ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 4, 1973 Механика

Г. С. ВАРДАНЯН, В. Д. ШЕРЕМЕТ

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Введение

1. В теории ползучести для сред с неинвариантными свойствами во времени Н. Х. Арутюняном [3, 4] доказаны теоремы, устанавливающие связь между напряженно-деформированным состоянием упруго-ползучего тела и упруго-мгновенной задачей для этого же тела.

Согласно этим теоремам, для пространственной задачи линейной теории ползучести, когда коэффициенты упругой поперечной деформации $\nu(\tau)$ и поперечной деформации ползучести $\overline{\nu}(t, \tau)$ постоянны и одинаковы,

$$\nu(\tau) = \overline{\nu}(t, \tau) = \nu = \text{const} \tag{1.1}$$

напряженное состояние в теле вызвано внешними силами, справедливы следующие зависимости*:

$$\overline{\sigma}_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t), \quad \overline{\varepsilon}_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_{ij}(\tau) L(t, \tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем $\overline{\sigma}_{ij}(t)$, $\overline{\varepsilon}_{ij}(t)$ и $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$—соответственно напряжения и деформации с учетом ползучести и их упруго-мгновенные значения.

Если же напряженное состояние в теле вызвано вынужденными деформациями (температурные, влажностные и др. воздействия) и выполняется условие (1.1), а граница тела свободна от закреплений

$$\overline{\sigma}_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_{ij}(\tau) \frac{E(t)}{E(\tau)} R(t, \tau)\, d\tau, \quad \overline{\varepsilon}_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) \tag{1.3}$$

где $E(t)$—модуль упруго-мгновенной деформации, $L(t, \tau)$ и $R(t, \tau)$—ядра ползучести и релаксации, связанные соотношением [1]

$$L(t, \tau) - R(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} L(t, \xi) R(\xi, \tau)\, d\xi \tag{1.4}$$

* Когда напряжения в теле постоянны или являются линейными функциями от координат, то зависимости (1.2) справедливы независимо от выполнения условия (1.1).

Установленные Н. Х. Арутюняном зависимости (1.3) при выполнении гипотезы (1.1) были распространены С. В. Александровским [1] на случай, когда на всей границе тела или ее части имеются жесткие связи.

Указанные теоремы позволяют заменить задачу отыскания напряжений (деформаций) в упруго-ползучем теле соответствующей упруго-мгновенной задачей того же тела. При этом для определения упругих напряжений могут применяться экспериментальные методы, в особенности поляризационно-оптический метод, как наиболее перспективный метод моделирования.

Результаты экспериментальных исследований поперечных деформаций различных материалов противоречивы [1]. Однако на основании этих исследований можно заключить, что условие (1.1) для многих материалов не выполняется. В связи с этим важно оценить роль гипотезы (1.1) в этих теоремах.

При несоблюдении гипотезы (1.1) И. Е. Прокоповичем [8, 9] было исследовано плоское напряженное состояние.

Все эти исследования относятся к односвязным телам. Некоторые высказывания в случае многосвязных тел в предположительной форме содержатся в работе [10].

2. При моделировании плоской задачи поляризационно-оптическим методом важно знать влияние физико-механических характеристик материала на напряженное состояние в теле, обладающем ползучестью.

Согласно теореме М. Леви-Митчелла [7] в первой основной задаче плоской теории упругости напряжения в односвязном теле не зависят от упругих констант материала. В случае многосвязного тела напряжения не зависят от констант материала, если равнодействующая сил на каждом контуре равна нулю или приводится к паре. В работе [5] теорема М. Леви-Митчелла распространяется на случай пластичности и ползучести, при этом связь между деформациями и напряжениями записывается в виде

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(t)=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\bar{\sigma}_{ij}(t)-\delta_{ij}\nu\bar{S}(t)\right]+f_{ij}(t) \quad (i,\ j=x,\ y) \qquad (1.5)$$

Здесь модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν рассматриваются постоянными, $f_{ij}(t)=f_{ji}(t)$ — функции, учитывающие деформации пластичности или ползучести, которые могут зависеть как от времени, так и от истории нагружения.

При доказательстве принято, что в функции $f_{ij}(t)$ коэффициент Пуассона либо равен 0.5 или нулю, либо не входит вообще. Таким образом, это доказательство справедливо только при весьма жестких ограничениях.

В случае плоской задачи термоупругости в односвязных и многосвязных телах, когда граница тела свободна от нагрузок и закреплений, напряжения пропорциональны $E\alpha$ для плоского напряженного состояния и $E\alpha/(1-\nu)$ для плоской деформации, то есть относительное распределение термоупругих напряжений не зависит от констант материала E, α и ν [6].

В работе [11] показано, что теорема М. Леви-Митчелла и теорема, доказанная в [6], распространяются на тела, описываемые линейной теорией ползучести Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна, при выполнении условий (1.1).

В настоящей работе теоремы Н. Х. Арутюняна, М. Леви-Митчелла и теорема, доказанная в работе [6] для термоупругих напряжений, распространяются на случай плоской задачи линейной теории ползучести при невыполнении гипотезы (1.1).

§ 2. Обобщение теоремы Н. Х. Арутюняна в плоской задаче теории ползучести

Как известно [3], для упруго-ползучей среды сохраняются обычные уравнения равновесия, граничные условия и уравнения неразрывности деформаций, а физические уравнения имеют вид

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(t) = \varepsilon^0_{ij}(t) + \frac{2-\delta_{ij}}{E(t)}\{[1+\nu(t)]\,\bar{\sigma}_{ij}(t) - \delta_{ij}\nu(t)\,\bar{S}(t)\} - \tag{2.1}$$

$$-(2-\delta_{ij})\int\limits_{\tau_1}^{t}\left\{\bar{\sigma}_{ij}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)] - \delta_{ij}\,\bar{S}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\right\}d\tau$$

Здесь $\varepsilon^0_{ij}(t)$—компоненты вынужденной деформации, δ_{ij}—символ Кронекера, а

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau), \quad \delta_1(t,\tau) = \frac{\nu(\tau)}{E(\tau)} + \bar{\nu}(t,\tau)C(t,\tau) \tag{2.2}$$

соответственно удельные относительные продольные и поперечные деформации с учетом ползучести; $C(t,\tau)$—удельная продольная деформация ползучести.

В случае плоской деформации в (2.1) следует принять

$$\bar{\sigma}_{xz}(t) = \bar{\sigma}_{yz}(t) = \bar{\varepsilon}_{xz}(t) = \bar{\varepsilon}_{yz}(t) = \bar{\varepsilon}_{zz}(t) = 0$$
$$\bar{S}(t) = \bar{\sigma}_{xx}(t) + \bar{\sigma}_{yy}(t) + \bar{\sigma}_{zz}(t) \tag{2.3}$$

Условие $\bar{\varepsilon}_{zz}(t) = 0$ приводит к линейному интегральному уравнению Вольтерра относительно $\bar{\sigma}_{zz}(t)$. Решая это уравнение, получим

$$\bar{\sigma}_{zz}(t) = \nu(t)[\bar{\sigma}_{xx}(t) + \bar{\sigma}_{yy}(t)] + \tag{2.4}$$

$$+E(t)\int\limits_{\tau_1}^{t}[\bar{\sigma}_{xx}(\tau) + \sigma_{yy}(\tau)]K(t,\tau)\,d\tau - E(t)\left[\varepsilon^0_{zz}(t) - \int\limits_{\tau_1}^{t}\varepsilon^0_{zz}(\tau)R(t,\tau)\,d\tau\right]$$

где

$$K(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} R(t, \eta) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(\eta, \tau)\, d\eta - \frac{\nu(\tau)}{E(\tau)} R(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) \quad (2.5)$$

Подставив $\overline{\sigma}_{zz}(t)$ в выражения (2.1) с учетом (2.3), получим для плоской деформации следующие окончательные физические уравнения:

$$\begin{gathered} \overline{\varepsilon}_{xx}(t) + \varepsilon^0_{xx}(t) + \nu(t)\,\varepsilon^0_{zz}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon^0_{zz}(\tau) M(t, \tau)\, d\tau + \\ + \frac{1-\nu^2(t)}{E(t)} \left[\overline{\sigma}_{xx}(t) - \frac{\nu(t)}{1-\nu(t)} \overline{\sigma}_{yy}(t) \right] + \qquad (2.6) \\ + \int_{\tau_1}^{t} [\overline{\sigma}_{xx}(\tau) M_1(t, \tau) + \overline{\sigma}_{yy}(\tau) M_2(t, \tau)\, d\tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x, y) \end{gathered}$$

$$\varepsilon_{xy}(t) = \varepsilon^0_{xy}(t) + 2\left\{ \frac{1+\nu(t)}{E(t)} \overline{\sigma}_{xy}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \overline{\sigma}_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)]\, d\tau \right\}$$

Здесь

$$M(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} E(\eta) R(\eta, \tau) \frac{\partial}{\partial \eta} \delta_1(t, \eta)\, d\eta - \nu(t) R(t, \tau) - E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) \quad (2.7)$$

$$\begin{gathered} M_1(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} E(\xi) K(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \delta_1(t, \xi)\, d\xi - \nu(t) K(t, \tau) + \qquad (2.8) \\ + \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta_1(t, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) \end{gathered}$$

$$M_2(t, \tau) = M_1(t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} [\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)] \quad (2.9)$$

Подставив (2.6) в уравнение неразрывности деформаций и исключив напряжения $\overline{\sigma}_{xy}(t)$ при помощи уравнений равновесия, после введения функции напряжений по формулам

$$\overline{\sigma}_{xx}(t) = \frac{\partial^2 \overline{\Phi}(t)}{\partial y^2}, \quad \overline{\sigma}_{yy}(t) = \frac{\partial^2 \overline{\Phi}(t)}{\partial x^2}, \quad \overline{\sigma}_{xy}(t) = -\frac{\partial^2 \overline{\Phi}(t)}{\partial x \partial y} \quad (2.10)$$

получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\nabla^4 \left[\overline{\Phi}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \overline{\Phi}(\tau) \frac{E(t)}{1-\nu^2(t)} M_1(t, \tau) d\tau \right] =$$

$$
= -\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}\left\{\nu(t)\,\nabla^2\varepsilon^0_{zz}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\nabla^2\varepsilon^0_{zz}(\tau)\,M(t,\tau)\,d\tau + \right. \tag{2.11}
$$

$$
+\frac{\partial^2\varepsilon^0_{xx}(t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon^0_{yy}(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varepsilon^0_{xy}(t)}{\partial x\,\partial y} + \frac{1+\nu(t)}{E(t)}\left[\frac{\partial X(t)}{\partial x} + \frac{\partial Y(t)}{\partial y}\right] -
$$

$$
\left. - \int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\partial X(\tau)}{\partial x} + \frac{\partial Y(\tau)}{\partial y}\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\delta(t,\tau) + \delta_1(t,\tau)\right]d\tau\right\}
$$

Здесь $X(t)$, $Y(t)$—проекции объемной силы на координатные оси x, y.

Рассмотрим многосвязное тело, поперечное сечение которого ограничено несколькими замкнутыми контурами, из которых наружный контур Γ_0 охватывает все остальные контуры Γ_k $(k=1, 2, \cdots, N)$.

I. *Плоская деформация.*

а) Пусть напряженно-деформированное состояние в этом теле вызвано действием поверхностных сил $f_x(x, y, t)$, $f_y(x, y, t)$. Тогда уравнение (2.11) примет вид

$$
\nabla^4\left[\overline{\Phi}(t) + \int_{\tau_1}^{t}\overline{\Phi}(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M_1(t,\tau)\,d\tau\right] = 0 \tag{2.12}
$$

Это уравнение относительно $\nabla^4\overline{\Phi}(t)$ является однородным линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода и имеет только нулевое решение

$$
\nabla^4\overline{\Phi}(t) = 0 \tag{2.13}
$$

Граничные условия для функции $\overline{\Phi}(t)$ на внешнем Γ_0 и внутренних контурах Γ_k имеют вид

$$
\overline{\Phi}(t) = \int_0^s\left[xf_y(t) - yf_x(t)\right]ds - x\int_0^s f_y(t)\,ds +
$$

$$
+ y\int_0^s f_x(t)\,ds + xl_k(t) + y\beta_k(t) + \gamma_k(t) \tag{2.14}
$$

$$
\frac{\partial\overline{\Phi}(t)}{\partial n} = \frac{dx}{dn}\left[-\int_0^s f_y(t)\,ds + l_k(t)\right] +
$$

$$
+\frac{dy}{dn}\left[\int_0^s f_x(t)\,ds + \beta_k(t)\right]
$$

$$
(k = 0, 1, 2, \cdots, N)
$$

Здесь $l_k(t)$, $\beta_k(t)$, $\gamma_k(t)$—произвольные функции от времени, которые для внешнего контура Γ_0 можно принять равными нулю.

В случае многосвязного тела угол поворота $\overline{\omega}_z(t)$, перемещения $\overline{u}(t)$ и $\overline{v}(t)$ могут быть неоднозначными, поэтому необходимо составить три условия однозначности этих величин:

$$\oint_{\Gamma_k} d\overline{\omega}_z(t)=0, \quad \oint_{\Gamma_k} d\overline{u}(t)=0, \quad \oint_{\Gamma_k} d\overline{v}(t)=0 \tag{2.15}$$

показывающие, что если в теле отсутствуют дислокации, то их приращения равны нулю для любого момента времени t при обходе каждого из внутренних замкнутых контуров Γ_k.

Если выразить условия (2.15) через функцию $\overline{\Phi}(t)$, с учетом геометрических соотношений Коши и условий (2.10), (2.14) и (2.6), при отсутствии вынужденных деформаций, получим окончательные условия однозначности в виде

$$\overline{\varphi}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\overline{\varphi}(\tau)\,M_1(t,\tau)\,d\tau=0 \tag{2.16}$$

$$\overline{F}_u(t)-\frac{1}{1-\nu(t)}\,P_u^{(k)}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\Big\{\overline{F}_u(\tau)\,M_1(t,\tau)+$$

$$+P_u^{(k)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)\right]\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}\Big\}d\tau=0$$

$$\overline{F}_v(t)-\frac{1}{1-\nu(t)}\,P_v^{(k)}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\Big\{\overline{F}_v(\tau)\,M_1(t,\tau)+$$

$$+P_v^{(k)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\delta(t,\tau)+\delta_1(t,\tau)\right]\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}\Big\}d\tau=0$$

где

$$\overline{\varphi}(t)=\oint_{\Gamma_k}\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2\,\overline{\Phi}(t)\,ds \tag{2.17}$$

$$\overline{F}_u(t)=\oint_{\Gamma_k}\left[x\frac{\partial}{\partial s}-y\frac{\partial}{\partial n}\right]\nabla^2\overline{\Phi}(t)\,ds$$

$$\overline{F}_v(t)=\oint_{\Gamma_k}\left[y\frac{\partial}{\partial s}+x\frac{\partial}{\partial n}\right]\nabla^2\overline{\Phi}(t)\,ds$$

$$P_u^{(k)}(t)=\oint_{\Gamma_k}\frac{\partial}{\partial x}\left[yf_x^{(k)}(t)-xf_y^{(k)}\right]ds+\oint_{\Gamma_k}f_y^{(k)}(t)\,ds \tag{2.18}$$

$$P_v^{(k)}(t) = \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{\partial}{\partial y} [x f_y^{(k)}(t) - y f_x^{(k)}(t)]\, ds - \oint\limits_{\Gamma_k} f_x^{(k)}(t)\, ds \tag{2.18}$$

Условия однозначности угла поворота $\omega_z(t)$ и перемещений $u(t)$ и $v(t)$ для упруго-мгновенной задачи получим из (2.16) при $\tau_1 = t$.

$$\psi(t) = 0, \quad F_u(t) - \frac{1}{1-\nu(t)} P_u^{(k)}(t) = 0, \quad F_v(t) - \frac{1}{1-\nu(t)} P_v^{(k)}(t) = 0 \tag{2.19}$$

где $\psi(t)$, $F_u(t)$ и $F_v(t)$ определяются по (2.17) заменой функции $\overline{\Phi}(t)$ на $\Phi(t)$.

Итак, уравнение совместности (2.13) и граничные условия (2.14) задачи ползучести совпадают с соответствующими уравнениями упруго-мгновенной задачи. Условия однозначности для углов поворота совпадают, так как первое из условий (2.16) представляет собой однородное линейное интегральное уравнение Вольтерра. Совпадение условий однозначности перемещений возможно в том случае, если второе и третье из условий (2.16) будут однородными линейными интегральными уравнениями Вольтерра. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$P_u^{(k)}(t) = P_v^{(k)}(t) = 0 \tag{2.20}$$

Из выражений (2.18) видно, что равенства (2.20) имеют место, если выполняется одно из следующих условий:

1) на внутренних контурах Γ_k не приложены силы;

2) системы сил, приложенных на каждом из внутренних контуров, приводятся к паре;

3) результирующие указанных систем сил равны нулю на каждом внутреннем контуре.

Условия 1), 2) и 3) совпадают с условиями Митчелла [7], полученными при рассмотрении вопроса о влиянии коэффициента Пуассона на напряжения в изотропном линейно-упругом многосвязном теле.

Так как уравнения задачи с учетом ползучести (2.13), (2.14) и (2.16) совпадают с соответствующими уравнениями упруго-мгновенной задачи, то отсюда следует, что для одно- и многосвязных тел при выполнении условий Митчелла имеем

$$\overline{\Phi}(t) = \Phi(t) \tag{2.21}$$

На основании (2.21) с учетом (2.10) и (2.4) получим связь между напряжениями с учетом ползучести и упруго-мгновенными напряжениями

$$\overline{\sigma}_{xx}(t) = \sigma_{xx}(t), \quad \overline{\sigma}_{yy}(t) = \sigma_{yy}(t), \quad \overline{\sigma}_{xy}(t) = \sigma_{xy}(t) \tag{2.22}$$

$$\overline{\sigma}_{zz}(t)=\sigma_{zz}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{zz}(\tau)\frac{E(t)}{\nu(\tau)}K(t,\tau)\,d\tau \tag{2.23}$$

Подставив (2.22) в (2.6) (при отсутствии вынужденных деформаций) с учетом обобщенного закона Гука, получим связь между деформациями

$$\overline{\varepsilon}_{xx}(t)=\varepsilon_{xx}(t)+\int_{\tau_1}^{t}[\varepsilon_{xx}(\tau)L_1(t,\tau)+\varepsilon_{yy}(\tau)L_2(t,\tau)]d\tau \tag{2.24}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad (x,\ y)$$

$$\overline{\varepsilon}_{xy}(t)=\varepsilon_{xy}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_{xy}(\tau)[L_1(t,\tau)-L_2(t,\tau)]\,d\tau \tag{2.25}$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1(t,\tau)&=\frac{E(\tau)}{1+\nu(\tau)}\left[\frac{1-\nu(\tau)}{1-2\nu(\tau)}M_1(t,\tau)+\frac{\nu(\tau)}{1-2\nu(\tau)}M_2(t,\tau)\right]\\ L_2(t,\tau)&=\frac{E(\tau)}{1+\nu(\tau)}\left[\frac{\nu(\tau)}{1-2\nu(\tau)}M_1(t,\tau)+\frac{1-\nu(\tau)}{1-2\nu(\tau)}M_2(t,\tau)\right]\end{aligned} \tag{2.26}$$

б) *Допустим*, что напряженно-деформированное состояние в упруго-ползучем теле вызвано действием вынужденных деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{0}(t)=\delta_{ij}\alpha T(x,y,t) \tag{2.27}$$

В этом случае уравнение (2.11) принимает вид

$$\nabla^4\left[\overline{\Phi}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\overline{\Phi}(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M_1(t,\tau)d\tau\right]= \tag{2.28}$$

$$=-\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}\nabla^2\left[(1+\nu(t)\alpha T(t)+\int_{\tau_1}^{t}\alpha T(\tau)M(t,\tau)d\tau\right]$$

Соответствующее уравнение упруго-мгновенной задачи будет

$$\nabla^4\Phi(t)=-\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\nabla^2\alpha T(t) \tag{2.29}$$

Граничные условия обеих задач записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\overline{\Phi}(t)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\overline{\Phi}(t)}{\partial x}\right)=0 \tag{2.30}$$

Условия (2.15) с помощью соотношений Коши и уравнений (2.6), (2.10) и (2.28) можно выразить через функцию напряжений $\overline{\Phi}(t)$

$$\bar{\varphi}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\bar{\varphi}(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M_1(t,\tau)d\tau+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\gamma_t^0(t)+$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\gamma_t^0(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M(t,\tau)\,d\tau=0$$

$$\bar{F}_u(t)+\int_{\tau_1}^{t}\bar{F}_u(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M_1(t,\tau)\,d\tau+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\lambda_u^0(t)+$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\lambda_u^0(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M(t,\tau)\,d\tau=0 \qquad (2.31)$$

$$\bar{F}_v(t)+\int_{\tau_1}^{t}\bar{F}_v(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M_1(t,\tau)\,d\tau+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\lambda_v^0(t)+$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\lambda_v^0(\tau)\frac{E(t)}{1-\nu^2(t)}M(t,\tau)\,d\tau=0$$

Здесь

$$\gamma_t^0(t)=\oint_{\Gamma_k}\frac{\partial}{\partial n}\alpha T(t)\,ds \qquad (2.32)$$

$$\lambda_u^0(t)=\oint_{\Gamma_k}\left[x\frac{\partial}{\partial s}-y\frac{\partial}{\partial n}\right]\alpha T(t)\,ds$$

$$\lambda_v^0(t)=\oint_{\Gamma_k}\left[y\frac{\partial}{\partial s}+x\frac{\partial}{\partial n}\right]\alpha T(t)\,ds$$

Ядра $M(t,\tau)$ и $M_1(t,\tau)$ определяются выражениями (2.7) и (2.8). Условия однозначности для соответствующей упруго-мгновенной задачи получаются из (2.31) при $\tau_1=t$.

$$\varphi(t)+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\gamma_t^0(t)=0$$

$$F_u(t)+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\lambda_u^0(t)=0,\quad F_v(t)+\frac{E(t)}{1-\nu(t)}\lambda_v^0(t)=0 \qquad (2.33)$$

Из сравнения уравнений совместности (2.28) и (2.29) найдем следующую зависимость между функциями напряжений $\bar{\Phi}(t)$ и $\Phi(t)$:

$$\bar{\Phi}(t) = \Phi(t) - \int_{\tau_1}^{t} \Phi(\tau) Q(t, \tau) d\tau + \tilde{\Phi}(t) \tag{2.34}$$

Подставляя это выражение в граничные условия (2.30) и условия однозначности (2.31) и требуя совпадения этих условий с соответствующими условиями упруго-мгновенной задачи, получим следующие уравнения для определения функции $\tilde{\Phi}(t)$:

$$\nabla^4 \tilde{\Phi}(t) = 0 \tag{2.35}$$

внутри области, а на границах Γ_0 и Γ_k

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}(t)}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.36}$$

После некоторых преобразований из сравнения (2.31) и (2.33) следуют следующие условия однозначности:

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \tilde{\varphi}(\tau) \frac{E(t)}{1 - \nu^2(t)} M_1(t, \tau) d\tau = 0$$

$$\tilde{F}_u(t) + \int_{\tau_1}^{t} \tilde{F}_u(\tau) \frac{E(t)}{1 - \nu^2(t)} M_1(t, \tau) d\tau = 0 \tag{2.37}$$

$$\tilde{F}_v(t) + \int_{\tau_1}^{t} \tilde{F}_v(\tau) + \frac{E(t)}{1 - \nu^2(t)} M_1(t, \tau) d\tau = 0$$

Из (2.35)—(2.37) следует, что можно принять $\tilde{\Phi}(t) \equiv 0$ внутри и на границе одно- или многосвязной области. С учетом этого и выражений (2.34), (2.10) и (2.4) получим следующие зависимости между напряжениями с учетом ползучести и упруго-мгновенными напряжениями

$$\bar{\sigma}_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_{ij}(\tau) Q(t, \tau) d\tau \quad (i, j = x, y) \tag{2.38}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(t) = \sigma_{zz}(t) - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_{zz}(\tau) Q_1(t, \tau) - \alpha T(\tau) Q_2(t, \tau)] d\tau \tag{2.39}$$

Здесь

$$Q(t, \tau) = G(t, \tau) - \frac{E(t)}{E(\tau)} \frac{1 - \nu(\tau)}{1 - \nu^2(t)} M(t, \tau) +$$

$$+ \int_{\tau}^{t} G(t, \xi) \frac{E(\xi)}{E(\tau)} \frac{1 - \nu(\tau)}{1 - \nu^2(\xi)} M(\xi, \tau) d\xi \tag{2.40}$$

$$Q_1(t, \tau) = \frac{1}{\nu(\tau)}\left[\nu(t)\, Q(t, \tau) - E(t)\, K(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} E(t)\, K(t, \xi)\, Q(\xi, \tau)\, d\xi\right.$$

$$Q_2(t, \tau) = E(t)\, R(t, \tau) - E(\tau)\, Q_1(t, \tau) \tag{2.41}$$

где $G(t, \tau)$—резольвента ядра $E(t)\, M_1(t, \tau)/(1 - \nu^2(t))$.

Далее, подставляя (2.38) в (2.6) и учитывая выражения для обобщенного закона Гука, получим зависимости между деформациями соответствующих задач в виде

$$\bar{\varepsilon}_{xx}(t) = \varepsilon_{xx}(t) - \int_{\tau_1}^{t} [\varepsilon_{xx}(\tau)\, N_1(t, \tau) + \varepsilon_{yy}(\tau)\, N_2(t, \tau) - \alpha T(\tau)\, N_3(t, \tau)]\, d\tau \tag{2.42}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x, y)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xy}(t) = \varepsilon_{xy}(t) - \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon_{xy}(\tau)\, [N_1(t, \tau) - N_2(t, \tau)]\, d\tau \tag{2.43}$$

В выражениях (2.42), (2.43) приняты следующие обозначения:

$$N_1(t, \tau) = \frac{E(\tau)}{[1 - 2\nu(\tau)][1 + \nu(\tau)]}[(1 - \nu(\tau))\, G_1(t, \tau) + \nu(\tau) G_2(t, \tau)]$$

$$N_2(t, \tau) = \frac{E(\tau)}{[1 - 2\nu(\tau)]\,[1 + \nu(\tau)]}[\nu(\tau)\, G_1(t, \tau) + (1 - \nu(\tau))\, G_2(t, \tau)]$$

$$N_3(t, \tau) = \frac{E(\tau)}{1 - 2\nu(\tau)}[G_1(t, \tau) + G_2(t, \tau)] + M(t, \tau) \tag{2.44}$$

II. В случае плоского напряженного состояния в (2.1) следует принять

$$\bar{\sigma}_{xz}(t) = \bar{\sigma}_{yz}(t) = \bar{\sigma}_{zz}(t) = \bar{\varepsilon}_{xz}(t) = \bar{\varepsilon}_{yz}(t) = 0 \tag{2.45}$$

$$\bar{s}(t) = \bar{\sigma}_{xx}(t) + \bar{\sigma}_{yy}(t)$$

Тогда получим следующие физические уравнения:

$$\bar{\varepsilon}_{xx}(t) = \varepsilon^0_{xx}(t) + \frac{\bar{\sigma}_{xx}(t) - \nu(t)\, \bar{\sigma}_{yy}(t)}{E(t)} -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t}\left[\bar{\sigma}_{xx}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t, \tau) - \bar{\sigma}_{yy}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t, \tau)\right] d\tau$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x, y)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xy}(t) = \varepsilon^0_{xy}(t) + 2\left\{\frac{1 + \nu(t)}{E(t)}\bar{\sigma}_{xy}(t) -\right.$$

$$\left.- \int_{\tau_1}^{t} \bar{\sigma}_{xy}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[\delta(t, \tau) + \delta_1(t, \tau)]\, d\tau\right\} \tag{2.46}$$

$$\overline{\varepsilon}_{zz}(t)=\varepsilon^{0}_{zz}(t)-\frac{\nu(t)\left[\overline{\sigma}_{xx}(t)+\overline{\sigma}_{yy}(t)\right]}{E(t)}+$$

$$+\int_{\tau_1}^{t}\left[\overline{\sigma}_{xx}(\tau)+\overline{\sigma}_{yy}(\tau)\right]\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\,d\tau$$

Из сравнения выражений (2.6) и (2.46) с учетом (2.27) видно, что для перехода от плоской деформации к плоскому напряженному состоянию необходимо в (2.6) произвести следующие замены:

$$\alpha \text{ на } \alpha\frac{1+\nu(t)}{1+2\nu(t)},\qquad E(t) \text{ на } E(t)\frac{1+2\nu(t)}{[1+\nu(t)]^2}\tag{2.47}$$

$$\nu(t) \text{ на } \frac{\nu(t)}{1+\nu(t)},\qquad M_1(t,\tau) \text{ на } -\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau),\quad M(t,\tau) \text{ на } 0\tag{2.48}$$

Таким образом, в случае а) получим зависимости между напряжениями

$$\overline{\sigma}_{xx}(t)=\sigma_{xx}(t),\quad \overline{\sigma}_{yy}(t)=\sigma_{yy}(t),\quad \overline{\sigma}_{xy}(t)=\sigma_{xy}(t)\tag{2.49}$$

а соответствующие зависимости между деформациями будут

$$\overline{\varepsilon}_{xx}(t)=\varepsilon_{xx}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\left[\varepsilon_{xx}(\tau)K_1(t,\tau)+\varepsilon_{yy}(\tau)K_2(t,\tau)\right]d\tau\tag{2.50}$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad (x,\ y)$$

$$\overline{\varepsilon}_{xy}(t)=\varepsilon_{xy}(t)+\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_{xy}(\tau)\left[K_1(t,\tau)-K_2(t,\tau)\right]d\tau\tag{2.51}$$

Здесь

$$K_1(t,\tau)=\frac{E(\tau)}{1-\nu^2(\tau)}\left|\,\nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)-\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\right|$$
$$K_2(t,\tau)=\frac{E(\tau)}{1-\nu^2(\tau)}\left|\,\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)-\nu(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\right|\tag{2.52}$$

Воспользуясь выражениями (2.49) и (2.46) (при отсутствии вынужденных деформаций), получим связь между деформациями $\overline{\varepsilon}_{zz}(t)$ и $\varepsilon_{xx}(t)$ в виде

$$\overline{\varepsilon}_{zz}(t)=\varepsilon_{zz}(t)-\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_{zz}(\tau)\frac{E(\tau)}{\nu(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\delta_1(t,\tau)\,d\tau\tag{2.53}$$

В случае б) зависимости (2.38) перейдут в следующие:

$$\overline{\sigma}_{ij}(t)=\sigma_{ij}(t)-\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{ij}(\tau)\frac{E(t)}{E(\tau)}R(t,\tau)\,d\tau\tag{2.54}$$

$$(i,\ j=x,\ y)$$

а соотношения между деформациями (2.42), (2.43) примут вид

$$\bar{\varepsilon}_{xx}(t)=\varepsilon_{xx}(t)-\int_{\tau_1}^{t}[\varepsilon_{xx}(\tau)H_1(t,\tau)+\varepsilon_{yy}(\tau)H_2(t,\tau)-\alpha T(\tau)H_3(t,\tau)]\,d\tau \quad (2.55)$$

. . . . (x, y)

$$\bar{\varepsilon}_{xy}(t)=\varepsilon_{xy}(t)-\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon_{xy}(\tau)[H_1(t,\tau)-H_2(t,\tau)]\,d\tau \quad (2.56)$$

где

$$H_1(t,\tau)=\frac{\nu(\tau)}{1-\nu^2(\tau)}M(t,\tau),\quad H_2(t,\tau)=\frac{1}{\nu(\tau)}H_1(t,\tau)$$

$$H_3(t,\tau)=-\frac{1+\nu(\tau)}{\nu(\tau)}H_1(t,\tau) \quad (2.57)$$

Далее, подставив (2.54) в (2.46), получим зависимость между деформациями $\bar{\varepsilon}_{zz}(t)$ и $\varepsilon_{zz}(t)$ в виде

$$\bar{\varepsilon}_{zz}(t)=\varepsilon_{zz}(t)+\int_{\tau_1}^{t}[\varepsilon_{zz}(\tau)-\alpha T(\tau)]\frac{M(t,\tau)}{\nu(\tau)}\,d\tau \quad (2.58)$$

Таким образом, при несоблюдении гипотезы (1.1), на основании вышеустановленных зависимостей (2.22)—(2.25), (2.38)—(2.43) для плоской деформации и (2.49)—(2.58) для плоского напряженного состояния, выражающих связь между решениями задачи с учетом ползучести и упруго-мгновенной задачи в одно- и многосвязных телах, можно сделать следующие выводы.

1. Если напряженно-деформированное состояние в упруго-ползучем теле вызвано действием поверхностных сил, то для плоской задачи компоненты напряжений с учетом ползучести (кроме $\bar{\sigma}_{zz}(t)$) совпадают с соответствующими упруго-мгновенными напряжениями. Компоненты нормальной деформации (кроме $\bar{\varepsilon}_{zz}(t)$) перераспределяются по координатам и времени. Остальные компоненты напряжений и деформаций трансформируются во времени.

2. В случае вынужденных деформаций компоненты напряжений (кроме $\bar{\sigma}_{zz}(t)$) и сдвиговой деформации трансформируются во времени. Остальные компоненты напряжений и деформаций перераспределяются по координатам и времени.

Следствие. При выполнении гипотезы (1.1) имеем

$$M(t,\tau)=K(t,\tau)=L_2(t,\tau)=Q_2(t,\tau)=N_1(t,\tau)=N_2(t,\tau)=$$
$$=N_3(t,\tau)=K_2(t,\tau)=H_1(t,\tau)=H_2(t,\tau)=H_3(t,\tau)=0$$

$$M_1(t,\tau)=\frac{1-\nu^2}{E(\tau)}L(t,\tau),\quad K_1(t,\tau)=L_1(t,\tau)=L(t,\tau) \quad (2.59)$$

$$Q(t, \tau) = Q_1(t, \tau) = H(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} R(t, \tau)$$

На основании этих равенств установленные выше зависимости (2.22)—(2.25), (2.49)—(2.51) и (2.38)—(2.43), (2.52)—(2.58) упрощаются и переходят соответственно в зависимости (1.2) и (1.3). Отсюда следует, что теоремы Н. Х. Арутюняна справедливы также в случае многосвязных тел. Более того, легко показать, что если напряженно-деформированное состояние в многосвязном теле вызвано поверхностными силами, то теорема Н. Х. Арутюняна остается справедливой независимо от выполнения условий Митчелла.

Действительно, в этом случае условия однозначности (2.31) для плоской деформации примут вид

$$\bar{\varphi}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \bar{\varphi}(\tau) \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau = 0$$

$$\bar{F}_u(t) - \frac{1}{1-\nu} P_u^{(k)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \left[\bar{F}_u(\tau) - \frac{1}{1-\nu} P_u^{(k)}(\tau) \right] \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau = 0 \quad (2.60)$$

$$\bar{F}_v(t) - \frac{1}{1-\nu} P_v^{(k)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \left[\bar{F}_v(\tau) - \frac{1}{1-\nu} P_v^{(k)}(\tau) \right] \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau = 0$$

а для плоского напряженного состояния

$$\bar{F}_u(t) - (1+\nu) P_u^{(k)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} [\bar{F}_u(\tau) - (1+\nu) P_u^{(k)}(\tau)] \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau = 0$$

$$(2.61)$$

$$\bar{F}_v(t) - (1+\nu) P_v^{(k)}(t) + \int_{\tau_1}^{t} [\bar{F}_v(\tau) - (1+\nu) P_v^{(k)}(\tau)] \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau = 0$$

Условие однозначности угла поворота $\bar{\omega}_z(t)$ совпадает с первым из выражений (2.60). Условия однозначности (2.60) и (2.61) являются однородными линейными уравнениями Вольтерра. Решения этих уравнений совпадают с соответствующими условиями однозначности упруго-мгновенной задачи. Отсюда следует, что для многосвязных тел теорема Н. Х. Арутюняна справедлива независимо от выполнения условий Митчелла.

§ 3. Исследование влияния физико-механических характеристик материала на напряженное состояние упруго-ползучего тела

Покажем справедливость следующих предложений.

Предложение 1. Если напряженное состояние в односвязном или многосвязном упруго-ползучем теле вызвано действием поверхностных сил и выполняются условия Митчелла (2.20), то в плоской задаче напряжения с учетом ползучести не зависят от физико-механических свойств материала.

Для этого случая в предыдущем параграфе было показано, что напряжения с учетом ползучести $\overline{\sigma}_{xx}(t)$, $\overline{\sigma}_{yy}(t)$ и $\overline{\sigma}_{xy}(t)$ равны соответствующим упруго-мгновенным напряжениям. Отсюда следует, что теорема М. Леви-Митчелла остается в силе и в случае линейной ползучести при невыполнении гипотезы (1.1).

Предложение II. Если напряженное деформированное состояние в односвязном или многосвязном упруго-ползучем теле вызвано действием вынужденных деформаций, (2.27), то для плоской задачи с учетом ползучести напряжения $\overline{\sigma}_{xx}(t)$, $\overline{\sigma}_{yy}(t)$ и $\overline{\sigma}_{xy}(t)$ пропорциональны величине $E_0\alpha$. Коэффициенты $\nu(t)$ и $\overline{\nu}(t, \tau)$ не влияют на напряжения в случае плоского напряженного состояния и влияют на их распределение во времени в случае плоской деформации.

Для доказательства предложения II преобразуем предварительно ядро ползучести

$$L(t, \tau) = -E(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)\right] \tag{3.1}$$

Представив удельную продольную деформацию ползучести в виде

$$C(t, \tau) = \frac{\overline{C}(t, \tau)}{E(t)} + \frac{1}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} \tag{3.2}$$

получим

$$L(t, \tau) = -\frac{E(\tau)}{E(t)}\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{C}(t, \tau) \tag{3.3}$$

В выражениях (3.2) и (3.3) $\overline{C}(t, \tau)$—безразмерная функция, равная отношению деформации ползучести от единичного напряжения к упруго-мгновенной деформации (от того же напряжения) в момент времени t.

Согласно [3] модуль упруго-мгновенной деформации представляется в виде

$$E(t) = E_0(1 - \rho e^{-\beta t}) \tag{3.4}$$

где E_0—предельное значение модуля.

Заметим, что в граничные условия (2.30) и условия (2.10) не входят величины, характеризующие физико-механические свойства материала.

Следовательно, подставляя (3.3) и (3.4) в уравнения совместности (2.28) и условия однозначности (2.31), получим доказательство предложения II для плоской деформации. Аналогичным образом доказывается для плоского напряженного состояния.

Это доказательство можно получить и другим способом, если воспользоваться зависимостями (2.38), (2.54), которые выражают связь между напряжениями с учетом ползучести и их упруго-мгновенными значениями.

Следствие. При выполнении гипотезы (1.1) в случае а) ранее было показано, что теорема Н. Х. Арутюняна (1.2) остается справедливой и для многосвязных тел, независимо от выполнения условий Митчелла. Если же условия Митчелла выполняются, то напряжения $\bar{\sigma}_{xx}(t)$, $\bar{\sigma}_{yy}(t)$ и $\bar{\sigma}_{xy}(t)$ не зависят от физико-механических свойств материала*.

В случае б) физико-механические характеристики материала для плоского напряженного состояния влияют на напряжения с учетом ползучести таким же образом, как и при невыполнении гипотезы (1.1).

Для плоской деформации при выполнении гипотезы (1.1) уравнение (2.28) примет вид

$$\nabla^4 \left[\bar{\Phi}(t) + \int_{\tau_1}^{t} \bar{\Phi}(\tau) \frac{E(t)}{E(\tau)} L(t, \tau)\, d\tau \right] = \frac{E(t)}{1-\nu} \nabla^2 \alpha T(t) \qquad (3.5)$$

Из (3.5), граничных условий (2.30) и выражений (2.10) с учетом (3.3), (3.4) и условий однозначности (2.60) легко можно показать, что напряжения $\bar{\sigma}_{xx}(t)$, $\bar{\sigma}_{yy}(t)$ и $\bar{\sigma}_{xy}(t)$ пропорциональны величине $E_0\alpha/(1-\nu)$, а $\bar{C}(t, \tau)$ влияет на распределение этих напряжений в зависимости от времени, но не влияет на их распределение по координатам.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 23 V 1972

Դ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Վ. Դ. ՇԵՐԵՄԵՏ

ՍՈՂՔԻ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐՈՒՄ ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ժամանակի ընթացքում փոփոխական հատկություններով և փոփոխական Պուասոնի գործակիցներով նյութերի համար ստացված են առնչություններ, որոնք թույլ են տալիս որոշել սողքով օժտված մարմնում լարումները (դեֆորմացիաները) առաձգա-ակնթարթային խնդրի լուծումից ստացված լարումների (դեֆորմացիաների) միջոցով:

Ուսումնասիրվում է նաև սողքով օժտված մարմնում նյութի ֆիզիկո-մեխանիկական հատկությունների ազդեցությունը լարումների վրա:

* Все результаты, полученные в статье в случае действия поверхностных сил, остаются справедливыми и при наличии объемных сил, зависящих только от времени.

ON SOME THEOREMS IN THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF CREEP

G. S. VARDANIAN, V. D. SHEREMET

S u m m a r y

The dependencies are presented making it possible to determine stresses (strains) under creep conditions in uni- and multy-bond elastic-creeping bodies, if elastic-instant stresses (strains) in the same body are known. N. Ch. Arutiunian's theorems can be derived from the dependencies mentioned, as a special case.

A problem on physico-mechanical properties of the material and their effect on stresses in uni- and multy-bond elastic-creeping bodies is also discussed. In particular, Levi-Mitchell's theorem is shown to be valid for creeping bodies as well.

The results obtained are valid for the medium of properties non-invariant with time, and variable coefficients of transverse strains.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, М., 1966.
2. *Александровский С. В.* Плоская задача при наличии вынужденных деформаций тела, обладающего ползучестью. Строительная механика и расчет сооружений, № 6, 1964.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
4. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. Инж. ж. МТТ, № 6, 1967.
5. *Budiansky B.* Extension of Michell's theorem to problems of plasticity and creep. Quart. Appl. Math., v. 16, № 3, 1958.
6. *Варданян Г. С., Пригоровский Н. И.* Моделирование термоупругих напряжений в поляризационно-оптическом методе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1962.
7. *Michell J. N.* On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. Proc. London Math. Soc., 31, 1899.
8. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное состояние сооружений. Госстройиздат, М., 1963.
9. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. XX, 1956.
10. *Харлаб В. Д.* К общей линейной теории ползучести. Изв. Всесоюзн. н.-и. ин-та гидротехн., т. 68, 1961.
11. *Шеремет В. Д.* Влияние физико-механических характеристик на напряженное состояние упруго-ползучего тела. Сб. трудов МИСИ им. В. В. Куйбышева № 104. Моделирование задач динамики, термоупругости и статики поляризационно-оптическим методом, 1972.