ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 5, 1973 Механика

Г. Г. АВАНЕСЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ГАЗА

Известно, что пластины, изготовленные из ферромагнитных материалов и помещенные в поперечное магнитное поле, могут потерять устойчивость. В работах [1—3] показано, что с увеличением напряженности магнитного поля частота колебаний падает и достигает нуля при определенном критическом значении. С возрастанием магнитного поля уменьшается также критическая скорость флаттера [3].

В настоящей статье рассматривается задача устойчивости двух параллельных ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле, обтекаемых потоком непроводящего газа. Определены значения критической скорости при внешнем и внутреннем обтекании, зависящие как от напряженности внешнего магнитного поля, так и от взаимного влияния пластин.

1. Пусть параллельные изотропные пластины постоянной толщины $(2h_1, 2h_2)$ находятся в постоянном поперечном магнитном поле. Введем ортогональную координатную систему (xyz) так, чтобы плоскость (xoy) была параллельна срединным плоскостям пластин и равноудалена от них на расстояния a (фиг. 1). Пластины изготовлены из магнитомягких материалов с разными магнитными и упругими характеристиками.

Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях,

б) для внешней области (то есть для всей области вне пластин) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума,

в) силы, с которыми магнитное поле действует на токи проводимости в материале, пренебрежимо малы по сравнению с силой, обусловленной взаимодействием между магнитным полем и намагниченным материалом,

г) движение газа между пластинами потенциальное [4].

Напряженность магнитного поля представляется в виде [1—3]

$$H = H_0 + h \tag{1.1}$$

где H_0 — напряженность магнитного поля до деформации, h — добавочная напряженность магнитного поля, обусловленная деформацией пластин.

Введя потенциальную функцию $\varphi(x, y, z, t)$ посредством

$$h = \operatorname{grad}\varphi \tag{1.2}$$

для рассматриваемого случая можно написать исходные уравнения и соотношения [3], которые после линеаризации имеют следующий вид:

в областях, занимаемых пластинами $(-1)^{k-1}a-h_k \leqslant z \leqslant (-1)^{k-1}a+$ $+h_k$, $k=1, 2$

$$D_k \nabla^4 w_k + 2\rho_k h_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + 2\rho_k h_k \varepsilon_k \frac{\partial w_k}{\partial t} + P_k +$$

$$+\chi_k B_0 \int\limits_{(-1)^{k-1}a-h_k}^{(-1)^{k-1}a+h_k} \left[\frac{\partial^2 \varphi_k^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k^{(i)}}{\partial y^2}\right] dz = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla^2 \varphi_k^{(i)} = 0 \tag{1.4}$$

в областях вне пластин

$$\nabla^2 \varphi_j^{(e)} = 0, \qquad j = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

где $j=1$ соответствует область $z \geqslant a+h_1$, $j=2$ — область $-a+h_2 \leqslant$ $\leqslant z \leqslant a-h_1$ и $j=3$—область $z \leqslant -a-h_1$.

Уравнения (1.4) и (1.5) связаны общими граничными условиями на четырех поверхностях пластин [3]

$$\mu_k \frac{\partial \varphi_k^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varphi_k^{(i)}}{\partial x} + \frac{B_0}{\mu_0 \mu_k} \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial x} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial w_k}{\partial x} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi_k^{(i)}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu_0 \mu_k} \frac{\partial w_k}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_j^{(e)}}{\partial y} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial w_k}{\partial y}$$

$$z = (-1)^{k-1}a \pm h_k, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $D_k = \dfrac{2E_k h_k^3}{3(1-\nu_k^2)}$ —жесткость, E_k—модуль упругости, ν_k—коэффициент Пуассона, ρ_k—плотность, h_k—толщина, w_k — прогиб, μ_k — относительная магнитная проницаемость, $\chi_k = \mu_k - 1$ — магнитная восприимчивость, ε_k — коэффициент линейного затухания материалов пластин, P_k— аэродинамическое давление.

2. Между пластинами с зазором $2a$ имеется поток непроводящего газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси ox (внутреннее обтекание).

Аэродинамическое давление P_k, входящее в уравнение (1.3), определяется по формуле [4]

$$P_k = \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}\right) \qquad -a \leqslant z \leqslant a \tag{2.1}$$

Здесь ρ_0 — плотность невозмущенного газа, $\varphi_0 = \varphi_0(x, y, z, t,)$ — потенциальная функция возмущенного движения газа. В области, занятой газом, φ_0 удовлетворяет уравнению

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}-\frac{2M}{a_0}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial t}-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}=0 \tag{2.2}$$

а также и граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}=\frac{\partial w_k}{\partial t}+U\frac{\partial w_k}{\partial x} \qquad z=\pm a \tag{2.3}$$

где $M=U/a_0$, a_0 — скорость звука для невозмущенного потока.

Решения для φ_0 и для перемещений пластин w_k можно представить в следующем виде [3—4]:

$$\varphi_0(x,\ y,\ z,\ t)=f(z)\exp[i(\Omega t-k_x x-k_y y)] \tag{2.4}$$

$$w_k(x,\ y,\ t)=w_k^0\exp[i(\Omega t-k_x x-k_y y)] \tag{2.5}$$

Здесь функция $f(z)$ — неизвестна и подлежит определению, Ω — частота колебаний, $k_x=\pi/\lambda_x$, $k_y=\pi/\lambda_y$ — волновые числа, λ_x, λ_y — длины полуволн соответственно по направлениям осей ox и oy.

Уравнение (2.2) после подстановки решения в виде (2.4) и некоторых преобразований приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции

$$f''(z)-\nu^2 f(z)=0, \qquad \text{если} \quad M_1^2<1 \tag{2.6}$$

$$f''(z)+\nu^2 f(z)=0, \qquad \text{если} \quad M_1^2>1 \tag{2.7}$$

где

$$\nu^2=k^2|1-M_1^2|, \qquad k^2=k_x^2+k_y^2 \tag{2.7}$$

$$M_1^2=\left[\frac{k_x}{k}\left(\frac{U-V}{a_0}\right)\right]^2, \qquad V=\frac{\Omega}{k_x} \tag{2.8}$$

Решения уравнений (2.6) и (2.7) представляются соответственно в виде

$$f(z)=C_1e^{\nu z}+C_2e^{-\nu z}, \quad M_1^2<1 \tag{2.9}$$

$$f(z)=C_3\cos\nu z+C_4\sin\nu z, \qquad M_1^2>1 \tag{2.10}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.3), определим потенциал поля давления φ_0 и, следовательно, аэродинамическое давление P в зависимости от прогибов пластин

$$P=-\rho_0\frac{(ka_0M_1)^2}{\nu\,\mathrm{sh}2\nu a}\left\{\begin{matrix} w_1^0\mathrm{ch}2\nu a-w_2^0 \\ w_2^0\mathrm{ch}2\nu a-w_1^0\end{matrix}\right\}\exp[i(\Omega t-k_x x-k_y y)]$$

$$\left\{\begin{matrix} z=a \\ z=-a\end{matrix}\right. \qquad M_1^2<1 \tag{2.11}$$

$$P=-\rho_0\frac{(ka_0M_1)^2}{\nu\sin2\nu a}\left\{\begin{matrix} w_2^0-w_1^0\cos2\nu a \\ w_2^0\cos2\nu a-w_1^0\end{matrix}\right\}\exp[i(\Omega t-k_x x-k_y y)]$$

$$\left\{\begin{matrix} z=a \\ z=-a\end{matrix}\right. \qquad M_1^2>1$$

3. Решения уравнений (1.4) и (1.5) представим в виде

$$\varphi_k^{(i)}(x, y, z, t) = f_k(z)\exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)], \quad k = 1, 2,$$
$$\varphi_j^{(e)}(x, y, z, t) = f_j(z)\exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)], \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

Здесь все функции от z являются неизвестными и подлежат определению. В итоге для их определения получается уравнение следующего вида:

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0 \tag{3.2}$$

Найдя общее решение уравнения (3.2) с помощью граничных условий (1.6) и условий затухания возмущений на бесконечности, получим указанные неизвестные функции и, следовательно, потенциалы магнитного поля

$$\varphi_1^{(e)}(x, y, z, t) = \left\{ -\frac{B_0\chi_1}{\mu_0\Delta_1} e^{k(-z+a+h_1)} \operatorname{sh} kh_1 w_1^0 + \right.$$
$$\left. + \frac{4B_0\mu_1}{\mu_0\Delta_1} N_1 e^{k(-z+2h_1)} \right\} \exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)], \qquad z \geqslant a + h_1 \tag{3.3}$$

$$\varphi_2^{(e)}(x, y, z, t) = \frac{4B_0}{\mu_0}(\nabla_2 N_2 e^{kz} + \nabla_1 N_1 e^{-kz}) \exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)]$$
$$-a + h_2 \leqslant z \leqslant a - h_1$$

$$\varphi_3^{(e)}(x, y, z, t) = \left\{ -\frac{B_0\chi_2}{\mu_0\Delta_2} e^{k(z+a+h_2)} \operatorname{sh} kh_2 w_2^0 + \right.$$
$$\left. + \frac{4B_0\mu_2}{\mu_0\Delta_2} N_2 e^{k(z+2h_2)} \right\} \exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)], \qquad z \leqslant -a - h_2$$

$$\varphi_1^{(i)}(x, y, z, t) = \left\{ \frac{B_0\chi_1}{\mu_0\mu_1\Delta_1} \operatorname{ch} k(z-a) w_1^0 + \frac{2B_0 N_1}{\mu_0\Delta_1} \left[(\mu_1 - 1) e^{k(z-2a)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (\mu_1 + 1) e^{k(-z+2h_1)} \right] \right\} \exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)]$$
$$a - h_1 \leqslant z \leqslant a + h_1 \tag{3.4}$$

$$\varphi_2^{(i)}(x, y, z, t) = \left\{ \frac{B_0\chi_2}{\mu_0\mu_2\Delta_2} \operatorname{ch}(z+a) k w_2^0 + \frac{2B_0 N_2}{\mu_0\Delta_2} \left[(\mu_2 + 1) e^{k(z+2h_2)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (\mu_2 - 1) e^{-k(z+2a)} \right] \right\} \exp[i(\Omega t - k_x x - k_y y)],$$

где

$$-a - h_2 \leqslant z \leqslant -a + h_2$$

$$N_1 = \frac{e^{-k(a-h_2)} \operatorname{sh} kh_2 [\chi_1 w_1^0 (\mu_2^2 - 1) e^{-k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 - \chi_2 w_2^0 \Delta_1 \nabla_2]}{4\Delta_1\nabla_1\Delta_2\nabla_2 - (\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1) e^{-2k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} 2kh_1 \operatorname{sh} 2kh_2}$$
$$\tag{3.5}$$
$$N_2 = \frac{e^{-k(a-h_1)} \operatorname{sh} kh_1 [\chi_2 w_2^0 (\mu_1^2 - 1) e^{-k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} kh_2 \operatorname{ch} kh_1 - \chi_1 w_1^0 \Delta_2 \nabla_1]}{4\Delta_1\nabla_1\Delta_2\nabla_2 - (\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1) e^{-2k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} 2kh_1 \operatorname{sh} 2kh_2}$$

$$\Delta_k = \mu_k \operatorname{sh} kh_k + \operatorname{ch} kh_k$$

$$k = 1,\ 2 \qquad (3.5)$$

$$\nabla_k = \mu_k \operatorname{ch} kh_k + \operatorname{sh} kh_k$$

Подставляя выражения для w_k из (2.5), P из (2.11) и $\varphi_k^{(l)}$ из (3.4) в уравнение (1.3), получим следующие характеристические уравнения:

$$\left[\Omega_{0k}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon_k\Omega - \frac{\rho_0 (ka_0M_1)^2}{2\rho_k h_k\nu}\begin{Bmatrix}\operatorname{cth} 2\nu a\\ \operatorname{ctg} 2\nu a\end{Bmatrix} - B_0^2(R_{1k} + R_{2k})\right] w_k^0 +$$

$$+\left[\frac{\rho_0 (ka_0M_1)^2}{2\rho_k h_k\nu}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\nu a}\\ \dfrac{1}{\sin 2\nu a}\end{Bmatrix} + B_0^2 R_{3k}\right] w_r^0 = 0, \qquad \begin{Bmatrix}M_1^2 < 1\\ M_1^2 > 1\end{Bmatrix} \qquad (3.6)$$

где

$$R_{1k} = \frac{k\chi_k^2 \operatorname{sh} kh_k}{\rho_k h_k \mu_0 \mu_k \Delta_k}, \qquad \Omega_{0k}^2 = \frac{D_k k^4}{2\rho_k h_k}$$

$$R_{2k} = \frac{4k\chi_k^2 \nabla_r (\mu_r^2 - 1)\, e^{-2k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh}^2 kh_k \operatorname{sh} 2kh_r}{\rho_k h_k \mu_0 \Delta_k \left[4\Delta_1\nabla_1\Delta_2\nabla_2 - (\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)\, e^{-2k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} 2kh_1 \operatorname{sh} 2kh_2\right]}$$

$$(3.7)$$

$$R_{3k} = \frac{4k\chi_1\chi_2\nabla_1\nabla_2\, e^{-k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2}{\rho_k h_k \mu_0 \left[4\Delta_1\nabla_1\Delta_2\nabla_2 - (\mu_1^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)\, e^{-2k(2a-h_1-h_2)} \operatorname{sh} 2kh_1 \operatorname{sh} 2kh_2\right]}$$

$$r = 2/k, \qquad k = 1,\ 2$$

Для существования отличных от нуля возмущений необходимо, чтобы определитель системы (3.6) равнялся нулю, который в раскрытом виде имеет вид

$$\left[\Omega_{01}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon_1\Omega - \rho_0\frac{(ka_0M_1)^2}{2\rho_1 h_1\nu}\begin{Bmatrix}\operatorname{cth} 2\nu a\\ \operatorname{ctg} 2\nu a\end{Bmatrix} - B_0^2(R_{11} + R_{21})\right]\left[\Omega_{02}^2 - \right.$$

$$\left. - \Omega^2 + i\varepsilon_2\Omega - \frac{\rho_0 (ka_0M_1)^2}{2\rho_2 h_2\nu}\begin{Bmatrix}\operatorname{cth} 2\nu a\\ \operatorname{ctg} 2\nu a\end{Bmatrix} - B_0^2(R_{12} + R_{22})\right] - \qquad (3.8)$$

$$-\left[\frac{\rho_0 (ka_0M_1)^2}{2\rho_1 h_1\nu}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\nu a}\\ \dfrac{1}{\sin 2\nu a}\end{Bmatrix} + B_0^2 R_{31}\right]\left[\frac{\rho_0 (ka_0M_1)^2}{2\rho_2 h_2\nu}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} 2\nu a}\\ \dfrac{1}{\sin 2\nu a}\end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + B_0^2 R_{32}\right] = 0, \qquad \begin{Bmatrix}M_1^2 < 1\\ M_1^2 > 1\end{Bmatrix}$$

Для любых заданных значений параметров, входящих в уравнение (3.8), можно определить частоту Ω. Если ее мнимая часть положительна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие же частот с отрицательной мнимой частью означает неустойчивость. Исследование уравнения (3.8) в общем случае не представляется возможным, поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

4. Принимается, что пластины находятся в вакууме ($\rho_0 = 0$). Размеры, физические и механические характеристики пластин предполагаются одинаковыми

$$\Omega_{01} = \Omega_{02} = \Omega_0, \; h_1 = h_2 = h, \; \rho_1 = \rho_2 = \rho, \tag{4.1}$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Влияние демпфирования не учитывается ($\varepsilon = 0$). При этих предположениях уравнение (3.8) упрощается и принимает вид

$$[\Omega_0^2 - \Omega^2 - B_0^2 (R_1 + R_2)]^2 - (B_0^2 R_3)^2 = 0 \tag{4.2}$$

где

$$R_1 = \frac{k\chi^2 \operatorname{sh} kh}{\rho h \mu_0 \mu \Delta}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}$$

$$R_2 = \frac{4k\chi^2 \nabla (\mu^2 - 1) e^{-4k(a-h)} \operatorname{sh}^2 kh \operatorname{sh} 2kh}{\rho h \mu_0 \Delta [4\Delta^2 \nabla^2 - (\mu^2 - 1)^2 e^{-4k(a-h)} \operatorname{sh}^2 2kh]} \tag{4.3}$$

$$R_3 = \frac{4k\chi^2 \nabla^2 e^{-2k(a-h)} \operatorname{sh}^2 kh}{\rho h \mu_0 [4\Delta^2 \nabla^2 - (\mu^2 - 1)^2 e^{-4k(a-h)} \operatorname{sh}^2 2kh]}$$

Из уравнения (4.2) для статического критического значения магнитного поля, при котором возможна нетривиальная деформированная форма равновесия, получим

$$B_*^2 = \Omega_0^2 / (R_1 + R_2 + R_3) \tag{4.4}$$

R_2, R_3 и, следовательно, критическое значение магнитного поля (B_*) существенным образом зависят от расстояния между пластинами (a). При неограниченном удалении одной пластины от другой ($a \to \infty$), $R_2 \to 0$, $R_3 \to 0$ и для B_*^2 получается следующее соотношение:

$$B_{*0}^2 = \Omega_0^2 / R_1 = \frac{\rho h \mu_0 \mu \Delta}{k\chi^2 \operatorname{sh} kh} \Omega_0^2 \tag{4.5}$$

которое совпадает с соответствующим значением из [3], полученным для одной пластины.

Когда пластины приближаются друг к другу ($a \to h$) B_*^2 монотонно убывает до некоторого определенного значения магнитного поля

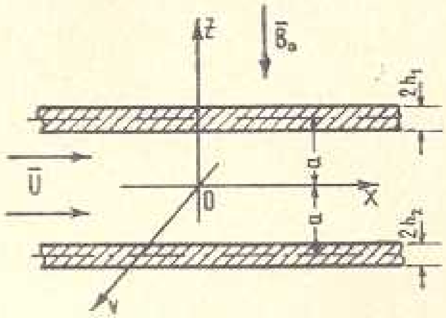
$$B_{**}^2 = B_{*0}^2 [(\mu^2 + 1) \operatorname{sh} 4kh + 2\mu \operatorname{ch} 4kh] \{(\mu^2 + 1) \operatorname{sh} 4kh + 2\mu \operatorname{ch} 4kh +$$
$$+ \operatorname{sh} kh (\mu \operatorname{ch} kh + \operatorname{sh} kh) [(3\mu^2 - 1) \operatorname{sh} 2kh + 2\mu \operatorname{ch} 2kh]\}^{-1} \tag{4.6}$$

Если принять $kh \ll 1$ и $\mu \gg 1$, то из (4.6) получается

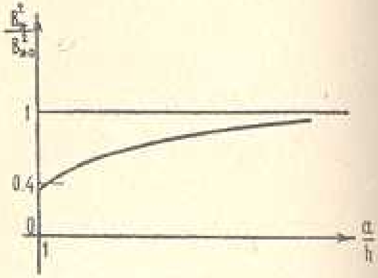
$$B_{**}^2 = B_{*0}^2 \frac{1 + 2\mu kh}{1 + 3\mu kh + 3(\mu kh)^2} \tag{4.7}$$

Из формул (4.6) и (4.7) видно, что критическое значение магнитного поля в случае, когда две пластины в пределе соприкасаются друг с другом, меньше критического значения для одной пластины с толщиной $2h$.

График зависимости B_*^2 от расстояния между пластинами по формуле (4.4) приведен на фиг. 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Если считать одну из пластин жесткой ($\Omega_{02}^2 \to \infty$), от из уравнения (3.8) для критического значения магнитного поля получим

$$B_{*1}^2 = \Omega_{01}^2 / (R_{11} + R_{21}) \tag{4.8}$$

что меньше соответствующего значения магнитного поля, полученного для одной пластины, но больше критического значения для случая двух упругих пластин.

5. Вместе с условиями (4.1) предположим, что между пластинами имеется параллельное течение непроводящего газа с невозмущенной скоростью U.

Кроме того, рассмотрим случаи

$$k_y = 0,\ M_1^2 < 1 \quad \nu a >> 1$$
$$k_y = 0,\ M_1^2 < 1 \quad \nu a << 1 \tag{5.1}$$

После этих предположений уравнение (3.8) существенным образом упрощается и принимает следующий вид:

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\varepsilon\Omega - \frac{\rho_0 k a_0^2}{2\rho h}\frac{M_1^2}{\sqrt{1-M_1^2}} - B_0^2(R_1 + R_2 + R_3) = 0 \qquad \nu a \gg 1$$

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 + i\varepsilon\Omega - \frac{\rho_0 a_0^2}{2\rho h a}\frac{M_1^2}{1-M_1^2} - B_0^2(R_1 + R_2 + R_3) = 0 \qquad \nu a << 1 \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) представляют собой алгебраические уравнения относительно Ω с комплексными коэффициентами. Условия отсутствия у этих уравнений корней с отрицательным мнимыми частями могут быть представлены в форме, аналогичной общеизвестным критериям Рауса-Гурвица [4]. Из этих условий получим следующие оценки для критической скорости и критического значения магнитного поля

$$M^2 \leqslant M_0^2(1 - B_0^2 / B_*^2)$$
$$\nu a >> 1 \tag{5.3}$$
$$B_0^2 \leqslant B_*^2 - \left| \left(\frac{\rho_0 a_0}{2\rho h} \right)^2 - \varepsilon^2 \right| \Big/ (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$M^2 \leqslant \frac{akM_0^2(1 - B_0^2 / B_*^2)}{1 + akM_0^2(1 - B_0^2 / B_*^2)}$$
$$\nu a << 1 \tag{5.4}$$
$$B_0^2 \leqslant B_*^2$$

Здесь $M_0^2 = 2\rho h \Omega_0^2 / (\rho_0 k a_0^2)$ — критическая скорость при отсутствии магнитного поля ($B_0 = 0$).

Формулы (5.3) и (5.4) показывают, что с увеличением напряженности магнитного поля уменьшается критическая скорость флаттера. Одновременно из (5.4) видно, что критическая скорость существенным образом зависит от расстояния между пластинами (a) и при уменьшении его критическая скорость тоже уменьшается. А формула (5.5) показывает, что так же уменьшается статическое критическое значение магнитного поля.

Если считать одну из пластин абсолютно жесткой ($\Omega_{02}^2 \to \infty$), то из (3.8) получим

$$\Omega_{01}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon\Omega - \rho_0 \frac{(a_0 k M_1)^2}{2\rho_1 h_1 \nu} \operatorname{cth} 2\nu a - B_0^2 (R_{11} + R_{12}) = 0$$
$$M_1^2 < 1 \tag{5.5}$$

Здесь, кроме условия ($E_2 \to \infty$), на геометрические и механические характеристики пластин никаких других ограничений не делается. После подобных преобразований, как и выше, получим

$$M^2 < M_0^2(1 - B_0^2 / B_{*1}^2) \qquad \nu a >> 1$$
$$\tag{5.6}$$
$$M^2 \leqslant akM_0^2(1 - B_0^2 / B_{*1}^2) \qquad \nu a << 1$$

где

$$B_{*1}^2 = \Omega_{01}^2 / (R_{11} + R_{21})$$

то есть параллельно расположенная относительно упругой пластины жесткая стена увеличивает как статико-критическое значение магнитного поля, так и критическую скорость флаттера.

6. Рассмотрим случай внешнего обтекания пластин потоком сверхзвукового непроводящего газа. Задача решается таким же образом, как и выше, за исключением того, что аэродинамическое давление согласно „закону плоских сечений" определяется по формуле [4]

$$P_k = 2\rho_k h_k \varepsilon_k \frac{\partial w_k}{\partial t} + \frac{p_0 \varkappa}{a_0}\left(\frac{\partial w_k}{\partial t} + U\frac{\partial w_k}{\partial x}\right)$$

$$k=1, \qquad z \geqslant a + h_1$$

$$k=2, \qquad z \leqslant -a - h_2 \tag{6.1}$$

Подставляя выражения для w_k из (2.5), P_k из (6.1) и φ_k из (3.4) в (1.3), получим следующие уравнения, определяющие w_1^0 и w_2^0.

$$\left[\Omega_{01}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon_1\Omega + i\frac{p_0\varkappa}{2\rho_1 h_1 a_0}\left(\Omega - k_x U\right) - B_0^2\left(R_{11} + R_{21}\right)\right] w_1^0 + $$
$$+ B_0^2 R_{31} w_2^0 = 0 \tag{6.2}$$
$$B_0^2 R_{32} w_1^0 + \left[\Omega_{02}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon_2\Omega + i\frac{p_0\varkappa}{2\rho_2 h_2 a_0}\left(\Omega - k_x U\right) - \right.$$
$$\left. - B_0^2\left(R_{12} + R_{22}\right)\right] w_2^0 = 0$$

Для отличных от нуля возмущений из (6.2) имеем

$$\left[\Omega_{01}^2 - \Omega^2 + i\varepsilon_1\Omega + i\frac{p_0\varkappa}{2\rho_1 h_1 a_0}\left(\Omega - k_x U\right) - B_0^2\left(R_{11} + R_{21}\right)\right]\left[\Omega_{02}^2 - \Omega^2 + \right.$$
$$\left. + i\varepsilon_2\Omega + i\frac{p_0\varkappa}{2\rho_2 h_2 a_0}\left(\Omega - k_x U\right) - B_0^2\left(R_{12} + R_{22}\right)\right] - B_0^4 R_{31} R_{32} = 0 \tag{6.3}$$

Если одну из пластин удалить ($a \to \infty$), то взаимное влияние между пластинами исчезает и в итоге для U и Ω получаем те же результаты, что и в работе [3].

Как и для уравнения (3.8), решение уравнения (6.3) относительно Ω связано с громоздкими вычислениями, поэтому рассмотрим некоторые характерные частные случаи:

а) если принять механические, физические и геометрические характеристики одинаковыми, то для скорости флаттера и напряженности магнитного поля получаются следующие выражения:

$$M^2 \leqslant M_0^2\left(1 - B_0^2 / B_*^2\right) \tag{6.4}$$

$$B_0^2 \leqslant \Omega_0^2 / \left(R_1 + R_2 + R_3\right) \tag{6.5}$$

где $M_0 = \dfrac{\lambda_x}{\pi a_0}\left(1 + \varepsilon\dfrac{2\rho h a_0}{p_0\varkappa k_x}\right)\Omega_0$ — критическая скорость флаттера при отсутствии магнитного поля, $B_*^2 = \Omega_0^2 / (R_1 + R_2 + R_3)$—критическое значение напряженности магнитного поля;

б) если считать одну из пластин абсолютно жесткой, то для скорости флаттера получим

$$M^2 \leqslant M_0^2\left(1 - B_0^2 / B_{*1}^2\right)$$

где

$$B_{*1}^2 = \Omega_{01}^2 / \left(R_{11} + R_{21}\right)$$

Как для внутреннего обтекания, так и для внешнего параллельно расположенная абсолютно жесткая стенка увеличивает критические значения скорости, а также и напряженность магнитного поля.

В заключение данного пункта отметим, что связь между двумя пластинами осуществляется только через члены R_{2k} и R_{3k}.

Отметим также, что как для внутреннего, так и для внешнего обтекания наличие поперечного магнитного поля уменьшает критическую скорость флаттера. Взаимное влияние двух параллельно расположенных пластин также ведет к уменьшению критической скорости.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15 XII 1972

Հ. Գ. ԱՎԱՆԵՍՅԱՆ

ԳԱԶԻ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ՇՐՋՀՈՍՎՈՂ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՖԵՐՈՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում է համասեռ ընդլայնական մագնիսական դաշտում գտնվող զուգահեռ ֆերոմագնիսական սալերի կայունությունը անհաղորդիչ գազի հոսանքով շրջհոսվելիս։ Որոշված են կրիտիկական արագության արժեքները արտաքին և ներքին շրջհոսման դեպքերում, որոնք կախված են ինչպես արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածությունից, այնպես էլ սալերի փոխազդեցությունից։

Պարզվում է, որ ինչպես արտաքին, այնպես էլ ներքին շրջհոսումների ժամանակ, ընդլայնական մագնիսական դաշտի առկայությունը փոքրացնում է կրիտիկական արագությունը։ Իսկ սալերի միջև եղած հեռավորության մեծացումը բերում է կրիտիկական արագության մեծացմանը։

ON STABILITY OF FERROMAGNETIC PARALLEL PLATES IN A GAS FLOW

H. G. AVANESIAN

Summary

The stability of a parallel ferromagnetic plates in a nonconducting gas flow in a transversal magnetic field is considered.

The values of critical velocity depending on an external magnetic field and a reciprocal influence of the plates in the cases of external and internal flow are determined.

The presence of a transverse magnetic field decreases critical velocity for both internal and external flow while a longer distance between the plates increases critical velocity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мун, Пао И-синь. Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки. Прикл. механ., т. 35, № 1, 1968, изд-во „Мир".
2. Мун, Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластинки в поперечном магнитном поле. Приклад. механ., т. 36, № 1, 1969, изд-во „Мир".
3. *Багдасарян Г. Е.*, Белубекян *М. В.* Устойчивость ферромагнитной пластинки в потоке газа при наличии магнитного поля. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, № 3, 1972.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.