

К. Х. ШАХБАЗЯН, Д. А. ДЖАГАШЯН

К СИНТЕЗУ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ПУЧКАМИ ПРЯМЫХ

В современном машиностроении все чаще и чаще ставятся требования к созданию машин-автоматов многопрограммного типа, то есть машин, позволяющих осуществлять технологические процессы в различных вариантах программы. Это требует создания таких кинематических схем механизмов, которые позволяют путем простой их перенастройки получить различные законы движения исполнительных механизмов.

С этой точки зрения весьма важно развитие методов синтеза механизмов для точного воспроизведения заданного движения в форме траекторий точек звеньев механизмов.

Для решения задач синтеза механизмов, воспроизводящих кривые 3-го и 4-го порядка, были развиты различные методы. В. В. Добровольский предложил использовать механизм квадратичного преобразователя Ньютона [1], [2] путем присоединения его к механизму, воспроизводящему конические сечения, при этом получается универсальный механизм с количеством поступательных пар не менее четырех.

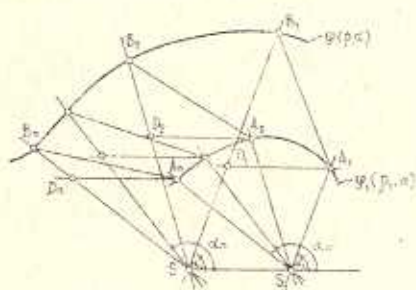
Нами поставлена цель решить задачу синтеза новых схем механизмов, воспроизводящих кривые высших порядков, а именно, из прямой преобразовать кривые 3-го и 4-го порядка, а из кривых второго порядка — кривые 4-го и 6-го порядка с одновременным уменьшением количества поступательных пар.

1. Два пучка прямых [1], [3] могут быть сопоставлены между собой, то есть приведены в соответствие.

Пусть имеем два плоских пучка прямых S и S_1 (фиг. 1) и каждой прямой пучка S соответствует параллельная ей прямая пучка S_1 . Пучок S_1 ограничен плоской кривой $\varphi_1(\rho_1, \alpha) = 0$, следовательно, точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ являются точками пересечения кривой $\varphi_1(\rho_1, \alpha) = 0$ с прямыми пучка S_1 .

Требуется найти $\varphi(\rho, \alpha) = 0$ — геометрическое место точек $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{n-1}, B_n$ пучка S , которые удалены от соответствующих точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ пучка S_1 на постоянную величину a .

Из точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ пучка S_1 делаем засечки радиусом a на соответствующих прямых пучка S . При этом отрезок



Фиг. 1.

$S_i B_i$ является радиус-вектором* кривой $\varphi(\rho, \alpha) = 0$, определяющим положение точки B_i на i -ой прямой пучка S (фиг. 1).

Для аналитического определения ρ проводим из точки A_i прямую $A_i D_i$, параллельную $S-S_1$ (фиг. 1).

Из $\Delta A_i B_i D_i$ имеем

$$(A_i B_i)^2 = (B_i D_i)^2 + (A_i D_i)^2 - 2A_i D_i B_i D_i \cos \alpha_i \quad (1)$$

где

$$A_i B_i = a, \quad A_i D_i = SS_1 = c, \quad B_i D_i = SB_i - SD_i = SB_i - S_1 A_i = \rho - \rho_1$$

Подставляя эти значения в (1) и производя соответствующие преобразования, получим

$$\rho = \rho_1 + c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (2)$$

Равенство (2) представляет собой уравнение кривой $\varphi(\rho, \alpha) = 0$ в полярных координатах, где a и c — постоянные параметры, ρ_1 — свободная переменная, законом изменения которой можно варьировать, α — полярный угол.

От выбора закона изменения ρ_1 и величин a и c будет зависеть конкретный вид воспроизводимой кривой $\varphi(\rho, \alpha) = 0$.

Если ρ_1 изменяется по закону прямой, то получим кривую четвертого порядка, а если — по кривой второго порядка, то получим кривую шестого порядка, что доказывается выражением (2). В частных случаях возможно соответственно получить кривые 3-го и 4-го порядков.

Зависимость (2) для общего случая возможно воспроизвести схемой, изображенной на фиг. 2, в которой приняты следующие обозначения:

$$MN = SS_1 = c, \quad AB = AB' = a,$$

$$SB = \rho, \quad SB' = \rho', \quad S_1 A = \rho_1$$

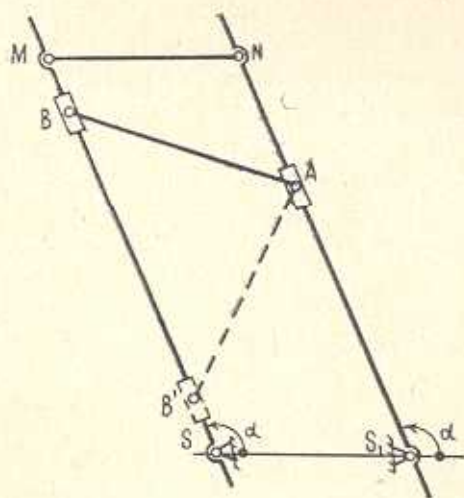
Изображенная на фиг. 2 кинематическая схема имеет две степени свободы, что вполне позволяет выбрать желаемый закон изменения радиуса-вектора ρ_1 кривой $\varphi_1(\rho_1, \alpha) = 0$.

2. Остановимся на выборе некоторых конкретных кинематических схем механизмов с принудительным движением звеньев, воспроизводящих зависимость (2).

Пример 1. Точка A (фиг. 3) движется по окружности радиуса R , при этом:

Пример 1. Точка A (фиг. 3) движется по окружности радиуса R , при этом:

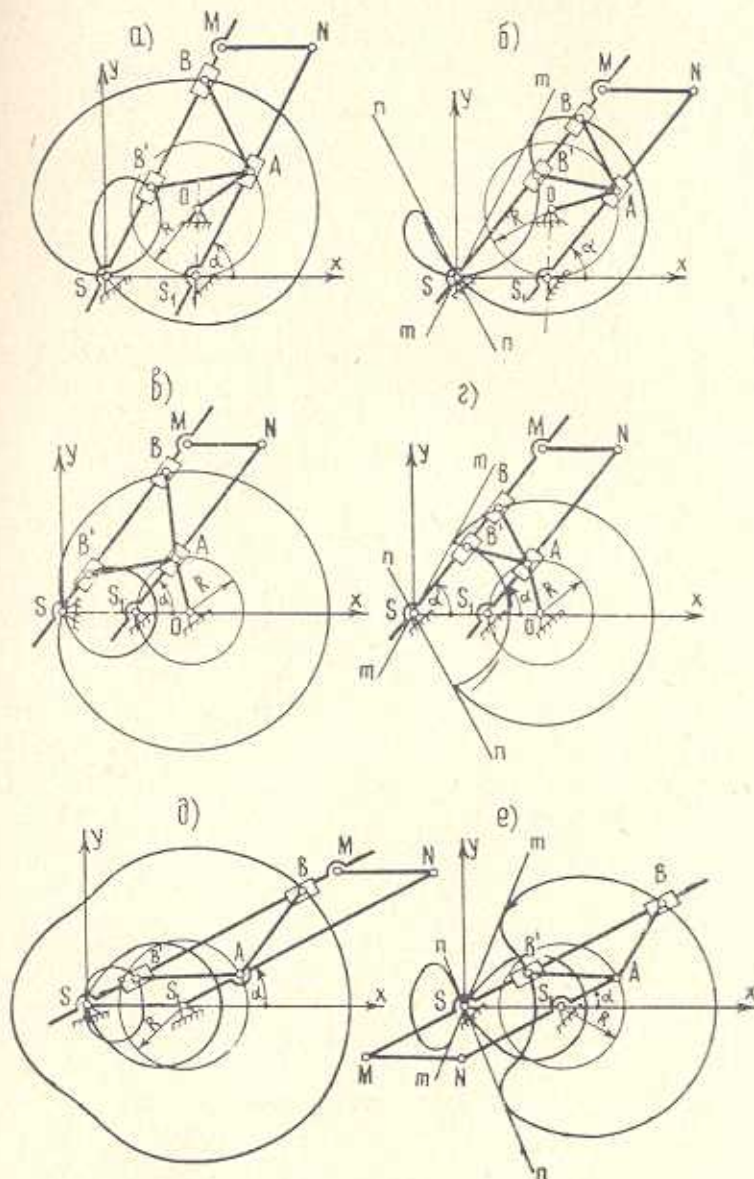
* Для каждого ρ_1 имеем два значения ρ .



Фиг. 2.

а) окружность, то есть траектория точки A , проходит через точку S_1 и ее центр находится на перпендикуляре, восстановленном в точке S_1 к направлению $S-S_1$ (фиг. 3, а, б). Из заданного условия следует, что $\rho_1 = 2R \sin \alpha$ и выражение (2) примет вид

$$\rho = 2R \sin \alpha + c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (3)$$



Фиг. 3.

или в декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2 - 2Ry - cx)^2 = a^2 x^2 + (a^2 - c^2) y^2 \quad (4)$$

Кривая (3) является кривой четвертого порядка и при $\sqrt{c^2 + R^2} \leq a \leq \sqrt{c^2 + R^2} + R$ имеет двойную точку в начале координат. При $c = a$ кривая (3) распадается на две окружности, уравнениями которых будут

$$\rho = 2(R \sin \alpha + a \cos \alpha) \quad \text{и} \quad \rho' = 2R \sin \alpha$$

В случае, если $a > c$ (фиг. 3, а), кулиса SM может совершать полный оборот около точки S , а в том случае, если $a < c$ (фиг. 3, б), кулиса SM качается около точки S на угол $\alpha = \arcsin a/c$.

Прямыми $m-m$ и $n-n$ показаны [крайние положения кулисы SM (фиг. 3, б, г, е);

б) окружность, воспроизводимая точкой A , проходит через точку S_1 , и ее центр находится на продолжении SS_1 (фиг. 3, в, г).

В этом случае имеем

$$\rho = (2R + c) \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

Переходя к прямоугольной системе координат, получим

$$[x^2 + y^2 - (c + 2Rx)^2 = a^2 x^2 + (a^2 - c^2) y^2 \quad (6)$$

Кривая (5) является кривой четвертого порядка и будет иметь двойную точку в начале координат при условии $c < a < c + R$.

При $c = a$ кривая (5) распадается на две окружности с уравнениями $\rho = 2(R + a) \cos \alpha$ и $\rho' = 2R \cos \alpha$.

Кулиса SM данного механизма также может совершать полный оборот около точки S при $a > c$ (фиг. 3, в) и будет качаться около точки S (фиг. 3, г) на угол $\alpha = \arcsin \frac{a}{c}$, если $a < c$; в) окружность, воспроизводимая точкой A , имеет центр в точке S_1 (фиг. 3, д, е), следовательно, $\rho_1 = R$, и тогда уравнение воспроизводимой кривой будет

$$\rho = R + c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (7)$$

или в прямоугольной системе координат

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2cx + c^2 - a^2 - R^2)^2 = 4R^2 |a^2 x^2 + (a^2 - c^2) y^2| \quad (8)$$

Полученное выражение (7) является уравнением кривой шестого порядка с двойной точкой в начале координат при условии $a < c + R$ или $c - R < a < c$. Когда $c = a$ кривая (7) распадается на окружность радиуса R с центром S и кривую четвертого порядка-конхоиду окружности $\rho = R + 2a \cos \alpha$ с полюсом в точке S . При $a > c$ (фиг. 3, д) кулиса SM может совершать полный оборот около точки S , а при $a < c$ (фиг. 3, е) кулиса SM будет качаться около точки S на двух участках с углами $\alpha = \arcsin \frac{a}{c}$ и $\alpha' = 180^\circ - \arcsin \frac{a}{c}$.

Пример 2. Точка A движется по прямой $t-t$ (фиг. 4).

При этом

а) прямая $t-t$ удалена от $S-S_1$ на расстояние h (фиг. 4, а, б).

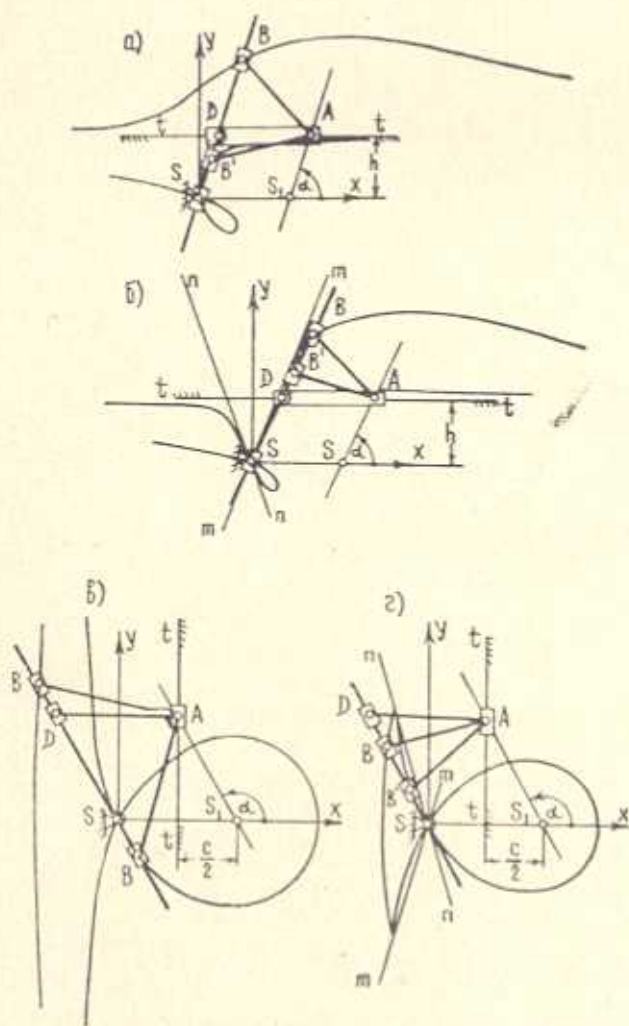
Следовательно, $\rho_1 = \frac{h}{\sin \alpha}$ и выражение (2) примет вид

$$\rho = \frac{h}{\sin \alpha} + c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (9)$$

или в прямоугольной системе координат

$$(x^2 + y^2)(y - h)^2 - 2cxy(y - h) = y^2(a^2 - c^2) \quad (10)$$

Кривая (9) является кривой четвертого порядка с двойной точкой в начале координат при условии $a > h$.



Фиг. 4.

Кривая (9) состоит из двух ветвей, которые асимптотически приближаются к прямой $t-t$. При $c = a$ одна ветвь превращается в прямую $t-t$, а

вторая ветвь — в кривую третьего порядка, уравнением которой будет

$$\rho = \frac{h}{\sin \alpha} + 2a \cos \alpha \quad (11)$$

При условии $a > c$ кулиса SD качается на угол α около точки S на одном участке (фиг. 4, а), а при условии $a < c$ (фиг. 4, б) кулиса SD может совершать качание около точки S в двух зонах с углами $0 < \alpha \leq 90^\circ - \arcsin \frac{a}{c}$ и $90^\circ + \arcsin \frac{a}{c} \leq \alpha' < 180^\circ$.

Крайние положения кулисы SD показаны прямыми $m-m$ и $n-n$ (фиг. 4, б, г);

б) прямая $t-t$ перпендикулярна к $S-S_1$ и проходит через середину $S-S_1$ (фиг. 4, в, г). В этом случае $\rho_1 = -\frac{c}{2\cos \alpha}$ и выражение (2) примет вид

$$\rho = -\frac{c}{2\cos \alpha} + c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \quad (12)$$

или в прямоугольной системе координат

$$(x^2 + y^2)(2x + c)^2 + 8cx^3 - 4a^2x^2 = 0 \quad (13)$$

Кривая (12) является кривой четвертого порядка и при $a > \frac{c}{2}$ имеет двойную точку в начале координат. Она состоит из двух симметричных относительно оси абсцисс ветвей, которые при $c=a$ распадаются на прямую $x = -\frac{a}{2}$ и кривую третьего порядка $\rho = -\frac{a}{2\cos \alpha} + 2a\cos \alpha$, являющуюся трисектрисой Маклорена с параметром $\frac{a}{2}$. В данном случае соотношение $\frac{a}{c}$ влияет только на изменения интервала угла качания кулисы:

$$\text{при } a > c \quad 90^\circ < \alpha < 270^\circ$$

$$\text{при } a < c \quad 180^\circ - \arcsin \frac{a}{c} \leq \alpha' \leq 180^\circ + \arcsin \frac{a}{c}$$

Предложенным методом можно спроектировать механизмы для воспроизведения таких кривых, как циссоида Диоклесса, строфоида, конхоида Слюса, конхоида окружности, подер конических сечений, эллиптическая и гиперболическая лемнискаты Баутса, кривые (3), (5), (7), (9), (11), (12) и т. п.

Так как вид воспроизводимой кривой зависит от ρ_1 , то путем перестановки опор можно воспроизвести одной и той же схемой различные кривые. Следовательно, предложенный метод может быть использован также при синтезе механизмов с регулированием на ходу.

Предложенный метод прост по своему изложению, не требует сложных и трудоемких вычислений и может быть вполне эффективно использован широким кругом инженерно-технических работников при синтезе механизмов, воспроизводящих кривые высокого порядка.

Ереванский государственный
университет

Поступила 22 IX 1972

Կ. Կ. ՇԱԽԲԱԶԻԱՆ, Գ. Ա. ՋԱԴԱՅՊԱՆԻԱՆ

ՄԵԿԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶՈՒՄԸ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՓՆՋԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՈՐՈՇԱԿԻ
ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄԱՆ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում առաջարկվում է մեթոդ, որի միջոցով հնարավոր է դառնում նախագծել մեխանիզմներ, որոնք կարող են վերարտադրել այնպիսի կորեր, ինչպիսիք են ստրոֆոիդան, Դիոկլեսսի ցիսսոիդան, Սլյուսի խիսունչը, շրջանագծի խիսունչը, կոնական հատույթների պոդերաները, Բաուսսի էլիպտիկ ու հիպերբոլիկ լեմնիսկատները, (3), (5), (7), (9), (11), (12), կորերը և այլն: Ընդ որում մեկ մեխանիզմից մյուս մեխանիզմին անցնելը կատարվում է պարզ վերալարման միջոցով:

ON SYNTHESIS OF MECHANISMS ON THE BASIS OF CERTAIN CORRELATIONS BETWEEN THE BUNDLES OF STRAIGHT LINES

K. Kb. SHAKHBAZIAN, D. A. JAGATSPANIAN

S u m m a r y

A method is suggested to design mechanisms capable of reproducing such curves as the strophoid, the cissoid of Diogles, the conchoid of Sluys, the conchoid of circumference, the elliptic and hyperbolic lemniscates of Boudce, curves (3), (5), (7), (9), (11), (12), etc. Transition from one mechanism to another is, therewith, effected by an ordinary readjustment.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Добровольский В. В. Теория механизмов для образования плоских кривых. Изд. АН СССР, М., 1953.
2. Артоболовский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. Изд. АН СССР, М., 1959.
3. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. Изд. «Просвещение», М., 1969.