ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 1, 1974 Механика

С. С. ШАГИНЯН

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, УСИЛЕННОЙ НА СВОЕЙ ГРАНИЦЕ УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Исследованию контактных задач для упругих тел, усиленных упругими креплениями в виде накладок (стрингеров) малой толщины, которые тесно примыкают к попросам передачи нагрузок от стрингеров упругим телам и представляют большой интерес для инженерной практики, посвящены работы многих авторов. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в работах [1, 2]. Здесь же только отметим, что контактная задача для полуплоскости, усиленной на конечном отрезке своей границы приваренной к ней упругой накладкой малой толщины, с точки зрения выяснения особенностей контактных напряжений на концах упругой накладки была рассмотрена в работе [3]. Позже некоторые контактные задачи для полуплоскости, усиленной различными способами нагруженными и скрепленными с основанием накладками, рассматривались в работах [4, 5]. В работе [6] рассмотрена контактная задача для плоскости с круговым отверстием, граница которой усилена упругой кольцевой накладкой малой толщины.

В настоящей работе рассматриваются некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на конечных отрезках своей границы упругими накладками малой толщины.

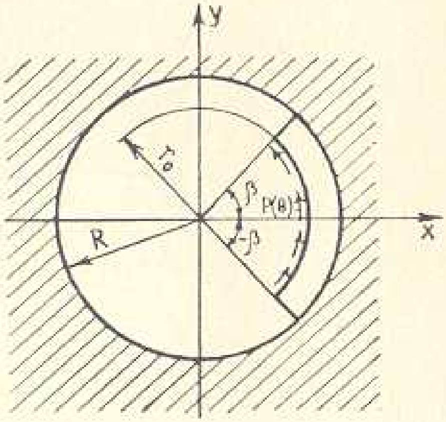
Для характерных в исследуемой задаче механических величин — касательных контактных напряжений — получены формулы, содержащие в явном виде присущие этим напряжениям особенности в окрестностях концов упругих накладок.

Эти контактные задачи рассматриваются для случая упругих пластин с круговым отверстием, находящихся в обобщенном плоском напряженном состоянии, а также для случая упругого пространства с бесконечным цилиндрическим отверстием, находящегося в условиях плоской деформации.

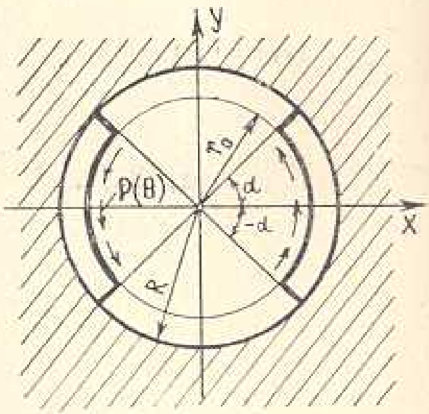
Указанные контактные задачи, как нам представляется, ставятся и решаются в настоящей работе впервые.

1. *Постановка задач и вывод определяющих уравнений.* Пусть плоскость с круговым отверстием радиуса $R=1$, что не нарушает общности, вдоль конечного дугового отрезка своей границы усилена приваренной к ней упругой накладкой, имеющей вид трапеции, которая ограничена дугами двух концентрических окружностей и отрезками радиусов. Предположим, что накладка имеет достаточно малую толщину. Кроме того, пусть на внутренней стороне этой накладки действует касательная нагрузка интенсивности $\rho(\theta)$ (фиг. 1).

Во второй задаче предполагается, что такая же упругая плоскость вдоль симметрично расположенных конечных отрезков своей границы усилена одинаковыми упругими накладками такой же формы, как и выше, нагруженными симметричными внешними касательными нагрузками (фиг. 2).

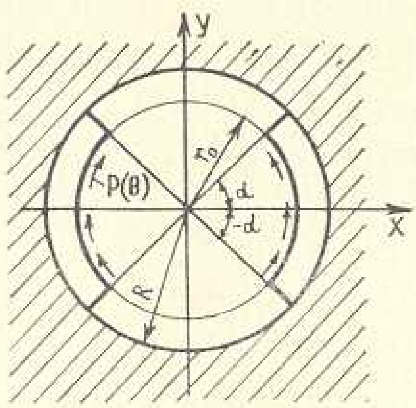


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Рассматривается также случай кососимметрично нагруженной накладки (фиг. 3).



Фиг. 3.

Цель нашей работы заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с основанием. В дальнейшем будет рассматриваться только первая контактная задача. Решение остальных задач можно получить вполне аналогичным способом.

Приняв те же физические предположения, что и в работе [6] и поступив точно так же, как в этой работе [6], находим, что решение указанной выше задачи после некоторых операций сводится к решению следующего сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\beta}^{\beta}\left\{\frac{1}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}+K(t-s)\right\}\Psi'(s)\,ds=\lambda\Psi(t)-\lambda g(t),\quad(-\beta<t<\beta)\tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\Psi(-\beta)=0,\quad \Psi(\beta)=1\tag{1.2}$$

где первый интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Здесь параметр λ, зависящий от геометрических и упругих характеристик накладки и плоскости, имеет значения

$$\lambda=\frac{R^2}{2r_0h}\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}{(1-\nu_2^2)(1-\nu_1)E_1},\qquad \lambda=\frac{R^2}{2r_0h}\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)E_2}{(1-\nu_1)E_1}$$

соответственно случаям плоского деформированного состояния и обобщенного плоского напряженного состояния. Постоянные E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, отмеченные индексами 1 и 2, относятся к накладкам и плоскости соответственно. Далее,

$$g(t)=g_1(t)/g_1(\beta),\quad g_1(t)=\int_{-\beta}^{t}p(s)\,ds,\quad(-\beta\leqslant t\leqslant\beta)$$

а

$$K(t-s)=\frac{\ln 2+\varkappa(1+\ln 2)}{\pi(1+\varkappa)}\sin(t-s)+\frac{1}{\pi}\sin(t-s)\ln\left|\sin\frac{t-s}{2}\right|+$$

$$+\frac{1-\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\left[\pi-|t-s|\right]\cos(t-s)\operatorname{sign}(t-s)\quad(-\beta\leqslant t,\ s\leqslant\beta)$$

Входящая сюда постоянная $\varkappa$ имеет различные значения для различных состояний упругого тела [7], а именно $\varkappa=3-4\nu_2$ в случае плоской деформации и $\varkappa=(3-\nu_2)/(1+\nu_2)$ для обобщенного плоского напряженного состояния.

Легко видеть, что функция $K(t-s)$ в квадрате $-\beta\leqslant t,\ s\leqslant\beta$ непрерывна как функция двух переменных и имеет интегрируемые частные производные первого порядка.

Контактное напряжение будет даваться формулой

$$\tau(t)=\frac{r_0^2}{R^2}g_1(\beta)\Psi'(t),\quad(-\beta<t<\beta<\pi)\tag{1.3}$$

Таким образом, решение рассмотренной контактной задачи приводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2), ядро которого представлено в виде суммы известного ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$ и регулярного ядра в виде функций $K(t-s)$. Иными словами, в ядре уравнения (1.1) выделены его сингулярная часть в виде ядра Гильберта и регулярная часть в виде непрерывной функции $K(t-s)$.

2. *Об особенностях контактных напряжений вблизи концов упругих накладок.* Для выяснения этого вопроса заметим, что потенциальная энергия деформации плоскости с круговым отверстием вследствие ее деформации контактными напряжениями должна быть величиной конечной. Поэтому возможные особенности контактных напряжений вблизи концов упругих накладок должны быть интегрируемого порядка. Из сказанного и из (1.3) следует, что имеет место представление

$$\Psi'(t)=\frac{\chi_0(t)}{(\beta-t)^{\gamma_1}(\beta+t)^{\gamma_2}},\qquad(-\beta<t<\beta)$$

где $0<\gamma_1,\ \gamma_2<1$, $\chi_0(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера на отрезке $-\beta\leqslant t\leqslant\beta$.

Исходя из этого представления и учитывая известную связь между ядрами Гильберта и Коши

$$\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}=i\left[1+2\frac{\sigma}{\zeta-\sigma}\right],\quad \zeta=e^{is},\quad \sigma=e^{it}$$

на основе результатов [8], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что

$$\gamma_1=\gamma_2=1/2$$

Таким образом, имеет место следующее представление:

$$\Psi'(t)=\frac{\chi_1(t)}{\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}},\quad(-\beta<t<\beta)\tag{2.1}$$

где $\chi_1(t)=\chi_0(t)\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}/\sqrt{\beta^2-t^2}$ — функция класса H на отрезке $[-\beta,\ \beta]$.

Отметим, что подробное исследование вопроса об особенностях напряжений в некоторых классах смешанных задач теории упругости содержится в работе [9].

3. *Приведение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) с граничным условием (1.2) к бесконечной системе уравнений.* Сначала приводим следующие интегральные соотношения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}T_{2m}\left(\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\frac{\cos\frac{s}{2}\,ds}{\sqrt{2\cos s-2\cos\beta}}=$$

$$=\begin{cases}0, & m=0\\[2mm] \dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\beta}{2}\,U_{2m-1}\left(\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\cos\dfrac{t}{2}, & m=1,\ 2,\ldots\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\beta}^{\beta}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}T_{2m-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)\frac{\sec\frac{s}{2}\,ds}{\sqrt{2\cos s-2\cos\beta}}=$$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}U_{2m-2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)\sec^2\frac{t}{2},\quad m=1,2,\ldots \qquad (3.2)^*$$

нужные нам в дальнейшем. Отметим, что они получаются из известного соотношения

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_n(y)\,dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}=\pi U_{n-1}(x),\quad (n=1,2,\ldots),\quad |x|<1$$

при помощи элементарных выкладок. В последней формуле $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ и $U_n(x)=\sin[(n+1)\arccos x]/\sin\arccos x$, $(n=0,1,\ldots)$ — известные многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Далее, ввиду (2.1), решение уравнения (1.1) представим формулой

$$\Psi'(t)=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}}\sum_{m=0}^{\infty}x_{2m}T_{2m}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)+$$

$$+\frac{\sec\frac{t}{2}}{\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m-1}T_{2m-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right) \qquad (3.3)$$

с неизвестными коэффициентами $\{x_{2m}\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{x_{2m-1}\}_{m=1}^{\infty}$.

Отметим, что первая сумма в формуле (3.3) с точностью постоянного множителя представляет собой симметричную часть неизвестных контактных напряжений, а вторая сумма — кососимметричную часть тех же напряжений.

Интегрируя обе части (3.3) в пределах $(-\beta, t)$ и учитывая (1.2), будем иметь

$$\Psi(t)=x_0\left[\pi/2+\arcsin\left(\sin\frac{t}{2}\csc\frac{\beta}{2}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m}(2m)^{-1}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,U_{2m-1}\left(\sin\frac{t}{2}\csc\frac{\beta}{2}\right)-$$

---

* Аналогичные соотношения приведены в работе [10] в несколько другом виде.

$$-\frac{1}{2}\sec\frac{\beta}{2}\csc\frac{\beta}{2}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m-1}(2m-1)^{-1}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\sec\frac{t}{2}\times$$

$$\times U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \tag{3.4}$$

Отсюда коэффициент x_0 определяется непосредственно, а именно: $x_0=\pi^{-1}$.

Подставив (3.3) и (3.4) в (1.1) и используя соотношения (3.1) и (3.2), известным способом [2] получим бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$x_{2k}+\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m}(2m)^{-1}[A_{2m-1,\,2k-1}+B_{2m-1,\,2k-1}]=$$

$$=\left(\pi\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-1}b_{2k-1},\ k=1,2,\ldots \tag{3.5}$$

$$x_{2k-1}+\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}x_{2m-1}(2m-1)^{-1}[A_{2m-2,\,2k-2}+B_{2m-2,\,2k-2}]=$$

$$=\left(\pi\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^{-1}b_{2k-2},\quad k=1,2,\ldots \tag{3.6}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$A_{2m-1,\,2k-1}=\left[\lambda-\frac{1-x}{1+x}\right]\int_{-\beta}^{\beta}U_{2m-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\times$$

$$\times U_{2k-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)(2\cos t-2\cos\beta)\,dt,\quad m,k=1,2,\ldots$$

$$B_{2m-1,\,2k-1}=\int_{-\beta}^{\beta}U_{2m-1}\left(\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\sqrt{2\cos s-2\cos\beta}\,ds\int_{-\beta}^{\beta}G(t-s)\times$$

$$\times U_{2k-1}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,dt,\ m,k=1,2,\ldots$$

$$b_{2k-1} = \int_{-\beta}^{\beta} \left[\lambda\pi^{-1} \arcsin \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) - \pi^{-1} R(t) - \lambda g(t) \right] \times$$

$$\times U_{2k-1} \left(\frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$A_{2m-2,\, 2k-2} = \left[\lambda - \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \right] \int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \times$$

$$\times U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) (2\cos t - 2\cos\beta) \sec^2 \frac{t}{2}\, dt, \quad m,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$B_{2m-2,\, 2k-2} = \int_{-\beta}^{\beta} U_{2m-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2\cos s - 2\cos\beta}\, \sec \frac{s}{2}\, ds \times$$

$$\times \int_{-\beta}^{\beta} G(t-s)\, U_{2k-2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right) \sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}\, \sec \frac{t}{2}\, dt, \quad m,\ k = 1, 2, \ldots$$

$$b_{2k-2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\beta}^{\beta} [1 - 2g(t)] \sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}\, \sec \frac{t}{2}\, U_{2k-2} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) dt$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

где

$$G(t-s) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{2\varkappa + (\varkappa + 1)\ln 2}{\pi(1+\varkappa)} \cos(t-s) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \cos(t-s) \ln \left| \sin \frac{t-s}{2} \right| + \frac{1-\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)} [\pi - |t-s|] \sin(t-s) \operatorname{sign}(t-s)$$

$$(-\beta \leqslant t,\ s \leqslant \beta)$$

$$R(t) = \int_{-\beta}^{\beta} K(t-s) \frac{\cos \frac{s}{2}\, ds}{\sqrt{2\cos s - 2\cos\beta}}, \quad [R(t) = -R(-t),\ -\beta \leqslant t \leqslant \beta < \pi]$$

4. *Исследование бесконечных систем линейных уравнений.* Обратимся сначала к бесконечной системе (3.6). Для ее исследования оценим суммы

$$S_{2k-2}=\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-1}\,|A_{2m-2,\,2k-2}+B_{2m-2,\,2k-2}|,\quad k=1,2,\ldots$$

При помощи неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$S_{2k-2}\leqslant\left(2\pi\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-2}\right]^{1/2}\left[(M'_{2k-2})^{1/2}+(M''_{2k-2})^{1/2}\right]$$

где

$$M'_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}A^2_{2m-2,\,2k-2},\qquad M''_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}B^2_{2m-2,\,2k-2}$$

или же

$$S_{2k-2}\leqslant\left(4\sqrt{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)^{-1}\left[(M'_{2k-2})^{1/2}+(M''_{2k-2})^{1/2}\right]\tag{4.1}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\omega(t)=\left|\lambda-\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right|2\pi\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,U_{2k-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\times$$
$$\times\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\cos\frac{t}{2}$$

Коэффициентами Фурье последней функции по полной ортогональной в $L^2_\rho(0,\beta)\left(\rho(t)=\sec^3\dfrac{t}{2}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\right)$ системе многочленов $\left\{U_{2m-2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ будут как раз коэффициенты $\{A_{2m-2,\,2k-2}\}_{m,\,k=1}^{\infty}$. Следовательно, на основании известного равенства Парсеваля

$$M'_{2k-2}=\left|\lambda-\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right|^2 4\pi^2\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\,\sec^3\frac{t}{2}\times$$
$$\times\left|U_{2k-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2\cos t-2\cos\beta}\cos\frac{t}{2}\right|^2dt$$

Оценив входящий сюда интеграл, для M'_{2k-2} окончательно находим

$$(M'_{2k-2})^{1/2}\leqslant\left|\lambda-\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right|4\pi\sqrt{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin^3\frac{\beta}{2},\quad k=1,2,\ldots\tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\Omega(s) = 2\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{s}{2}\int_{-\beta}^{\beta} G(t-s)\times$$

$$\times U_{2k-2}\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\sqrt{2\cos t - 2\cos\beta}\sec\frac{t}{2}\,dt$$

Совершенно аналогичным образом будем иметь

$$(M_{2k-2}^{*})^{1/2} \leqslant 8\pi \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{\beta\sin\frac{\beta}{2}}\,N \tag{4.3}$$

Здесь

$$N^2 = 4Q^2\beta^2 + \frac{4Q}{\pi}[\beta^2 - 2\beta^2\ln(2\beta) + 2\beta^2(1+\ln 2) +$$

$$+ 4\beta^2\ln\beta - 4\beta^2\ln\sin\beta] + 2\pi^{-2}\{2\beta^2\ln^2(2\beta) - 2\beta^2\ln(2\beta) +$$

$$+ \beta^2 - (2+\ln 4)[2\beta^2\ln(2\beta) - \beta^2] - 4\beta^2 - 4\beta^2\ln 2 + 4\beta^2\ln^2 2\}$$

$$Q = \frac{1}{2\pi} + \frac{2\varkappa + (\varkappa+1)\ln 2}{\pi(1+\varkappa)} + \frac{\varkappa - 1}{2\pi(\varkappa+1)},$$

Для вполнерегулярности системы (3.4) достаточно, чтобы выполнялось условие $S_{2k-2} \leqslant q < 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. С учетом (4.1), (4.2) и (4.3) это условие примет вид

$$\lambda < \pi^{-3/2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\csc\frac{\beta}{2} - N\sqrt{\frac{2}{\pi}\beta\csc\frac{\beta}{2} + \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}}$$

Теперь докажем, что для любого значения параметра $\lambda\,(0 \leqslant \lambda < \infty)$ бесконечная система квазирегулярна. С этой целью заметим следующее. Исследование системы (3.6) с ядром $(2m-1)^{-1}A_{2m-2,\,2k-2}$, к которой сводится сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (1.1) с граничным условием (1.2) в случае только ядра Гильберта $(2\pi)^{-1}\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}$, содержится в работах [4, 10]. Покажем, что добавление к этому ядру нового ядра $(2m-1)^{-1}B_{2m-2,\,2k-2}$, которое обусловлено наличием в структуре ядра исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1) регулярной части в виде функции $K(t-s)$, не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазивполнерегулярности. Действительно, если обозначим через $K_{2m-2,\,2k-2} = (2m-1)^{-1}B_{2m-2,\,2k-2}$, то при помощи неравенства Коши-Буняковского получим

$$L_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}|K_{2m-2,\,2k-2}|\leqslant\left[\sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)^{-2}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\sum_{m=1}^{\infty}B^2_{2m-2,\,2k-2}\right]^{1/2}=8^{-1/2}\,\pi\,(M^*_{2k-2})^{1/2}$$

С другой стороны, как легко видеть, коэффициенты $\{B_{2m-2,\,2k-2}\}^{\infty}_{m,\,k=1}$ являются коэффициентами Фурье функции

$$f(t,\ s)=4\pi^2\,\mathrm{tg}^4\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\,G(t-s)\cos^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{s}{2}$$

по системе многочленов

$$\left\{U_{2m-2}\left(\mathrm{tg}\frac{s}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)U_{2k-2}\left(\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\right\}^{\infty}_{m,\,k=1}$$

которые составляют полную ортогональную систему в классе функций, квадратично суммируемых с весом $\rho_1(t,\ s)$ $(\rho_1(t,\ s)=\rho(t)\,\rho(s))$ на квадрате $0\leqslant t,\ s\leqslant\beta$. Тогда вследствие неравенства Бесселя двойной ряд

$$\sum_{m,\,k=1}^{\infty}B^2_{2m-2,\,2k-2}$$

сходится. Следовательно, сходится и ряд [11]

$$\sum_{k=1}^{\infty}M^*_{2k-2},\qquad M^*_{2k-2}=\sum_{m=1}^{\infty}B^2_{2k-2,\,2m-2}$$

Отсюда, по крайней мере,

$$M^*_{2k-2}=O\,[(2k-2)^{-1-\varepsilon}],\quad k\to\infty$$

где ε—сколь угодно малое положительное число.

Приняв во внимание выражение для L_{2k-2} будем иметь

$$L_{2k-2}=O[(2k-2)^{-(1+\varepsilon)/2}],\quad k\to\infty$$

что и доказывает высказанное выше утверждение.

Далее, можно показать, что свободный член этой системы стремится к нулю при $k\to\infty$ со скоростью не менее, чем $(2k-2)^{-1}$. В этом легко убедиться, если в выражении свободного члена произвести замену переменного интегрирования следующим образом:

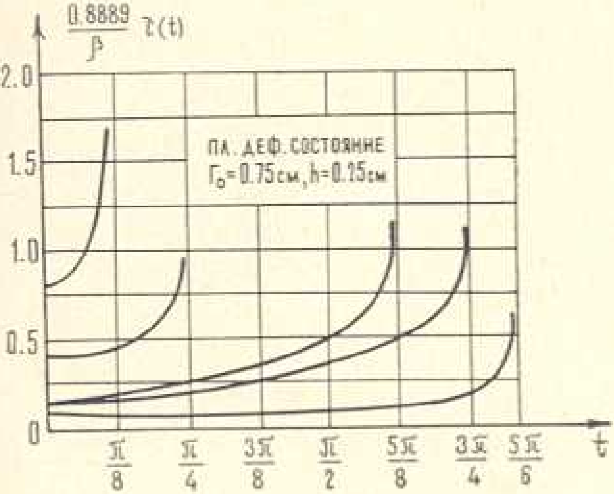
$$\cos\varphi=\mathrm{tg}\frac{t}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2},\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

а затем пользоваться формулой интегрирования по частям.

Совершенно аналогичным образом исследуется бесконечная система (3.5).

Перейдем к обсуждению числовых результатов. Численная реализация полученных формул произведена на ЭВМ «Наири-2». При этом предполагалось, что внешняя нагрузка, действующая на накладку, распределена равномерно с интенсивностью $\rho(\theta)=1$ *кг/см*^{2}, а толщина накладки — $h=0.25$ *см*. Остальные параметры варьировались различными способами. Эти вариации включали выбор материалов контактирующих пар накладка-плоскость с круговым отверстием, а также длину участка контакта.

При решении соответствующих бесконечных систем линейных уравнений ограничивались лишь решением системы десяти уравнений, поскольку ее решение с точностью по крайней мере шестизначных цифр совпало с решением системы из восьми уравнений. Здесь же отметим, что при вычислении коэффициентов бесконечных систем, которые представлены в виде интегралов, ограничивались такой точностью, чтобы в дробных частях значений этих интегралов совпадали по крайней мере трехзначные цифры. В таблицах указаны решения соответствующих систем линейных уравнений для различных контактирующих пар и для различных значений длины участка контакта. При вычислении контактных напряжений ограничивались одиннадцатью членами. На графиках (фиг. 4) показано влияние изме-



Фиг. 4.

нения длины участка контакта на закон распределения контактных напряжений для одной и той же контактирующей пары. При этом было замечено следующее: если при возрастании параметра λ контактное напряжение имеет лишь малозаметную тенденцию уменьшения, то изменение параметра β явным образом влияет на распределение контактных напряжений под упругой накладкой. Точнее, с возрастанием параметра β контактное напряжение под упругой накладкой существенно уменьшается. Эта закономерность полностью согласуется с принятой нами физической моделью накладки.

Значения коэффициентов в формуле (3.3) для различных значений физических и геометрических параметров приведены в таблицах.

Таблица 1

$\beta_1=0.3927$					
	$\lambda_1=0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2=2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3=3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4=4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5=5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0007	−0.0084	−0.0215	−0.0265	−0.0344
x_4	0.0010	0.0032	0.0041	0.0045	0.0047
x_6	0.0003	0.0011	0.0018	0.0022	0.0028
x_8	0.0002	0.0008	0.0009	0.0010	0.0014
x_{10}	0	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006
x_{12}	0	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003
x_{14}	0	0	0	0	0.0001
x_{16}	0	0	0	0	0
x_{18}	0	0	0	0	0
x_{20}	0	0	0	0	0

Таблица 2

$\beta_2=0.7854$					
	$\lambda_1=0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2=2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3=3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4=4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5=5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0421	−0.0467	−0.0581	−0.0617	−0.0671
x_4	−0.0015	−0.0001	−0.0013	−0.0018	−0.0028
x_6	−0.0003	0.0005	0.0009	0.0013	0.0013
x_8	−0.0004	−0.0002	0.0003	0.0005	0.0008
x_{10}	0.0006	0.0008	0.0011	0.0012	0.0013
x_{12}	0.0002	0.0003	0.0005	0.0005	0.0007
x_{14}	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004	0.0005
x_{16}	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
x_{18}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
x_{20}	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003

Таблица 3

$\beta_3=1.9635$	$\lambda_1=0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2=2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3=3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4=4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5=5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.1191	−0.1017	−0.0941	−0.0982	−0.0888
x_4	−0.0317	−0.0326	−0.0221	−0.1078	−0.0324
x_6	−0.0121	−0.0138	−0.0121	−0.0287	−0.0143
x_8	−0.0050	−0.0063	−0.0053	−0.0152	−0.0067
x_{10}	−0.0025	−0.0034	−0.0027	−0.0086	−0.0035
x_{12}	−0.0012	−0.0019	−0.0014	−0.0050	−0.0018
x_{14}	0.0002	−0.0001	0	−0.0022	−0.0002
x_{16}	0.0018	0.0020	0.0016	0	0.0012
x_{18}	0.0002	0.0001	0.0002	−0.0009	0
x_{20}	0.0008	0.0007	0.0007	−0.0002	0.0004

Таблица 4

$\beta_4=2.3562$	$\lambda_1=0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2=2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3=3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4=4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5=5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.1251	0.1538	−0.1792	−0.1905	−0.2078
x_4	−0.0222	−0.0185	−0.0404	−0.0452	−0.0528
x_6	−0.0084	−0.0038	−0.0122	−0.0137	−0.0155
x_8	−0.0034	0	−0.0030	−0.0046	−0.0032
x_{10}	−0.0015	0.0008	−0.0003	−0.0831	0.0004
x_{12}	−0.0007	0.0007	0.0004	−0.0008	0.0013
x_{14}	−0.0002	0.0007	0.0008	0.0001	0.0015
x_{16}	0.0005	0.0013	0.0013	0.0010	0.0019
x_{18}	0.0014	0.0021	0.0021	0.0019	0.0025
x_{20}	0.0007	0.0012	0.0012	0.0010	0.0014

Таблица 5

$\beta_5=2.6180$	$\lambda_1=0.7960$ Fe:Al	$\lambda_2=2.1167$ Al:Zn	$\lambda_3=3.4863$ Бронза:Fe	$\lambda_4=4.2593$ Латунь:Fe	$\lambda_5=5.7102$ Al:Fe
x_2	−0.0520	−0.0480	−0.0461	−0.0456	0.0433
x_4	−0.0144	−0.0179	−0.0199	−0.0207	−0.0115
x_6	−0.0091	−0.0114	−0.0125	−0.0130	−0.0038
x_8	−0.0056	−0.0053	−0.0077	−0.0080	0.0001
x_{10}	−0.0036	−0.0045	−0.0047	−0.0049	0.0018
x_{12}	−0.0020	−0.0030	−0.0031	−0.0032	0.0024
x_{14}	−0.0017	−0.0022	−0.0022	−0.0018	0.0024
x_{16}	−0.0011	−0.0015	−0.0023	−0.0008	0.0023
x_{18}	−0.0004	−0.0005	−0.0007	−0.0007	0.0023
x_{20}	0.0008	0.0009	0.0009	0.0006	0.0029

При помощи этих таблиц построены графики контактных напряжений для значения параметра $\lambda=\lambda_1$.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26 VI 1973

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ԻՐ ԵԶՐՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կոնտակտային խնդիրներ կլոր անցքով առաձգական հարթության համար, որն իր եզրագծի աղեղային հատվածների վրա ուժեղացված է փոքր հաստություն ունեցող առաձգական վերադիրներով։ Նշված խնդիրների լուծումը բերվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում։ Ստացված սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների կորիզը բաղկացած է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջինով՝ Հիլբերտի կորիզով, պայմանավորված է նրա եզակի մասը, իսկ երկրորդը իրենից ներկայացնում է քառակուսու մեջ որոշված անընդհատ ֆունկցիա։ Այդ որոշիչ հավասարումների համար ստացված են էֆեկտիվ լուծումներ։ Վերջիններիս թվային արդյունքները մի քանի դեպքերի համար ներկայացված են աղյուսակներում և գծագրերում։

CERTAIN CONTACT PROBLEMS FOR A PLANE WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED WITH ELASTIC STIFFENERS ON ITS BOUNDARY

S. S. SHAHINIAN

Summary

Certain contact problems are considered for an elastic plane with a circular hole, reinforced above the arc segment of its boundary with elastic stiffeners of a small thickness. The solution of the above problems is reduced to that of singular integral-differential equations under specified boundary conditions. Efficient solution for these equations are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Муки Р., Стернберг Э.* Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. Прикл. мех., Тр. америк. о-ва инж.-мех., т. 35, № 4, 1968, 124—135.
2. *Arutunian N. K.* and *Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeners. Frends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary Volume. Wolters-Nordorff Publ., 1971, 3—20.
3. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, т. 32, № 2, 1968, 632—646.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, № 5, 1969, 813—843.
5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, № 2, 1972, 15—35.
6. *Шагинян С. С.* Передача нагрузок от кольцевой накладки к плоскости с круговым отверстием. МТТ, № 5, 1972, 178—183.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука", М., 1966.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд-во „Наука", М., 1968.
9. *Ворович И. И.* О некоторых смешанных задачах теории упругости для полосы. Сб. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. Изд-во „Наука", М., 1972.
10. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 35, № 1, 1971, 172—178.
11. *Уиттекер Э., Ватсон Г.* Курс современного анализа, т. 3. Физматгиз, М., 1963.
12. *Канторович Л., Крылов В.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.