ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 6, 1973 Механика

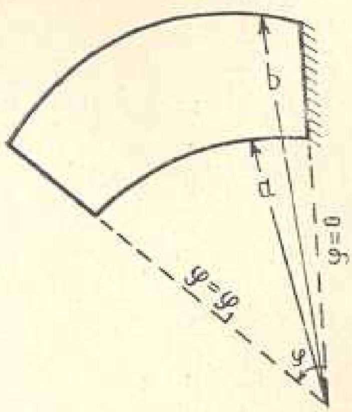
Р. А. АРУТЮНЯН

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА С ОДНОЙ ЗАДЕЛАННОЙ РАДИАЛЬНОЙ СТОРОНОЙ

Решением задач теории упругости для круга, кольца и кольцевого сектора занимались многие исследователи [1—7]. В работе [7] исследовано решение плоской задачи теории упругости в напряжениях для кольцевого сектора при заданной внешней нагрузке.

В настоящей работе приводится решение смешанной плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора, когда одна из его радиальных сторон заделана.

Решение рассматриваемой задачи сведено к квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с ограниченными свободными членами. Решение некоторых конкретных задач доведено до числа. Исследовано распределение напряжений в окрестности заделки.



Фиг. 1.

Решение аналогичной задачи для прямоугольника исследовано в работе [8].

1. Предположим, что стороны $r=a$ и $r=b$ радиального сектора свободны от напряжений, одна сторона сектора $\varphi=0$ заделана, то есть во всех точках края $\varphi=0$ имеем $u=0$, $v=0$, а на радиальной стороне сектора $\varphi=\varphi_1$ известны напряжения.

В плоской задаче теории упругости напряжения определяются через функцию Эри $\Phi(r, \varphi)$. Обозначим $r=ae^t$, $F(t, \varphi)=e^{-t}\Phi(t, \varphi)$. Функция F должна удовлетворять уравнению [6, 7]

$$\frac{\partial^4 F}{\partial t^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4}-2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+F=0 \tag{1}$$

Напряжения выражаются через функцию $F(t, \varphi)$ следующим образом:

$$\sigma_r=\frac{e^{-t}}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial F}{\partial t}+F\right), \qquad \sigma_\varphi=\frac{e^{-t}}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial F}{\partial t}\right)$$

$$\tau_{r\varphi}=-\frac{e^{-t}}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi} \tag{2}$$

а перемещения — соотношениями

$$u=\frac{1+\sigma}{aE}\left[(1-\sigma)\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+F\right)dt+(1-2\sigma)F-\sigma\frac{\partial F}{\partial t}\right]+f'(\varphi) \tag{3}$$

$$v=\frac{1-\sigma^2}{aE}\left[\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\frac{\partial F}{\partial t}-F\right)d\varphi-\iint F\,dt\,d\varphi-\right.$$

$$\left.-\int\frac{\partial F}{\partial \varphi}dt-\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right]-f(\varphi)+f_0(t)$$

где E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона.

Для рассматриваемой задачи можно принять, что

$$f(\varphi)=f_0(t)=0$$

На контуре кольцевого сектора выполняются следующие условия:

$$\tau_{r\varphi}(0, \varphi)=\tau_{r\varphi}(t_1, \varphi)=0, \qquad a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k \sin\beta_k t \tag{4}$$

$$\sigma_r(0, \varphi)=\sigma_r(t_1, \varphi)=0, \qquad a^2 e^t \sigma_\varphi(t, \varphi_1)=g_0\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}g_k\varphi_k(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(t, 0)}{\partial t}=0, \quad v(t, 0)=0 \tag{6}$$

Функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде [7]

$$F(t, \varphi)=a(\varphi)+b(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\cos\alpha_k\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(\varphi)\cos\beta_k t \tag{7}$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1, \quad 0\leqslant t\leqslant t_1)$$

где

$$\Phi_k(\varphi)=A_k \operatorname{sh}\beta_k\varphi\sin\varphi+B_k\operatorname{sh}\beta_k\varphi\cos\varphi+C_k\operatorname{ch}\beta_k\varphi\sin\varphi+D_k\operatorname{ch}\beta_k\varphi\cos\varphi$$

$$\psi_k(t)=E_k\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}(t_1-t)+G_k\operatorname{sh}\alpha_k(t_1-t)\operatorname{sh}t+$$

$$+F_k\operatorname{sh}\alpha_k t\operatorname{sh}(t_1-t)+H_k\operatorname{sh}\alpha_k t\operatorname{sh}t \tag{8}$$

$$a(\varphi) = a_0\varphi\sin\varphi, \qquad b(t) = b_0e^t + b_1te^{-t}, \qquad \varphi_0 = e^t$$

$$\varphi_k(t) = \sin\beta_k t + \beta_k\cos\beta_k t$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{t_1}, \qquad t_1 = \ln\frac{b}{a} \tag{9}$$

Удовлетворив условиям (4), получим

$$(\beta_kD_k + A_k)\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1 + (\beta_kA_k - D_k)\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1 +$$
$$+ (\beta_kC_k - B_k)\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1 + (\beta_kB_k + C_k)\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1 = \frac{\delta_k}{\beta_k} \tag{10}$$
$$E_k = H_k = 0$$

Умножая обе части условия (5) соответственно на 1 и $\cos\alpha_p\varphi$, после интегрирования по φ от 0 до φ_1 на основании (2), (7) и (8) получим

$$-(\alpha_p^2 - 1)\psi_p(t_1) = -\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^{\varphi_1}[\Phi_k^{\cdot}(\varphi) + \Phi_k(\varphi)]\cos\alpha_p\varphi d\varphi -$$
$$-\frac{4a_0(-1)^{p+1}}{\varphi_1(\alpha_p^2 - 1)}\sin\varphi_1$$
$$\tag{11}$$
$$-(\alpha_p^2 - 1)\psi_p(0) = -\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\varphi_1}[\Phi_k^{\cdot}(\varphi) + \Phi_k(\varphi)]\cos\alpha_p\varphi d\varphi -$$
$$-\frac{4a_0(-1)^{p+1}}{\varphi_1(\alpha_p^2 - 1)}\sin\varphi_1$$

$$b'(t) + b(t_1) + \frac{2a_0}{\varphi_1}\sin\varphi_1 = -\frac{1}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^{\varphi_1}[\Phi_k^{\cdot}(\varphi) + \Phi_k(\varphi)]d\varphi$$
$$\tag{12}$$
$$b'(0) + b(0) + \frac{2a_0}{\varphi_1}\sin\varphi_1 = -\frac{1}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\varphi_1}[\Phi_k^{\cdot}(\varphi) + \Phi_k(\varphi)]d\varphi$$

Удовлетворив условиям (5), умножив обе части полученного равенства на $\varphi_p(t)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ и проинтегрировав по t от 0 до t_1, получим

при $p \neq 0$

$$\beta_p(\beta_p^2 + 1)\Phi_p(\varphi_1) = \frac{2}{t_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^{t_1}[\psi_k^{\cdot}(t) + \psi_k^{\prime}(t)]\varphi_p(t)\,dt -$$
$$-\frac{4b_1\beta_p[1 + (-1)^{p+1}e^{-t_1}]}{t_1(\beta_p^2 + 1)} - g_p(\beta_p^2 + 1) \tag{13}$$

при $p = 0$

$$b_0 (e^{2t_1} - 1) - b_1 t_1 = g_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} \tag{14}$$

Для интегралов, входящих в формулы (11), (12) и (13), в силу (10) имеем

$$\int_0^{\varphi_1} [\Phi_k''(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \alpha_p \varphi \, d\varphi = \frac{(-1)^p \beta_k}{[\beta_k^2 + (\alpha_p + 1)^2][\beta_k^2 + (\alpha_p - 1)^2]} \{ \delta_k (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 +$$

$$+ 1) - 2(\beta_k^2 + 1)(\alpha_p^2 - 1) [A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 + B_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1 +$$

$$+ C_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 + D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1] -$$

$$- (-1)^p [\beta_k^2 (\beta_k^2 + \alpha_p^2 + 3) - 2(\alpha_p^2 - 1)] B_k -$$

$$- (-1)^p C_k \beta_k (\beta_k^2 + 3\alpha_p^2 + 1) \}$$

$$\int_0^{t_1} [\psi_k''(t) + \psi_k(t)] \varphi_n(t) \, dt =$$

$$= \frac{2\beta_p (\beta_p^2 + 1) \alpha_k [\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + (-1)^{p+1} \operatorname{ch} t_1][G_k + (-1)^{p+1} F_k]}{[\beta_p^2 + (\alpha_k + 1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_k - 1)^2]} \tag{15}$$

Удовлетворив условиям (6), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \varphi_k(t) = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \beta_k + C_k) \cos \beta_k t \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{ [2(1 - \sigma) A_k + \beta_k D_k] \beta_k \cos \beta_k t - (1 - 2\sigma) \beta_k D_k \sin \beta_k t +$$

$$+ (1 - \sigma) [(1 - \alpha_k^2) \psi_k(t) + \psi_k''(t)] - \sigma [\psi_k'''(t) + \psi_k'(t)] \} +$$

$$+ 2(1 - \sigma) a_0 + 2(1 - 2\sigma) b_0 e^t + b_1 e^{-t} = 0 \tag{17}$$

Введем новые неизвестные

$$\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1)(G_k + F_k) = (-1)^k W_k$$

$$\alpha_k (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1)(G_k - F_k) = (-1)^k \Delta_k$$

$$A_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 + B_k \operatorname{ch} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1 + C_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \sin \varphi_1 +$$

$$+ D_k \operatorname{sh} \beta_k \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{\lambda Z_k}{\beta_k (\beta_k^2 + 1)} \tag{18}$$

$$B_k = \frac{Y_k}{\beta_k (\beta_k^2 + 1)}, \quad B_k \beta_k + C_k = \frac{X_k}{\beta_k^2 + 1}$$

где

$$\lambda = \frac{\varphi_1}{t_1}$$

Умножив обе части (16) на $\varphi_p(t)$ и проинтегрировав по t от 0 до t_1 и учитывая (18), получим

$$Y_p = \frac{(1-2\sigma)\beta_p^2}{2(1-\sigma)(\beta_p^2+1)} X_p + \frac{(1-2\sigma)\beta_p^2}{(1-\sigma)t_1} \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} \frac{[1-(-1)^{k+p}]}{(\beta_k^2+1)(\beta_p^2-\beta_k^2)} X_k =$$

$$= e_p X_p + \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} e_{kp} X_k \tag{19}$$

$$|e_p| + \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} |e_{kp}| < 1$$

На основании (11), (13), (17), (18) и (19), после некоторых преобразований получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$Z_p = a_p^{\mathrm{I}} X_p + a_p^{\mathrm{II}} Y_p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp}\Delta_k + a_p \quad (p = 2, 4, 6,\ldots)$$

$$Z_p = a_p^{\mathrm{I}} X_p + a_p^{\mathrm{II}} Y_p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} W_k + a_p \quad (p = 1, 3, 5,\ldots)$$

$$\Delta_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp}^{\mathrm{I}} Y_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp}^{\mathrm{II}} Z_k + b_p$$

$$W_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp}^{\mathrm{I}} Y_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kp}^{\mathrm{II}} Z_k + c_p \quad (p = 1, 2, 3,\ldots) \tag{20}$$

$$X_p = d_p^{\mathrm{I}} Z_p + \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{I}} X_k + \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{II}} Y_k + \sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{III}} Z_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{IV}} W_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{V}} \Delta_k + d_p \quad (p = 1, 2, 3,\ldots) \tag{21}$$

где

$$a_p^{\mathrm{I}} = -\frac{\beta_p \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 \sin\varphi_1}{\chi(\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1 \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 + \beta_p \sin\varphi_1\cos\varphi_1)}$$

$$a_p^{\mathrm{II}} = \frac{\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1 \cos\varphi_1 + \beta_p \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 \sin\varphi_1}{\chi(\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1 \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 + \beta_p \sin\varphi_1\cos\varphi_1)}$$

$$a_{kp} = \frac{4\beta_p(\beta_p^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1 - \cos^2\varphi_1)}{\chi t_1(\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1 \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 + \beta_p\sin\varphi_1\cos\varphi_1)[\beta_p^2+(\alpha_k+1)^2][\beta_p^2+(\alpha_k-1)^2]}$$

$$b_{kp}=\frac{2(-1)^p[1+(-1)^k]\alpha_p(\operatorname{ch}\alpha_pt_1-\operatorname{ch}t_1)\beta_k^2(\beta_k^2+3\alpha_p^2+1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1+\alpha_p\operatorname{sh}t_1)(\beta_k^2+1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$b_{kp}^{\mathrm{I}}=-\frac{4(-1)^p[1+(-1)^k]\alpha_p(\alpha_p^2-1)(\operatorname{ch}\alpha_pt_1-\operatorname{ch}t_1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1+\alpha_p\operatorname{sh}t_1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$b_{kp}^{\mathrm{II}}=\frac{4\chi[1+(-1)^k]\alpha_p(\alpha_p^2-1)(\operatorname{ch}\alpha_pt_1-\operatorname{ch}t_1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1+\alpha_p\operatorname{sh}t_1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$c_{kp}=\frac{2(-1)^p[1-(-1)^k]\alpha_p(\operatorname{ch}\alpha_pt_1+\operatorname{ch}t_1)\beta_k^2(\beta_k^2+3\alpha_p^2+1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1-\alpha_p\operatorname{sh}t_1)(\beta_k^2+1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$c_{kp}^{\mathrm{I}}=-\frac{4(-1)^p[1-(-1)^k]\alpha_p(\alpha_p^2-1)(\operatorname{ch}\alpha_pt_1+\operatorname{ch}t_1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1-\alpha_p\operatorname{sh}t_1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$c_{kp}^{\mathrm{II}}=\frac{4\chi[1-(-1)^k]\alpha_p(\alpha_p^2-1)(\operatorname{ch}\alpha_pt_1+\operatorname{ch}t_1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_pt_1-\alpha_p\operatorname{sh}t_1)[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}$$

$$d_p^{\mathrm{I}}=\frac{P\chi t_1[\beta_p\operatorname{ch}\beta_p\varphi_1\sin\varphi_1-(1-2\sigma)\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1\cos\varphi_1]}{2(\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}$$

$$d_{kp}^{\mathrm{I}}=P\left[\frac{(1-2\sigma)^2\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1\operatorname{ch}\beta_p\varphi_1-(1-2\sigma)\beta_p\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2(1-\sigma)(\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}-\right.$$
$$\left.-\frac{2(1-\sigma)\beta_k(\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1-\beta_k\sin\varphi_1\cos\varphi_1)}{\beta_p(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}\right]\frac{\beta_p[1-(-1)^{k+p}]}{(\beta_k^2+1)(\beta_p^2-\beta_k^2)}$$

$$d_{kp}^{\mathrm{II}}=-\frac{2P(1-\sigma)[1-(-1)^{k+p}]\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)(\beta_p^2-\beta_k^2)}$$

$$d_{kp}^{\mathrm{III}}=\frac{2P\chi(1-\sigma)[1-(-1)^{k+p}]\beta_k\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1}{(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)(\beta_p^2-\beta_k^2)} \tag{22}$$

$$d_{kp}^{\mathrm{IV}}=\frac{P(-1)^k}{[\beta_p^2+(\alpha_k+1)^2][\beta_p^2+(\alpha_k-1)^2]}\Big\{[1-(-1)^p][(1-\sigma)\alpha_k^2-$$
$$-\sigma(\beta_p^2+1)]+(1-\sigma)[1+(-1)^p]\frac{[4\alpha_k\operatorname{sh}\alpha_kt_1-(\beta_p^2+\alpha_k^2+1)\operatorname{sh}t_1]}{2(\operatorname{ch}\alpha_kt_1+\operatorname{ch}t_1)}\Big\}$$

$$d_{kp}^{\mathrm{V}}=\frac{P(-1)^k}{[\beta_p^2+(\alpha_k+1)^2][\beta_p^2+(\alpha_k-1)^2]}\Big\{[1+(-1)^p][(1-\sigma)\alpha_k^2-$$
$$-\sigma(\beta_p^2+1)]+(1-\sigma)[1-(-1)^p]\frac{[4\alpha_k\operatorname{sh}\alpha_kt_1+(\beta_p^2+\alpha_k^2+1)\operatorname{sh}t_1]}{2(\operatorname{ch}\alpha_kt_1-\operatorname{ch}t_1)}\Big\}$$

$$a_p=\frac{\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1}{\chi(\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1\operatorname{ch}\beta_p\varphi_1+\beta_p\sin\varphi_1\cos\varphi_1)}\Big\{\frac{\delta_p(\beta_p^2+1)\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1}-$$
$$-\frac{4b_1\beta_p[1+(-1)^{p+1}e^{-t_1}]}{t_1(\beta_p^2+1)}-g_p(\beta_p^2+1)\Big\}$$

$$b_p=\frac{\alpha_p(\operatorname{ch}\alpha_p t_1-\operatorname{ch}t_1)}{\operatorname{sh}\alpha_p t_1+\alpha_p\operatorname{sh}t_1}\left\{\frac{8a_0\sin\varphi_1}{\varphi_1(\alpha_p^2-1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\delta_k\beta_k(\beta_k^2+3\alpha_p^2+1)}{[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}\right\}$$

$$c_p=-\frac{4\alpha_p(\operatorname{ch}\alpha_p t_1+\operatorname{ch}t_1)}{\varphi_1(\operatorname{sh}\alpha_p t_1-\alpha_p\operatorname{sh}t_1)}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\delta_k\beta_k(\beta_k^2+3\alpha_p^2+1)}{[\beta_k^2+(\alpha_p+1)^2][\beta_k^2+(\alpha_p-1)^2]}\tag{23}$$

$$d_p=P\left\{2(1-\sigma)\sum_{\substack{k=1\\k\neq p}}^{\infty}\delta_k\frac{(\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1-\beta_k\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1)[1-(-1)^{k+p}]}{(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)(\beta_p^2-\beta_k^2)}+\right.$$

$$+t_1\delta_p\frac{2(1-\sigma)\beta_p\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1\cos\varphi_1-(\beta_p^2-1+2\sigma)\operatorname{ch}\beta_p\varphi_1\sin\varphi_1}{2\beta_p(\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}+$$

$$\left.+\frac{2a_0(1-\sigma)[1-(-1)^p]}{\beta_p^2}+\frac{2b_1}{\beta_p^2+1}[1-(-1)^p e^{-t_1}]\right\}$$

$$P=\frac{4(1-\sigma)(\beta_p^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}{t_1[(3-4\sigma)\beta_p\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1\operatorname{ch}\beta_p\varphi_1-(\beta_p^2-2+6\sigma-4\sigma^2)\sin\varphi_1\cos\varphi_1]}$$

Исключив из (20) и (21) коэффициенты Δ_k, W_k и Y_k, для коэффициентов Z_k и X_k получим следующие линейные системы бесконечных уравнений:

$$Z_p=v_p^{\mathrm{I}}X_p+\sum_{m=1}^{\infty}v_{mp}^{\mathrm{I}}X_m+\sum_{m=1}^{\infty}v_{mp}Z_m+v_p\quad(p=2,4,\ldots)$$

$$Z_p=v_p^{\mathrm{I}}X_p+\sum_{m=1}^{\infty}v_{mp}^{\mathrm{III}}X_m+\sum_{m=1}^{\infty}v_{mp}^{\mathrm{II}}Z_m+v_p^{\mathrm{II}}\quad(p=1,3,\ldots)\tag{24}$$

$$X_p=d_p^{\mathrm{I}}Z_p+\sum_{m=1}^{\infty}u_{mp}^{\mathrm{I}}Z_m+\sum_{m=1}^{\infty}u_{mp}^{\mathrm{II}}X_m+u_p\quad(p=1,2,3,\ldots)\tag{24'}$$

где

$$v_p^{\mathrm{I}}=a_p^{\mathrm{I}}+e_p a_p^{\mathrm{II}},\quad v_{mp}^{\mathrm{I}}=a_p^{\mathrm{II}}e_{mp}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}b_{mk}^{\mathrm{III}}$$

$$v_{mp}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}b_{mk}^{\mathrm{II}},\qquad v_{mp}^{\mathrm{III}}=a_p^{\mathrm{II}}e_{mp}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}c_{mk}^{\mathrm{III}}$$

$$v_{mp}^{\mathrm{II}}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{kp}c_{mk}^{\mathrm{II}},\qquad u_{mp}^{\mathrm{I}}=d_{mp}^{\mathrm{III}}+\sum_{k=1}^{\infty}d_{kp}^{\mathrm{IV}}c_{mk}^{\mathrm{II}}+\sum_{k=1}^{\infty}d_{kp}^{\mathrm{V}}b_{mk}^{\mathrm{II}}\tag{25}$$

$$u_{mp}^{\mathrm{II}}=d_{mp}^{\mathrm{I}}+e_m d_{mp}^{\mathrm{II}}+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{II}} e_{mk}+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{IV}} c_{mk}^{\mathrm{III}}+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{V}} b_{mk}^{\mathrm{III}} \tag{25}$$

$$b_{mp}^{\mathrm{III}}=b_{mp}+e_m b_{mp}^{\mathrm{I}}+\sum_{k=1}^{\infty} b_{kp}^{\mathrm{I}} e_{mk}$$

$$c_{mp}^{\mathrm{III}}=c_{mp}+e_m c_{mp}^{\mathrm{I}}+\sum_{k=1}^{\infty} c_{kp}^{\mathrm{I}} e_{mk}$$

$$v_p=\sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} b_k+c_p, \qquad v_p^{\mathrm{II}}=\sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} c_k+c_p$$

$$u_p=\sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{IV}} c_k+\sum_{k=1}^{\infty} d_{kp}^{\mathrm{V}} b_k+d_p \tag{26}$$

В коэффициентах d_{kp}^{I}, d_{kp}^{II}, d_{kp}^{III} и e_{kp}, входящих в (25), $k \neq p$.

2. Для сумм абсолютных значений коэффициентов систем (24) и (24′) получаются следующие оценки, доказывающие квазивполнерегулярность этой бесконечной системы при любых отношениях размеров кольцевого сектора и возможном значении коэффициента Пуассона:

$$\begin{aligned} &|v_p^{\mathrm{I}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|v_{mp}^{\mathrm{I}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|v_{mp}|<1 \\ &|v_p^{\mathrm{I}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|v_{mp}^{\mathrm{III}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|v_{mp}^{\mathrm{II}}|<1 \end{aligned} \tag{27}$$

Дадим оценки сверху суммы коэффициентов системы (24′) отдельно для p четных и p нечетных.

Для $p=1,3,5,\ldots\ldots$ получим

$$|d_p^{\mathrm{I}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|u_{mp}^{\mathrm{I}}|+\sum_{m=1}^{\infty}|u_{mp}^{\mathrm{II}}|<1 \tag{28}$$

Здесь принято во внимание, что сумма первых двух слагаемых, входящих в (27) и (28), стремится к нулю при $\beta_p \to \infty$, как $O(\beta_p^{-1})$ и $O\left(\frac{\ln \beta_p}{\beta_p}\right)$. Оценка третьего слагаемого в (27) получается как в работе [7], оценка сверху третьего слагаемого (28) получается $\frac{(1-2\sigma)(3-2\sigma)}{3-4\sigma}+O(\beta_p^{-1})$, при этом использованы следующие значения рядов и интегралов:

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k+1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k-1)^2]} = \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2-1)} \frac{\operatorname{sh}\alpha_k t_1 - \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch}\alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1}$$

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{[\beta_n^2 + (\alpha_k+1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k-1)^2]} =$$

$$= \frac{t_1}{8\alpha_k(\alpha_k^2-1)} \frac{\operatorname{sh}\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch}\alpha_k t_1 - \operatorname{ch} t_1} - \frac{1}{2(\alpha_k^2-1)^2} \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\beta_p^2 + (\alpha_n+1)^2][\beta_p^2 + (\alpha_n-1)^2]} =$$

$$= \frac{\varphi_1}{4\beta_p} \frac{\operatorname{sh}\beta_p\varphi_1 \operatorname{ch}\beta_p\varphi_1 + \beta_p \sin\varphi_1 \cos\varphi_1}{\operatorname{ch}^2\beta_p\varphi_1 - \cos^2\varphi_1} - \frac{1}{2(\beta_p^2+1)^2}$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{[\beta_n^2 + (\alpha_k+1)^2][\beta_n^2 + (\alpha_k-1)^2]} = \frac{t_1}{8\alpha_k} \frac{\operatorname{sh}\alpha_k t_1 + \alpha_k \operatorname{sh} t_1}{\operatorname{ch}\alpha_k t_1 + \operatorname{ch} t_1}$$

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2+1} = \frac{t_1}{4} \operatorname{th}\frac{t_1}{2}$$

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq p}}^{\infty} \frac{\beta_n}{(\beta_n^2+1)(\beta_p^2-\beta_n^2)} < \frac{t_1}{\pi}\int_1^{\beta_p-1} \frac{\beta_n d\beta_n}{(\beta_n^2+1)(\beta_p^2-\beta_n^2)} +$$

$$+ \frac{t_1}{\pi}\int_{\beta_p+1}^{\infty} \frac{\beta_n d\beta_n}{(\beta_n^2+1)(\beta_n^2-\beta_p^2)} =$$

$$= \frac{t_1}{2\pi(\beta_p^2+1)} \ln \frac{(\beta_p^2+2\beta_p+2)(\beta_p^2-2\beta_p+2)(\beta_p^2-1)}{2(4\beta_p^2-1)}$$

Если $\beta_p \to \infty$, то (27) и (28) при больших p остаются меньше единицы.

Для четных p оценка (28) получается аналогичным путем.

Таким образом, бесконечные системы (24) и (24′) при любом возможном значении коэффициента Пуассона квазивполне регулярны [10].

Легко видеть из (23) и (26), что свободные члены этих систем при $\alpha_p \neq 1$ ограничены, при $\alpha_p = 1$ выражение c_p обращается в неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Перейдя к пределу, легко можно вычислить значение c_p при $\alpha_p = 1$.

Из (10) и (18) найдем следующие выражения для коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k, G_k и F_k через неизвестные систем (19), (20) и (21)

$$A_k = -\frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1 \operatorname{ch}\beta_k\varphi_1}{(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}X_k + \frac{\beta_k\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\beta_k(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}Y_k -$$

$$-\frac{\beta_k\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1-\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1}{\beta_k(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}\varkappa Z_k + \frac{\delta_k}{\beta_k}\,\frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1}{\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1}$$

$$B_k = \frac{Y_k}{\beta_k(\beta_k^2+1)}, \qquad C_k = \frac{X_k}{\beta_k^2+1} - \frac{Y_k}{\beta_k^2+1}$$

$$D_k = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}X_k - \frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1+\beta_k\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\beta_k(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}Y_k +$$

$$+\frac{\operatorname{sh}\beta_k\varphi_1\cos\varphi_1+\beta_k\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1}{\beta_k(\beta_k^2+1)(\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1)}\varkappa Z_k - \frac{\delta_k}{\beta_k}\,\frac{\operatorname{ch}\beta_k\varphi_1\sin\varphi_1}{\operatorname{ch}^2\beta_k\varphi_1-\cos^2\varphi_1} \tag{30}$$

$$G_k + F_k = \frac{(-1)^k W_k}{\alpha_k(\operatorname{ch}\alpha_k t_1+\operatorname{ch} t_1)}, \qquad G_k - F_k = \frac{(-1)^k \Delta_k}{\alpha_k(\operatorname{ch}\alpha_k t_1-\operatorname{ch} t_1)}$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_0, b_0 и b_1 из (12) и (14) при помощи (8) и (15) получим следующие уравнения:

$$2b_0(e^{t_1}+1) + b_1(e^{-t_1}+1) + \frac{4a_0}{\varphi_1}\sin\varphi_1 = \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k^2}{(\beta_k^2+1)^2}X_k +$$

$$+\frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{Y_k}{(\beta_k^2+1)^2} - \frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\varkappa Z_k}{(\beta_k^2+1)^2} - \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k\delta_k}{\beta_k^2+1} \tag{31}$$

$$2b_0(e^{t_1}-1) + b_1(e^{-t_1}-1) = -\frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k^2}{(\beta_k^2+1)^2}X_k -$$

$$-\frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{Y_k}{(\beta_k^2+1)^2} + \frac{4}{\varphi_1}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\varkappa Z_k}{(\beta_k^2+1)^2} + \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\beta_k\delta_k}{\beta_k^2+1}$$

$$b_0(e^{2t_1}-1) - b_1 t_1 = g_0\frac{e^{2t_1}-1}{2}$$

Неизвестные коэффициенты X_k, Y_k и Z_k, входящие в соотношения (31), определяются из бесконечных систем линейных уравнений (19) и (20) и выражаются через постоянные a_0 и b_1. Подставив определенные из (19) и (20) значения неизвестных X_k, Y_k и Z_k в (31), получим три уравнения относительно a_0, b_0 и b_1.

3. В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда $b=2a$, $\varphi=\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ и приложена нагрузка, статически эквивалентная нормальной силе P, касательной силе T, изгибающему моменту M. Пользуясь разложениями (4), (5) и ограничиваясь двумя членами разложения, то есть полагая $g_k=\delta_k=0$ при $k=2, 3,\ldots$

$$
\left|\begin{array}{l}
\int\limits_a^b \sigma_\varphi dr = P \\
\int\limits_a^b \sigma_\varphi r dr = 0
\end{array}\right.
\qquad
\left|\begin{array}{l}
\int\limits_a^b \sigma_\varphi dr = 0 \\
\int\limits_a^b \sigma_\varphi r dr = M
\end{array}\right.
\qquad (32)
$$

$$
\int\limits_a^b \tau_{r\varphi} dr = T
$$

Значения напряжений в некоторых точках сечения $\varphi = \frac{\pi}{40}$ приведены в таблице.

Таблица

$\ln\frac{r}{a}$	$\frac{a^3}{P}\sigma_\varphi$	$\frac{a^2}{P}\sigma_r$	$\frac{a^2}{P}\tau_{r\varphi}$	$\frac{a^3}{M}\sigma_\varphi$	$\frac{a^3}{M}\sigma_r$	$\frac{a^3}{M}\tau_{r\varphi}$	$\frac{a^2}{T}\sigma_\varphi$	$\frac{a^2}{T}\sigma_r$	$\frac{a^2}{T}\tau_{r\varphi}$
0.1	−12.235	−0.302	3.043	−14.343	−0.381	4.280	−9.433	−0.664	1.936
0.2	− 8.773	−0.711	0.226	− 9.626	−0.843	0.882	−7.345	−0.894	0.324
0.3	− 3.531	−0.983	−0.099	− 4.742	−1.102	−0.081	−3.788	−1.133	−0.063
0.4	− 1.722	−1.203	−0.966	− 2.302	−1.311	−1.834	−1.445	−1.344	−0.256
0.5	− 0.001	−1.244	−0.763	− 0.002	−1.356	−1.673	−0.002	−1.389	−0.267
0.6	1.732	−1.200	−0.977	2.323	−1.309	−1.844	1.783	−1.342	−0.267
0.7	3.539	−0.979	−0.098	4.751	−1.098	−0.085	4.731	−1.125	−0.078
0.8	8.791	−0.707	0.227	9.633	−0.376	0.882	11.455	−0.898	0.322
0.9	12.244	−0.298	3.045	14.367	−0.377	4.295	15.353	−0.673	1.943

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 13 XII 1972

Ռ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՄԻ ՇԱՌԱՎԻՂԱՅԻՆ ԿՈՂՄՈՎ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը օղակային սեկտորի համար, երբ նրա մի շառավիղային կողմը ամրակցված է, իսկ մյուսի վրա տված է արտաքին բեռը։ Շրջանագծային կողմերն ազատ են։

Խնդիրը լուծված է լարման ֆունկցիայի միջոցով, որը ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերով, որոնց գործակիցները որոշելու համար ստացված է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմներ: Ապացուցվում է ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների քվազիլիովին ռեգուլյարությունը և ազատ անդամների սահմանափակությունը:

Դիտարկվող խնդրի լուծումը մի քանի կոնկրետ դեպքերի համար հասցված է մինչև թվային արդյունքի:

Ուսումնասիրված նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման օրենքը ամրակցված $\varphi = 0$ հատվածքի շրջակայքում:

ON PLANE DEFORMATION OF A CIRCULAR SEGMENT WITH ONE ITS SIDE FIXED

R. A. HARUTUNIAN

Summary

The work deals with the solution to a mixed plane problem in the theory of elasticity for a circular segment where one of its radial sides is fixed, and the other one is under an external force, the curvilinear sides being stress-free. The problem is solved by the stress function represented as trigonometric series. To find the expansion coefficients, an infinite system of linear algebraic equations is obtained. The resulted system is proved to be quasi-quite regular and it has free terms restricted from above.

For some particular cases the problem is solved numerically.

The law of distribution of normal and tangential stresses is studied in the vicinity of the fixed side.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. ОГИЗ — Гостехиздат, М.-Л., 1947.
3. *Галёркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. 1. Изд. АН СССР, М., 1952.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ—ГТТИ, Л., 1934.
5. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
7. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Изв. АН Арм.ССР., серия физ.-мат. наук, т. XV, № 1, 1962.
8. *Галфаян П. О.* Об изгибе защемленной прямоугольной балки. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 3, 1963, 143—150.
9. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVII, № 1, 1964.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1962.