет особенность половинного порядка и начинает распространяться из точки. Заметим, что логарифмические особенности в окрестностях фронтов волн были найдены также в работах [3, 4].

3. По мере удаления от точки приложения нагрузки в глубину полупространства компоненты скорости убывают как $r^{-\frac{1}{2}}$ на фронтах конических волн при $t = t_{dc}$ и $t = t_{sc}$. Поэтому в областях $r/z > l/\sqrt{1-l^2}$, $z > 0$ и $r/z > l/\sqrt{\gamma^2 - l^2}$, $z > 0$ существенные эффекты могут оказать эти волны.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 21 VI 1973

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿԻԱՆ

ՎԱԶՈՂ ԱՌՈՆԵՅՔԱՄԲՄԵՏՐԻԿ ԿՈՐՄԱԼ ԲԵՌՆԱՑ ԱՌՈՋԱՑՈՂ ԱՎԻՔՆԵՐՆ
ԱՌՈՋԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱՄՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ ֆ ո լ ո ս լ մ

Գիտարկվում է համասեռ, իզոտրոպ կիսատարածությունում առաձգական ալիքների տարածման մասին առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ ալիքներն առաջանում են մակերևույթի վրա վազող նորմալ բեռից: Նորմալ բեռն իրենից ներկաչացնում է ճնշումը հարվածային ալիքի ճակատի հետևում, որը տարածվում է կիսատարածության մակերևույթի վրա՝ որևէ կետից, հաստատուն արագությամբ:

Խնդիրը լուծելու համար օգտագործվում են Լուպլասի և Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխությունները և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդները:

Բացահայտված են ալիքի ճակատների մոտ լուծման եզակիությունները: Ստացվել են առաձգական միջավայրում ալիքի ճակատների մոտ փնտրվող մեծությունների համար ասիմպտոտիկ գնահատականներ:

WAVES IN AN ELASTIC SEMISPACE INDUCED BY A RUNNING AXISYMMETRIC NORMAL LOAD

S. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The axisymmetric problem on propagation of elastic waves in a uniform isotropic semispace induced by a normal load running on its surface is considered. The normal load represents a pressure behind the front of the blast wave propagating at a steady velocity on the surface of the semispace from a certain point.

For solving the problem the Laplas and Hankel integral transformations are applied. The solution to the problem is built on images satisfying initial and boundary conditions. After the conversion of the

Hankel transformation the Laplas transformation conversion is found by the methods of the theory of functions of a complex variable. An analysis of the formulas derived and their expansions on wave fronts are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Erdelyi A. ed. Tables of Integral Transforms, vol. 2. McGraw-Hill, N. Y. 1954.
2. Бандова А. Г., Даноян Э. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Ж. вычислит. матем. и мат. физики, т. 12, № 6, 1972.
3. Gakenhelmer D. C., Miklowitz J. Transient Excitation of an Elastic Half Space by a Point Load Traveling on the Surface. Transaction of the ASME, E 36, № 3, 1969.
4. Gakenhelmer D. C. Response of an Elastic Half Space to Expanding Surface Loads. Transactions of the ASME, E 37, № 1, 1970.