ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 5, 1973 Механика

М. М. МАНУКЯН

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ УЧАСТКОВ КОНТАКТА

Плоская контактная задача линейной теории ползучести без учета сил трения и сцепления при наличии одного участка контакта решена И. Е. Прокоповичем [1], а с двумя участками контакта рассмотрена в работе [2]. В работах [3] и [4] дано решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения и сцепления при одном участке контакта, а плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления при двух участках контакта рассмотрена в работе С. М. Мхитаряна [5].

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести с учетом сил сцепления при двух участках контакта. В качестве исходной физической теории ползучести принята наследственная теория старения, предложенная Н. Х. Арутюняном [6].

В нашей работе доказывается, что решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления при двух участках контакта сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений. Первое уравнение учитывает влияние ползучести материала на распределение контактного усилия и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Второе интегральное уравнение представляет собой линейное интегральное уравнение с эрмитовым ядром. Для решения последнего уравнения используется метод, предложенный М. Г. Крейном [7] для решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода с ядрами, зависящими от разности аргументов.

В работе рассматривается случай кососимметричного нагружения этих тел и одновременно указывается метод решения задачи в случае симметричного нагружения.

В качестве примера рассмотрена задача о давлении двух жестких штампов с плоскими основаниями при наличии сил сцепления на полуплоскость, обладающую свойством ползучести.

§1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть два соприкасающихся между собой тела, обладающих свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая $P(t)$ которых перпендикулярна к оси x

(фиг. 1). Допустим, что между этими телами вдоль участка контакта действуют силы сцепления, которые уравновешиваются силой $Q(t)$, направленной вдоль оси x. Далее предположим, что контакт происходит на участках $(-a, -b)$ и (b, a).

Как и в работе [4], легко показать, что, если контакт происходит по двум участкам $(-a, -b)$ и (b, a), то основные интегральные уравнения контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления будут иметь следующий вид:

$$
\left(\int\limits_{-a(t)}^{-b(t)}+\int\limits_{b(t)}^{a(t)}\right)\left[\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}\,q^*(s,t)-\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-s)\,p^*(s,t)\right]ds-
$$

$$
-\int\limits_{\tau_1}^{t}\left(\int\limits_{-a(\tau)}^{-b(\tau)}+\int\limits_{b(\tau)}^{a(\tau)}\right)\left[\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}\,q^*(s,\tau)-\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-s)\,p^*(s,\tau)\right]\times
$$

$$
\times K(t,\tau)\,ds\,d\tau=0 \tag{1.1}
$$

$$
\left(\int\limits_{-a(t)}^{-b(t)}+\int\limits_{b(t)}^{a(t)}\right)\left[\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p^*(s,t)+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-s)\,q^*(s,t)\right]ds-
$$

$$
-\int\limits_{\tau_1}^{t}\left(\int\limits_{-a(\tau)}^{-b(\tau)}+\int\limits_{b(\tau)}^{a(\tau)}\right)\left[\frac{\lambda}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p^*(s,\tau)+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(x-s)\,q^*(s,\tau)\right]\times
$$

$$
\times K(t,\tau)\,ds\,d\tau=\frac{C^*(t)+f_0(x)}{\Theta(t)}
$$

Здесь τ_1 — возраст материала, t — время, $2a(t)$ — переменная ширина контакта, $C^*(t)$ — произвольная функция, $p^*(x,t)$ и $q^*(x,t)$ — — соответственно интенсивности нормальных и горизонтальных сил, действующих на точки границы полуплоскости с учетом ползучести, $f_0(x)=f_1(x)+f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения поверхностей первого и второго тел.

При получении соотношений (1.1) принято, что коэффициент поперечного расширения при деформациях ползучести $\nu^*(t,\tau)$ равен коэффициенту поперечного расширения при упруго-мгновенных деформациях $\nu(t)$ и постоянен во времени, то есть

$$
\nu^*(t,\tau)=\nu(t)=\nu=\text{const} \tag{1.2}
$$

Как известно [6], это равенство при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приводит к равенству между упруго-мгновенными напряжениями, вызванными поверхностными силами, и соответствующими напряжениями, вычисленными с учетом ползучести. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что принятые допущения (1.2) могут привести при определении напряжений, например, в бетонных конструкциях, к погрешностям, не превышающим 5%, то есть к погрешностям, допустимым в технических расчетах [1]. Для обычного бетона $\nu = \frac{1}{6}$, $0 < \nu^*(t, \tau) < \frac{1}{6}$.

В соотношениях (1.1) приняты следующие обозначения:

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\delta_1(t, \tau) + \delta_2(t, \tau)}{\frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)}} \tag{1.3}$$

$$\delta_i(t, \tau) = \frac{1}{E_i(\tau)} + C_i(t, \tau) \qquad (i = 1, 2) \tag{1.4}$$

$$\Theta(t) = (1 + \nu)(1 - 2\nu)\left[\frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)}\right], \qquad \lambda = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}$$

где $C_1(t, \tau)$ и $C_2(t, \tau)$ — меры ползучести материалов, зависящие от возраста материалов и от продолжительности действия нагрузки, $E_1(t)$ и $E_2(t)$ — модули упруго-мгновенной деформации материалов.

Если ввести комплекснозначную функцию от вещественной переменной

$$\chi^*(s, t) = p^*(s, t) + iq^*(s, t) \tag{1.5}$$

то (1.1) можно будет представить в следующем виде:

$$\left(\int\limits_{-a(t)}^{-b(t)} + \int\limits_{b(t)}^{a(t)}\right) K^*(x, s)\chi^*(s, t)\, ds -$$

$$- \int\limits_{\tau_1}^{t}\left(\int\limits_{-a(\tau)}^{-b(\tau)} + \int\limits_{b(\tau)}^{a(\tau)}\right) K^*(x, s)\chi^*(s, \tau) K(t, \tau)\, ds\, d\tau = \frac{C^*(t) + f_0(x)}{\Theta(t)} \tag{1.6}$$

где

$$K^*(x, s) = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x - s|} - i\frac{1}{2} \operatorname{sign}(x - s) \tag{1.7}$$

Интегральное уравнение (1.6) можно представить в более компактной форме в виде следующих интегральных уравнений:

$$\omega(x, t) - \int\limits_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\,\omega(x, \tau)\, d\tau = \frac{C^*(t) + f_0(x)}{\Theta(t)} \tag{1.8}$$

$$\omega(x, t) = \left(\int\limits_{-a(t)}^{-b(t)} + \int\limits_{b(t)}^{a(t)}\right) K^*(x, s)\,\chi^*(s, t)\, ds \tag{1.9}$$

Таким образом, решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления при двух участках контакта, то есть, в сущности, отыскание неизвестной комплекснозначной функции $\chi^*(x, t)$ сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений (1.8) и (1.9). Здесь (1.9) представляет собой интегральное уравнение, описывающее упруго-мгновенную задачу, а (1.8)—интегральное уравнение Вольтерра второго рода, учитывающее влияние ползучести.

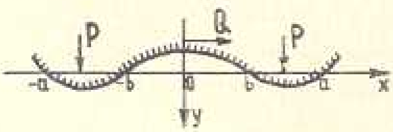
§ 2. Случай кососимметричного нагружения

Рассмотрим тот случай, когда имеются два равных кососимметрически нагруженных участка контакта (фиг. 2). Тогда будем иметь

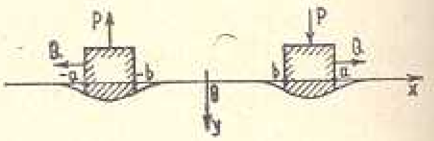
$$p^*(-x,t) = -p^*(x,t), \quad q^*(-x,t) = -q^*(x,t) \tag{2.1}$$

Пользуясь условием (2.1), можно показать, что интервал интегрирования в уравнении (1.9) можно свести к одному, для чего в интеграле на участке $(-a, -b)$ следует положить

$$s = -s_1 \tag{2.2}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Тогда уравнение (1.9) примет следующий вид:

$$\omega(x,t) = \int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{x+s}{|x-s|} - i\,\frac{1}{2} \Big[\operatorname{sign}(x-s) - \operatorname{sign}(x+s) \Big] \right\} [p^*(s,t) + iq^*(s,t)]\, ds \tag{2.3}$$

§ 3. Решение интегральных уравнений (1.8) и (2.3)

Решение уравнения (1.8) можно написать в виде

$$\omega(x,t) = \frac{C^*(t) + f_0(x)}{\Theta(t)} + \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{C^*(\tau) + f_0(x)}{\Theta(\tau)} \right] R(t,\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

где $R(t,\tau)$—резольвента линейного интегрального уравнения с ядром

$$K(t,\tau) = \frac{E_1(t)E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta_1(t,\tau) + \delta_2(t,\tau)] \tag{3.2}$$

Соотношение (3.1) можно представить в виде

$$\omega(x,t) = \gamma^*(t) + f_0(x)\, H^*(t) \tag{3.3}$$

где

$$\gamma^*(t) = \frac{C^*(t)}{\Theta(t)} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{C^*(\tau)}{\Theta(\tau)} R(t,\tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

$$H^*(t) = \frac{1}{\Theta(t)} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{1}{\Theta(\tau)} R(t,\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Здесь

$$\gamma^*(t) = \gamma_1^*(t) + i\gamma_2^*(t)$$

неизвестная функция, определяющаяся при известных размерах участка контакта из уравнения равновесия

$$P(t) + iQ(t) = \int_{b(t)}^{a(t)} [p^*(x,t) + iq^*(x,t)]\, dx \tag{3.6}$$

Подставляя выражение $\omega(x,t)$ из (3.3) в (2.3), после некоторых преобразований получим

$$\int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \ln\frac{x+s}{|x-s|} - i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu[\mathrm{sign}(x-s) - \mathrm{sign}(x+s)] \right\} [p^*(s,t) +$$

$$+ iq^*(s,t)]\, ds = \frac{\pi E^*(t)}{2(1-\nu^2)} [\gamma(t) + f_0(x) H(t)] \tag{3.7}$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu)$$

$$\gamma(t) = \Theta(t)\gamma^*(t), \qquad H(t) = \Theta(t) H^*(t)$$

$$E^*(t) = \frac{E_1(t)\,E_2(t)}{E_1(t) + E_2(t)}, \qquad \mathrm{th}\,\pi\mu = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{3.8}$$

Решение интегрального уравнения (3.7) можно получить методом М. Г. Крейна [7]. Согласно этому методу решение $\chi^*(x,t)$ уравнения (3.7) можно получить по следующей формуле:

$$\chi^*(x,t) = \left[\frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_b^u g^*(s,u)\,\omega(s,t)\, ds \right]_{u=a} q(x,u) -$$

$$- \int_x^a q(x,u) \frac{d}{du} \left[\frac{1}{M'(u)} \frac{d}{du} \int_b^u q^*(s,u)\,\omega(s,t)\, ds \right] du \tag{3.9}$$

где $q(x,u)$—решение уравнения

$$\int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \ln\frac{x+s}{|x-s|} - i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu[\mathrm{sign}(x-s) - \mathrm{sign}(x+s)] \right\} \times$$

$$\times\, q(s,t)\, ds = 1 \tag{3.10}$$

а $q^*(x,u)$—решение транспонированного уравнения

$$\int_{b(t)}^{a(t)}\left\{\ln\frac{x+s}{|x-s|}+i\,\frac{\pi}{2}\,\operatorname{th}\pi\mu\,[\operatorname{sign}(x-s)+\operatorname{sign}(x+s)]\right\}\times$$

$$\times\, q^*(s,t)\,ds=1 \tag{3.11}$$

при этом

$$M(u)=\int_{b}^{a}q(s,u)\,ds \tag{3.12}$$

Таким образом, если известны решения уравнений (3.10) и (3.11), то определение комплекснозначной функции $\chi^*(x,t)$ согласно (3.9) сводится к квадратурам.

§ 4. Определение функций $g(x,t)$ и $g^*(x,t)$

Следуя работам [5] и [8], рассмотримбесконечнозначную функцию $f(w)=(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ $(-\infty<\mu<+\infty)$ с точками ветвления $w=\pm a$, $w=\pm b$, лежащими на вещественной оси. Легко видеть, что в плоскости с выключенными отрезками $[-a,-b]$ и $[b,a]$ можно выбрать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Условимся выбирать ту ветвь функции $f(w)$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(w)=\frac{1}{w^2}+\frac{a_1}{w^4}+\cdots \tag{4.1}$$

Обозначим через s любую точку отрезка $[-a,-b]$ или отрезка $[b,a]$, к которой стремится точка w. На верхнем берегу разреза по отрезку $[-a,-b]$ будем считать, что

$$w-a,\ w+a,\ w-b,\ w+b$$

принимают соответственно значения

$$(a-s)e^{\pi i},\ (a+s),\ (b-s)e^{\pi i},\ (-b-s)e^{\pi i}$$

а на нижнем берегу разреза соответственно значения

$$(a-s)e^{-\pi i},\ (a+s),\ (b-s)e^{-\pi i},\ (-b-s)e^{-\pi i}$$

Аналогично будем считать, что на верхнем берегу отрезка $[b,a]$ принимают, соответственно, значения

$$(a-s)\,e^{\pi i},\qquad (a+s),\qquad (s-b),\qquad (s+b)$$

а на нижнем берегу соответственно значения

$$(a-s)\,e^{-\pi i},\qquad (a+s),\qquad (s-b),\qquad (s+b)$$

Рассматриваемая нами ветвь функции $f(w)$ на верхнем берегу разреза по $[-a,-b]$ принимает значение

$$f(w)=ie^{-\pi i}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

а на нижнем берегу этого же разреза значение

$$f(w) = -ie^{\pi\mu}(a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

Аналогично, на верхнем берегу разреза по $[b, a]$ имеем

$$f(w) = -e^{\pi\mu}(a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

а на нижнем берегу этого же разреза

$$f(w) = -e^{-\pi\mu}(a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

В области, ограниченной замкнутыми контурами вокруг разрезов и окружностью Γ_R (фиг. 3), к выбранной ветви функции применима формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\Gamma_R} + \oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)\frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{4.2}$$

где z — любая точка в указанной области.

Так как на бесконечности $f(w) = O\left(\frac{1}{w^2}\right)$, то первый интеграл в (4.2) при $R \to \infty$ стремится к нулю и, следовательно, будем иметь

$$(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2}\right)(w^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{dw}{w-z} \tag{4.3}$$

Если контуры C_1 и C_2 стягивать к разрезам $[-a, -b]$, $[b, a]$ и учитывать значения функции $f(w)$ на верхних и нижних берегах этих разрезов, то соотношение (4.3) можно представить в виде

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\left(\int_{-a}^{-b} + \int_{b}^{a}\right)(a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{\operatorname{sign} s}{z-s}\,ds =$$

$$= (z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \tag{4.4}$$

Если обе части (4.4) проинтегрировать сперва по линии, соединяющей точку „b“ и некоторую точку z комплексной плоскости, а затем по линии (a, z) и результаты сложить, то получим

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\left(\int_{-a}^{-b} + \int_{b}^{a}\right)\ln(z-s)\,(a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\operatorname{sign} s\,ds =$$

$$= C_{\pm} + \left(\int_{b}^{z} + \int_{a}^{z}\right)(w^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw \tag{4.5}$$

Произвольная постоянная C_+ соответствует случаю, когда линия интегрирования вместе с точкой z лежит в верхней полуплоскости, а C_- — случаю, когда линия интегрирования с точкой z лежит в нижней полуплоскости. Наличие разных постоянных в формуле (4.5) объясняется многозначностью логарифма.

Если воспользоваться соотношением

$$\ln(z-s)=\ln z+\ln\left(1-\frac{s}{z}\right)$$

то можно(4.5) представить в следующем виде:

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\Bigg|\ln z\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\operatorname{sign}s\,ds+$$

$$+\left(\int_{-a}^{-b}+\int_{b}^{a}\right)\ln\left(1-\frac{s}{z}\right)(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\operatorname{sign}s\,ds=$$

$$=C_{\pm}+\int_{l^{\pm}}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw+$$

$$+2\int_{a}^{z}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw \tag{4.6}$$

где $l^{\pm}$ означают, соответственно, верхний и нижний берега разреза по отрезку $[b, a]$.

Ввиду нечетности подинтегральной функции первый интеграл обращается в нуль. Кроме этого при $z\to\infty$ обращается в нуль и второй интеграл. Тогда из (4.6) получим

$$C_{\pm}+\int_{l^{\pm}}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw+$$

$$+2\int_{a}^{\infty}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw=0 \tag{4.7}$$

В области, ограниченной окружностью Γ_R и отрезком вещественной оси $(-R,\ R)$ (фиг. 4), функция

$$f(w)=(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

голоморфна. Поэтому применима теорема Коши, то есть

$$\int_{\Gamma_R}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw+$$

$$+\int_{-R}^{R}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw=0 \tag{4.8}$$

Так как на бесконечности $f(w)=O\left(\frac{1}{w^2}\right)$, то первый интеграл в (4.8) при $R\to\infty$ обращается в нуль и получается

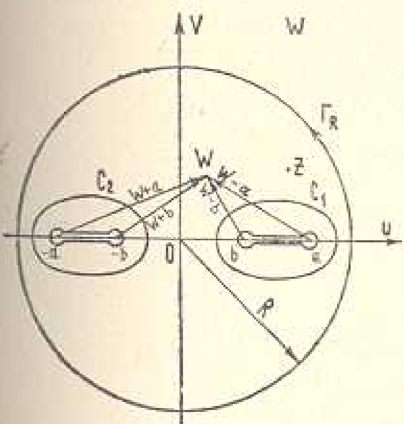
$$\int_{-\infty}^{\infty}(w^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(w^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,dw=0 \tag{4.9}$$

Если разбить этот интеграл на некоторые участки, то найдем

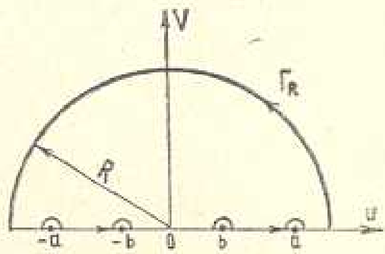
$$\int_{-\infty}^{-a}(s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds-\int_{-b}^{b}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+$$

$$+ie^{-\pi\mu}\int_{-a}^{-b}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds-ie^{\pi\mu}\int_{b}^{a}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+\int_{a}^{\infty}(s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds=0 \tag{4.10}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

После некоторых преобразований соотношению (4.10) можно дать следующий вид:

$$\int_{a}^{\infty}(s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds-i\,\mathrm{sh}\,\pi\mu\times$$

$$\times\int_{b}^{a}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds-$$

$$-\int_{0}^{b}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds=0 \tag{4.11}$$

При помощи (4.7) и (4.11) найдем

$$C_+ = ie^{-\pi\mu}\int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds -$$

$$-2\int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds \tag{4.12}$$

$$C_- = -ie^{\pi\mu}\int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds -$$

$$-2\int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds$$

Если z устремить к верхнему (нижнему) берегу разреза $(b,\ a)$ и выбрать такую ветвь логарифма, чтобы имело место

$$\ln(z-s)\to\ln|x-s|,\quad z\to x\pm i0,\quad x>s$$

$$\ln(z-s)\to\ln|x-s|\pm i\pi,\quad z\to x\pm i0,\quad x<s$$

то из соотношений (4.5) и (4.12) получим

$$\int_b^a\left[\ln\frac{x+s}{|x-s|}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(x-s)\right](a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds =$$

$$=\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds +$$

$$+\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}\int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds \tag{4.13}$$

(4.13) представим в следующем виде:

$$\int_b^a\left\{\ln\frac{x+s}{|x-s|}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,[\mathrm{sign}\,(x-s)-\mathrm{sign}\,(x+s)]\right\}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds=\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}J_1+i\pi\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,J_2 \tag{4.14}$$

где

$$J_1=\int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds \tag{4.15}$$

$$J_2=\int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds \tag{4.16}$$

Теперь необходимо определить выражения J_1 и J_2. Если сделать подстановку

$$s = b\sqrt{y} \tag{4.17}$$

то J_1 примет следующий вид:

$$J_1 = \frac{1}{2a}\left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu}\int\limits_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\left(1-\frac{b^2}{a^2}y\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}dy \tag{4.18}$$

С помощью выражения гипергеометрической функции [9] можно (4.18) представить в виде

$$J_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}{\Gamma(1+i\mu)}F\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1+i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{4.19}$$

где $F\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1+i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right)$ — гипергеометрическая функция, а $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Остается определить значение J_2. Для этой цели воспользуемся соотношением (4.11). Из этого соотношения на основании (4.15), (4.16) и (4.19) получим

$$J_2 = -\frac{i}{\operatorname{sh}\pi\mu}\left[\int\limits_a^\infty (s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds - \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}{\Gamma(1+i\mu)}F\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1+i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right)\right] \tag{4.20}$$

Если сделать подстановку

$$s = a\sqrt{y}$$

то для интеграла, входящего в (4.20), получим следующее выражение:

$$J_3 = \int\limits_a^\infty (s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_1^\infty y^{-\frac{1}{2}}(y-1)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(y-\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dy =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)}F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{4.21}$$

Подставляя выражение J_3 из (4.21) в (4.20), найдем

$$J_2 = -\frac{i}{\operatorname{sh}\pi\mu}\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)}F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\frac{b^2}{a^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}{\Gamma(1+i\mu)}F\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1+i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right)\right] \tag{4.22}$$

Выражения J_1 и J_2 из (4.19) и (4.22) подставим в (4.14). Тогда получим

$$\int_b^a\left\{\ln\frac{x+s}{|x-s|}-\frac{\pi\mu}{2}\operatorname{th}\pi\mu[\operatorname{sign}(x-s)-\operatorname{sign}(x+s)]\right\}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds=\frac{\pi^{3/2}}{2a\operatorname{ch}\pi\mu}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)}F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\frac{1}{2},1-i\mu,\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{4.23}$$

Из (3.10) и (4.23) следует, что

$$g(x,u)=\frac{(u^2-x^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(x^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{A(u,b)} \tag{4.24}$$

где

$$A(u,b)=\frac{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{2u\operatorname{ch}\pi\mu\Gamma(1-i\mu)}F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\ \frac{b^2}{u^2}\right) \tag{4.25}$$

Теперь необходимо определить функцию $g^*(x,u)$. Для этой цели в соотношении (4.13) заменим i через $-i$, тогда получим

$$\int_b^a\left[\ln\frac{x+s}{|x-s|}+\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(x-s)\right](a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}ds=$$

$$=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\int_0^b(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}ds-$$

$$-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\int_b^a(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}ds \tag{4.26}$$

(4.26) представим в следующем виде:

$$\int_b^a\left\{\ln\frac{s+x}{|s-x|}+\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu[\operatorname{sign}(x-s)+\operatorname{sign}(x+s)]\right\}(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\times$$

$$\times(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}ds=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\int_0^b(a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}ds \tag{4.27}$$

Соотношение (4.27) на основании (4.15) и (4.19) можно представить в следующем виде:

$$\int_b^a \left\{ \ln \frac{s+x}{|s-x|} + \frac{i\pi}{2} \operatorname{th}\pi\mu \left[\operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{sign}(x+s)\right]\right\} (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \times$$

$$\times (s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{4.28}$$

Из (3.11) и (4.28) следует, что

$$g^*(x, u) = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi} \frac{(u^2-x^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(x^2-b^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}}{B(u, b)} \tag{4.29}$$

где

$$B(u, b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2u} \left(\frac{u}{b}\right)^{-2i\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)} F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{4.30}$$

Подставляя выражения $g(s, u)$ из (3.26) в (3.12), получим

$$M(u) = \frac{\int_b^u (u^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{A(u, b)} = \frac{1}{A(u, b)} \left\{ -\frac{i}{\operatorname{sh}\pi\mu} \times \right.$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{2u} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)}{\Gamma(1-i\mu)} F\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1-i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{b}{u}\right)^{2i\mu} \times \right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)}{\Gamma(1+i\mu)} F\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1+i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \right] \right\} \tag{4.31}$$

Подставляя выражения $g(x, u)$, $g^*(x, u)$ и $M(u)$ из (4.24), (4.29) и (4.31) в (3.9), получим выражение комплекснозначной функции $\chi^*(x, t)$.

Приравнивая действительные части и коэффициенты мнимой части полученного уравнения,получим выражения контактных давлений $p^*(x, t)$ и $q^*(x, t)$.

§ 5. Определение функции $H^*(t)$

Интегральное уравнение для определения $H^*(t)$ согласно (1.8) и (3.3) можно представить в виде

$$H^*(t) - \int_{\tau_1}^{t} K(t,\tau) H^*(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\Theta(t)}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\delta_1(t,\tau) + \delta_2(t,\tau)}{\dfrac{1}{E_1(t)} + \dfrac{1}{E_2(t)}}$$

Если для меры ползучести принять выражения [6]

$$C_1(t,\tau) = \left(\frac{A_2}{\tau} + C_1\right)\left[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right]$$

$$C_2(t,\tau) = \left(\frac{A_3}{\tau} + C_2\right)\left[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right]$$

где A_2, A_3, C_1, C_2, γ_1 — постоянные параметры, определяемые из опытов, то выражение неизвестной функции $H^*(t)$ можно будет представить в виде

$$H^*(t) = \frac{1}{\Theta(t)}\left[1 - \gamma_1\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right)\int_{\tau_1}^{t} \frac{e^{-\eta(\tau)}}{\Theta(\tau)}\, d\tau\right] \tag{5.1}$$

где

$$C_0 = d(C_1 + C_2), \quad A_1 = d(A_2 + A_3), \quad d = \frac{2(1-\nu)}{\pi}$$

$$\eta(\tau) = \gamma_1 \int_{\tau_1}^{\tau}\left[1 + \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau}\right)\frac{1}{\Theta(\tau)}\right] d\tau$$

Из (5.1) следует, что функция $H^*(t)$ принимает максимальное значение при $t = \tau_1$, минимальное при $t = \infty$.

Если предположить, что модули мгновенной деформации материалов постоянны, то есть

$$E_1(t) = E_1 = \text{const}, \quad E_2(t) = E_2 = \text{const}$$

то выражение для $H^*(t)$ примет следующий вид:

$$H^*(t) = \frac{1}{\Theta(t)}\left[1 - \gamma_1 b E_1\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right) e^{r\tau_1}\tau_1^{p_1} \frac{\Phi(r,t,p_1) - \Phi(r,\tau_1,p_1)}{r^{1-p_1}}\right]$$

где

$$\frac{E_2}{E_1} = m, \quad \frac{\varphi_2(\tau_1)}{\varphi_1(\tau_1)} = n, \quad \varphi_1(\tau) = C_1 + \frac{A_2}{\tau}, \quad \varphi_2(\tau) = C_2 + \frac{A_3}{\tau}$$

$$r = \gamma_1(1 + bC_1E_1), \quad p_1 = b\gamma_1 A_2 E_1, \quad b = \frac{1+n}{1+m}\, m$$

Здесь

$$\Phi(\xi, p_1) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{p_1}}\, d\tau$$

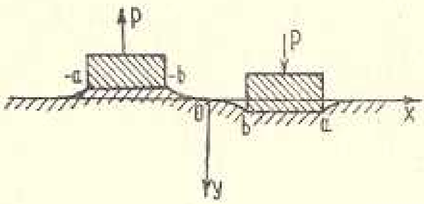
является неполной гамма-функцией.

Таким образом, значение неизвестной функции $H^*(t)$ найдено.

§ 6. Частный пример

В качестве примера рассмотрим задачу о штампе, показанном на фиг. 5. Тогда интегральное уравнение (3.7) примет следующий вид:

$$\int_b^a \left\{ \ln \frac{x+s}{|x-s|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{th}\pi\mu \left[\operatorname{sign}(x-s) - \operatorname{sign}(x+s) \right] \right\} [p_0(s,t) + iq_0(t)]\, ds = \frac{\pi E(t)}{2(1-\nu^2)} \gamma(t) \tag{6.1}$$



Фиг. 5.

Из (3.10) и (6.1) следует, что

$$p_0(x,t) + iq_0(x,t) = \frac{\pi E(t)}{2(1-\nu^2)} \gamma(t) g(x,a) \tag{6.2}$$

Отсюда имеем

$$p_0(x,t) = \gamma_1(t) \frac{\pi E(t)}{2(1-\nu^2)} \operatorname{Re} g(x,a) \tag{6.3}$$

где $\gamma_1(t)$ — неизвестная функция, определяемая из уравнения равновесия

$$\int_b^a p_0(s,t)\, ds = P \tag{6.4}$$

Подставляя выражение $p_0(x,t)$ из (6.3) в (6.4), получим

$$\gamma_1(t) \frac{\pi E(t)}{2(1-\nu^2)} \int_b^a \operatorname{Re} g(x,a)\, dx = P \tag{6.5}$$

Отсюда имеем

$$\gamma_1(t) = \frac{2(1-\nu^2) P}{\pi E(t)} \frac{1}{\int_b^a \operatorname{Re} g(x,a)\, dx} \tag{6.6}$$

Из (4.24) имеем

$$\int_b^a g(x, a)\, dx = \frac{1}{A(a, b)} \int_b^a (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (x^2 - b^2)^{-\frac{1}{2} + i\mu}\, dx \tag{6.7}$$

На основании (4.6) и (4.22) выражению (6.7) можно придать следующий вид:

$$\int_b^a g(x, a)\, dx = \frac{\overline{A(a, b)}}{|A(a, b)|^2} \left\{ - \frac{i}{\operatorname{sh}\pi\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\mu\right)}{\Gamma(1 - i\mu)} \times \right.\right.$$

$$\times F\left(\frac{1}{2} - i\mu;\ \frac{1}{2};\ 1 - i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{b}{a}\right)^{2i\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)}{\Gamma(1 + i\mu)} \times$$

$$\left.\left. \times F\left(\frac{1}{2} + i\mu;\ \frac{1}{2};\ 1 + i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \right] \right\} \tag{6.8}$$

где

$$\overline{A(a, b)} = \frac{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)}{2a\operatorname{ch}\pi\mu\, \Gamma(1 + i\mu)} F\left(\frac{1}{2} + i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1 + i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{6.9}$$

Из (6.8) следует, что

$$\int_b^a \overline{g(x, a)}\, dx = \frac{A(a, b)}{|A(a, b)|^2} \left\{ \frac{i}{\operatorname{sh}\pi\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\mu\right)}{\Gamma(1 + i\mu)} \times \right.\right.$$

$$\times F\left(\frac{1}{2} + i\mu,\ \frac{1}{2},\ 1 + i\mu,\ \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{b}{a}\right)^{-2i\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\mu\right)}{\Gamma(1 - i\mu)} \times$$

$$\left.\left. \times F\left(\frac{1}{2} - i\mu;\ \frac{1}{2};\ 1 - i\mu;\ \frac{b^2}{a^2}\right) \right] \right\} \tag{6.10}$$

Далее, из (6.8) и (6.10) имеем

$$\int_b^a \operatorname{Re} g(x, a)\, dx = \frac{\int_b^a g(x, a)\, dx + \int_b^a \overline{g(x, a)}\, dx}{2} \tag{6.11}$$

Подставляя выражение $\int_b^a \operatorname{Re} g(x, a)\, dx$ в (6.6), получим

$$\gamma_1(t) = \frac{4(1 - \nu^2) P}{\pi E(t)} \frac{1}{\int_b^a g(x, a)\, dx + \int_b^a \overline{g(x, a)}\, dx}$$

где $\int_b^a g(x, a)\, dx$ и $\int_b^a \overline{g(x, a)}\, dx$ определяются формулами (6.8) и (6.10).

Рассмотрим численный пример. Пусть имеем следующие исходные данные:

$$E(t) = 2 \cdot 10^5 (1 - e^{-0.09t})\ кг/см^2, \quad t = 7,\ 14,\ 28,\ 90\ дней$$

$$\nu = \frac{1}{6}, \quad \mu = \frac{1}{2\pi}(3 - 4\nu), \quad a = 4\ см, \quad b = 2\ см$$

Значения осадки штампа, зависящие от времени

	t = 7	t = 14	t = 28	t = 90	t = 180
$10^5 \cdot \frac{\gamma_1(t)}{P}$	1.57639	1.02855	0.801275	0.737029	0.736812

§7. Случай симметричного нагружения

Рассмотрим тот случай, когда имеются два равных симметрично нагруженных участка контакта (фиг. 2). Тогда будем иметь

$$p^*(-x, t) = p^*(x, t), \quad q^*(-x, t) = q^*(x, t) \tag{7.1}$$

Пользуясь условием (7.1), нетрудно показать, что интервал интегрирования в уравнении (1.9) можно свести к одному, для чего в интеграле на участке $(-a, -b)$ следует положить

$$s = -s_1$$

Тогда уравнение (1.9) примет следующий вид:

$$\omega(x, t) = \int_{b(t)}^{a(t)} K^{**}(x, s)\, \chi^*(s, t)\, ds \tag{7.2}$$

где

$$K^{**}(x, s) = \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} - \frac{i}{2}\left[\operatorname{sign}(x - s) + \operatorname{sign}(s + x)\right] \tag{7.3}$$

Подставляя выражение $\omega(x, t)$ из (3.3) в (7.2), после некоторых преобразований получим

$$\int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \left[\operatorname{sign}(x - s) - \operatorname{sign}(s + x)\right] \times \right.$$

$$\times \chi^*(s, t) ds = \frac{\pi E^*(t)}{2(1 - \nu^2)} \left[\gamma(t) + f_0(x) H(t)\right] \tag{7.4}$$

Неизвестная функция $\chi^*(x, t)$ опять определяется формулой (3.9). Теперь необходимо определить функции $g(x, t)$ и $g^*(x, t)$, которые в этом случае являются соответственно решениями следующих уравнений:

$$\int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \left[\operatorname{sign}(x - s) + \operatorname{sign}(s + x)\right] \right\} g(s, t)\, ds = 1 \tag{7.5}$$

$$\int_{b(t)}^{a(t)} \left\{ \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} + \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu [\operatorname{sign}(x - s) - \operatorname{sign}(x + s)] \right\} g^*(s, t)\, ds = 1 \quad (7.6)$$

Отметим в этом случае только путь решения задачи. Рассмотрим функцию

$$f(w) = w(w^2 - a^2)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (w^2 - b^2)^{-\frac{1}{2} + i\mu} \quad (7.7)$$

с точками ветвления $w = \pm a$, $w = \pm b$, лежащими на вещественной оси (фиг. 2). Возьмем ту ветвь $f(w)$, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(w) = \frac{1}{w} + \frac{a_1}{w^3} + \cdots$$

Если в области, ограниченной замкнутыми контурами вокруг разрезов и окружностью Γ_R (фиг. 2), к выбранной ветви функции $f(w)$ применим формулу Коши, то получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\Gamma_R} + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{f(w)\, dw}{w - z} \quad (7.8)$$

где z — любая точка в указанной области.

Первый интеграл в (7.8) при $R \to \infty$ обращается в нуль и получаем

$$z(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (z^2 - b^2)^{-\frac{1}{2} + i\mu} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{f(w)\, dw}{w - z} \quad (7.9)$$

Если контуры C_1 и C_2 стягивать к разрезам $[-a, -b]$, $[b, a]$ и учитывать значения функции $f(w)$ на верхних и нижних берегах этих разрезов, то из (7.9) получим

$$\frac{\operatorname{ch} \pi\mu}{\pi} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_{b}^{a} \right) |s| (a^2 - s^2)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (s^2 - b^2)^{-\frac{1}{2} + i\mu} \frac{ds}{z - s} =$$

$$= z(z^2 - a^2)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (z^2 - b^2)^{-\frac{1}{2} + i\mu}$$

Затем, аналогично сделанному в § 4, можно получить выражения $g(x, u)$ и $g^*(x, u)$, то есть решение задачи, когда имеется симметричное нагружение двух тел.

Ереванский государственный университет

Поступила 15 XII 1971

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԵՐԿՈՒ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերվում է սողքի տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ հաշվի են առնվում կապակցության ուժերը և գոյություն ունեն կոնտակտային երկու տիրույթներ։ Որպես սողքի հիմնական տեսություն, ընդունված է Ն. Խ. Հարությունյանի առաջարկած ժառանգականության տեսությունը՝ նյութի ծերացման հաշվառումով։

Դիտարկվող կոնտակտային խնդրի լուծումը բերվում է երկու ինտեգրալ հավասարումների համատեղ լուծմանը։ Դրանից առաջինը իրենից ներկայացնում է Վոլտերի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում, իսկ երկրորդը՝ Էրմիտի կորիզով գծային ինտեգրալ հավասարում։ Երկրորդ հավասարման լուծման համար օգտագործվում է Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդը։

Աշխատանքում դիտարկվում է մարմինների շեղ սիմետրիկ բեռնավորման դեպքը և միաժամանակ նշվում է խնդրի լուծման մեթոդը մարմինների սիմետրիկ բեռնավորման դեպքի համար։

ON PLANE CONTACT PROBLEM IN THE CREEP TREORY CONSIDERING FRICTIONAL FORCES WITH TWO SITES OF CONTACT

M. M. MANUKIAN

Summary

The solution to a plane contact problem in the linear creep theory is presented, considering frictional forces with two sites of contact. The hereditary theory of ageing is taken as an initial physical creep theory.

The solution to the problem is reduced to a simultaneous solution of two interconnected integral equations. The former is the Volterra linear integral equation while the latter is a linear integral equation with the Hermith-type kernel. The latter is solved by the method due to M. G. Krein.

A case of asymmetric loading of two bodies is examined, and a method is suggested to solve a symmetric loading problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. XX, вып. № 6, 1956.
2. *Манукян М. М.* Решение плоской контактной задачи теории ползучести при наличии двух ,участков контакта. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ-мат. наук, т. XVIII, № 5, 1965.

3. *Шаринкулов Т.* К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил трения. Изв. АН Уз. ССР, сер. техн. наук, № 5, 1963.

4. *Манукян М. М.* Плоская контактная задача теории ползучести при наличии сил сцепления. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 3, 1969.

5. *Мхитарян С. М.* О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. Изв. АН Арм. ССР, Механика, № 5—6, 1968.

6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.

7. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.

8. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М-Л, Гостехиздат, 1949.

9. *Бейтмен Г.* и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. Физматгиз, М., 1965.