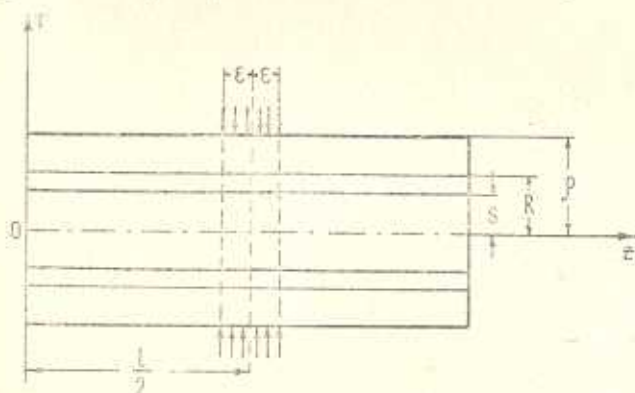


Э. А. МАРТИРОСЯН

О КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНО-
 НАГРУЖЕННОГО ПОЛОГО СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается осесимметричная задача теории упругости для цилиндра, составленного из двух полых круглых цилиндров, один из которых вложен в другой. Сцепление между этими цилиндрами полное и без начальных напряжений. На внешней и внутренней боковых поверхностях цилиндра известна нагрузка, а на торцах нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

Решение рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье-Дини. Коэффициенты рядов определяются из конечных систем линейных уравнений. Проведен численный анализ напряжений на поверхности контакта для конкретных внешней нагрузки и отношений размеров составляющих цилиндров. Исследовано влияние разнородности материалов на распределение контактных напряжений.



Фиг. 1

Осесимметричное напряженное состояние полого однородного цилиндра исследовано в работах [1-12] и др.

Для слоистого цилиндра эта задача рассмотрена в работе [13].

Одна задача для составного цилиндра, когда на торцах внутреннего сплошного цилиндра приложена нормальная нагрузка, рассмотрена в работе Н. И. Глаголева [14].

1. Рассмотрим составной цилиндр длины l и радиусов внешнего и внутреннего контуров сечения r и S . Через R обозначим радиус сечения поверхности контакта. Совместим ось z цилиндрической системы координат с осью составного цилиндра, а начало координат поместим на его торце (фиг. 1).

Решение задачи сводится к нахождению функций $\Phi^{(l)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 \Phi^{(l)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi^{(l)}(r, z) = 0 \quad (1.5)$$

граничным условиям (1.2—1.3) и условиям контакта (1.4).

Решения уравнений (1.5) ищем в следующем виде [8, 12]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(l)}(r, z) = & z(A_0^{(l)} r^2 + B_0^{(l)} z^2 + C_0^{(l)} z + D_0^{(l)} \ln r) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(l)} J_0(\lambda_k r) + F_k^{(l)} K_0(\lambda_k r) + G_k^{(l)} \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + H_k^{(l)} \lambda_k r K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $I_l(x)$, $K_l(x)$ —функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода,

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$$

Удовлетворяя условиям (1.2—1.4), получаем

$$C_0^{(l)} = 0 \quad (1.7)$$

и следующие конечные системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & 4(1 - \nu_1) A_0^{(1)} + 3(1 - 2\nu_1) B_0^{(1)} = 0 \\ & -2(1 - 2\nu_1) A_0^{(1)} + 6\nu_1 B_0^{(1)} + \frac{D_0^{(1)}}{S^2} = \frac{a_0^{(1)}}{2} \\ & -2(1 - 2\nu_2) A_0^{(2)} + 6\nu_2 B_0^{(2)} + \frac{D_0^{(2)}}{\rho^2} = \frac{a_0^{(2)}}{2} \\ & \frac{1}{G_1} \left(2A_0^{(1)} R + \frac{D_0^{(1)}}{R} \right) - \frac{1}{G_2} \left(2A_0^{(2)} R + \frac{D_0^{(2)}}{R} \right) = 0 \\ & -2(1 - 2\nu_1) A_0^{(1)} + 6\nu_1 B_0^{(1)} + \frac{D_0^{(1)}}{R^2} + 2(1 - 2\nu_2) A_0^{(2)} - 6\nu_2 B_0^{(2)} - \frac{D_0^{(2)}}{R^2} = 0 \\ & X_k^{(1)} a_{11}(S) + X_k^{(2)} a_{12}^{(1)}(S) + X_k^{(3)} a_{13}(S) + X_k^{(4)} a_{14}^{(1)}(S) = 0 \\ & X_k^{(5)} a_{11}(\rho) + X_k^{(6)} a_{12}^{(2)}(\rho) + X_k^{(7)} a_{13}(\rho) + X_k^{(8)} a_{14}^{(2)}(\rho) = 0 \\ & X_k^{(1)} b_{11}(S) + X_k^{(2)} b_{12}^{(1)}(S) + X_k^{(3)} b_{13}(S) + X_k^{(4)} b_{14}^{(1)}(S) = -a_k^{(1)} \\ & X_k^{(5)} b_{11}(\rho) + X_k^{(6)} b_{12}^{(2)}(\rho) + X_k^{(7)} b_{13}(\rho) + X_k^{(8)} b_{14}^{(2)}(\rho) = -a_k^{(2)} \\ & X_k^{(1)} a_{11}(R) + X_k^{(2)} a_{12}^{(1)}(R) + X_k^{(3)} a_{13}(R) + X_k^{(4)} a_{14}^{(1)}(R) - \\ & - X_k^{(5)} a_{11}(R) - X_k^{(6)} a_{12}^{(2)}(R) - X_k^{(7)} a_{13}(R) - X_k^{(8)} a_{14}^{(2)}(R) = 0 \\ & X_k^{(1)} b_{11}(R) + X_k^{(2)} b_{12}^{(1)}(R) + X_k^{(3)} b_{13}(R) + X_k^{(4)} b_{14}^{(1)}(R) - \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
& -X_k^{(5)} b_{11}^{(2)}(R) - X_k^{(6)} b_{12}^{(2)}(R) - X_k^{(7)} b_{13}^{(2)}(R) - X_k^{(8)} b_{14}^{(2)}(R) = 0 \\
& X_k^{(1)} c_{11}^{(1)}(R) + X_k^{(2)} c_{12}^{(1)}(R) + X_k^{(3)} c_{13}^{(1)}(R) + X_k^{(4)} c_{14}^{(1)}(R) - \\
& -X_k^{(5)} c_{11}^{(2)}(R) - X_k^{(6)} c_{12}^{(2)}(R) - X_k^{(7)} c_{13}^{(2)}(R) - X_k^{(8)} c_{14}^{(2)}(R) = 0 \\
& X_k^{(1)} d_{11}^{(1)}(R) + X_k^{(2)} d_{12}^{(1)}(R) + X_k^{(3)} d_{13}^{(1)}(R) + X_k^{(4)} d_{14}^{(1)}(R) - \\
& -X_k^{(5)} d_{11}^{(2)}(R) - X_k^{(6)} d_{12}^{(2)}(R) - X_k^{(7)} d_{13}^{(2)}(R) - X_k^{(8)} d_{14}^{(2)}(R) = 0
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
a_{11}(x) &= \frac{I_1(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k \rho)}, & a_{12}^{(0)}(x) &= \frac{2(1-\nu_l) I_1(\lambda_k x) + \lambda_k x I_0(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k \rho)} \\
a_{13}(x) &= -\frac{K_1(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)}, & a_{14}^{(0)}(x) &= \frac{2(1-\nu_l) K_1(\lambda_k x) - \lambda_k x K_0(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)} \\
b_{11}(x) &= \frac{I_0(\lambda_k x) - \frac{I_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x}}{I_1(\lambda_k \rho)}, & b_{12}^{(0)}(x) &= \frac{(1-2\nu_l) I_0(\lambda_k x) + \lambda_k x I_1(\lambda_k x)}{I_1(\lambda_k \rho)} \\
b_{13}(x) &= \frac{K_0(\lambda_k x) + \frac{K_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x}}{K_1(\lambda_k S)}, & b_{14}^{(0)}(x) &= \frac{-(1-2\nu_l) K_0(\lambda_k x) + \lambda_k x K_1(\lambda_k x)}{K_1(\lambda_k S)} \\
c_{11}^{(0)}(x) &= \frac{I_0(\lambda_k x)}{G_l I_1(\lambda_k \rho)}, & c_{12}^{(0)}(x) &= \frac{4(1-\nu_l) I_0(\lambda_k x) + \lambda_k x I_1(\lambda_k x)}{G_l I_1(\lambda_k \rho)} \\
c_{13}^{(0)}(x) &= \frac{K_0(\lambda_k x)}{G_l K_1(\lambda_k S)}, & c_{14}^{(0)}(x) &= \frac{-4(1-\nu_l) K_0(\lambda_k x) + \lambda_k x K_1(\lambda_k x)}{G_l K_1(\lambda_k S)} \\
d_{11}^{(0)}(x) &= \frac{I_1(\lambda_k x)}{G_l I_1(\lambda_k \rho)}, & d_{12}^{(0)}(x) &= \frac{\lambda_k x I_0(\lambda_k x)}{G_l I_1(\lambda_k \rho)} \\
d_{13}^{(0)}(x) &= -\frac{K_1(\lambda_k x)}{G_l K_1(\lambda_k S)}, & d_{14}^{(0)}(x) &= -\frac{\lambda_k x K_0(\lambda_k x)}{G_l K_1(\lambda_k S)}
\end{aligned}$$

Решив системы (1.8) и (1.9), получим значения постоянных $A_0^{(i)}$, $B_0^{(i)}$, $D_0^{(i)}$, $X_k^{(1)}$, $X_k^{(2)}$, $X_k^{(3)}$, $X_k^{(4)}$, $X_k^{(5)}$, $X_k^{(6)}$, $X_k^{(7)}$, $X_k^{(8)}$.

Коэффициенты $E_k^{(i)}$, $G_k^{(i)}$, $F_k^{(i)}$ и $H_k^{(i)}$ будем определять из следующих соотношений

$$\begin{aligned}
X_k^{(1)} &= \lambda_k^3 E_k^{(1)} I_1(\lambda_k \rho) & X_k^{(5)} &= \lambda_k^3 E_k^{(2)} I_1(\lambda_k \rho) \\
X_k^{(2)} &= \lambda_k^3 G_k^{(1)} I_1(\lambda_k \rho) & X_k^{(6)} &= \lambda_k^3 G_k^{(2)} I_1(\lambda_k \rho) \\
X_k^{(3)} &= \lambda_k^3 F_k^{(1)} K_1(\lambda_k S) & X_k^{(7)} &= \lambda_k^3 F_k^{(2)} K_1(\lambda_k S) \\
X_k^{(4)} &= \lambda_k^3 H_k^{(1)} K_1(\lambda_k S) & X_k^{(8)} &= \lambda_k^3 H_k^{(2)} K_1(\lambda_k S)
\end{aligned}$$

Используя значения этих коэффициентов, (1.1), (1.7) и представления (1.6), находим напряжения и перемещения.

2. В качестве примера рассмотрим напряженное состояние составного цилиндра, который находится между двумя жесткими гладкими преградами. Касательные напряжения между цилиндром и преградами отсутствуют. На интервале 2ε средней части внешней цилиндрической поверхности составного цилиндра приложена равномерно распределенная нормальная нагрузка (фиг. 1). Внутренняя цилиндрическая поверхность считается свободной от внешней нагрузки.

При этих условиях имеем

$$a_0^{(1)} = 0, \quad a_k^{(1)} = b_k^{(1)} = b_k^{(2)} = 0 \quad (2.1)$$

$$a_0^{(2)} = -\frac{4p\varepsilon}{l}, \quad a_k^{(2)} = -\frac{4p}{\lambda_k l} \sin \lambda_k \varepsilon \cos \frac{k\pi}{2} \quad (2.2)$$

Пользуясь значениями (2.1) и (2.2), из (1.8) получим

$$A_0^{(1)} = \frac{(1-2\nu_1)(1-\nu_2)}{2D} \frac{R^2}{S^2} \frac{4p\varepsilon}{l} \quad (2.3)$$

$$B_0^{(1)} = \frac{2(1-\nu_1)(1-\nu_2)}{3D} \frac{R^2}{S^2} \frac{4p\varepsilon}{l} \quad (2.4)$$

$$D_0^{(1)} = -\frac{1-\nu_2}{D} R^2 \frac{4p\varepsilon}{l} \quad (2.5)$$

$$A_0^{(2)} = -\left\{ \frac{R^2}{\rho^2} \left[\frac{\left(1 - \frac{R^2}{S^2}\right)(1-\nu_2)}{\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)D} - \frac{1}{2\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)} \right] (1-2\nu_2) - \frac{1-2\nu_2}{2} \right\} \frac{2p\varepsilon}{l} \quad (2.6)$$

$$B_0^{(2)} = -\left\{ \frac{R^2}{\rho^2} \left[-\frac{\left(1 - \frac{R^2}{S^2}\right)(1-\nu_2)}{\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)D} + \frac{1}{2\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{4}{3}(1-\nu_2) + \frac{2}{3}(1-\nu_2) \right\} \frac{2p\varepsilon}{l} \quad (2.7)$$

$$D_0^{(2)} = -\left[\frac{\left(1 - \frac{R^2}{S^2}\right)(1-\nu_2)}{\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)D} - \frac{1}{2\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)} \right] \frac{R^2 4p\varepsilon}{l} \quad (2.8)$$

где

$$D = \left(1 - \frac{R^2}{S^2}\right) \left[1 + (1 - 2\nu_2) \frac{R^2}{\rho^2}\right] - \frac{G_2}{G_1} \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) \left[1 + (1 - 2\nu_1) \frac{R^2}{S^2}\right] \quad (2.9)$$

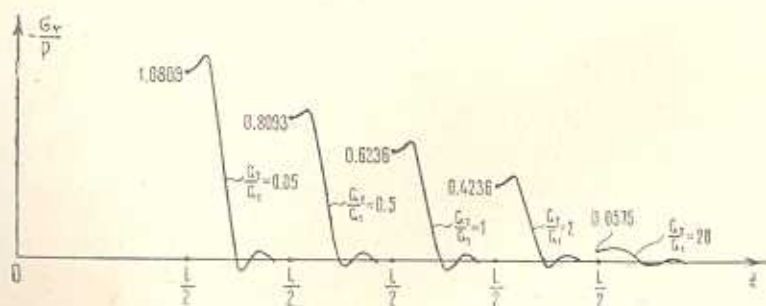
Из соотношений (1.9—1.11) видно, что коэффициенты $E_k^{(i)}$ и $G_k^{(i)}$ убывают как $\frac{e^{-kz}}{K^3 \sqrt{K}}$, а $F_k^{(i)}$ и $H_k^{(i)}$ возрастают как $\frac{e^{kz}}{K^3 \sqrt{K}}$, где α принимает значения $\frac{\pi \rho}{l}$, $\frac{\pi R}{l}$, $\frac{\pi S}{l}$.

Используя найденные значения постоянных коэффициентов при помощи (1.1) и (1.6), для нормального напряжения σ_r и касательного напряжения τ_{rz} на поверхности контакта $r = R$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_r(R, z) = & \frac{4(1 - \nu_2)(R^2 - S^2)p\varepsilon}{S^2 l D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} - \frac{I_1(\lambda_k R)}{\lambda_k R I_1(\lambda_k \rho)} \right] X_k^{(1)} + \right. \\ & + \left[\frac{(1 - 2\nu_1) I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} + \lambda_k R \frac{I_1(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} \right] X_k^{(2)} + \left[\frac{K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} + \frac{K_1(\lambda_k R)}{\lambda_k R K_1(\lambda_k S)} \right] X_k^{(3)} + \\ & \left. + \left[-\frac{(1 - 2\nu_1) K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} + \lambda_k R \frac{K_1(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} \right] X_k^{(4)} \right\} \cos \lambda_k z \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(R, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_1(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} X_k^{(1)} + \left[2(1 - \nu_1) \frac{I_1(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} + \lambda_k R \frac{I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k \rho)} \right] X_k^{(2)} - \right. \\ & \left. - \frac{K_1(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} X_k^{(3)} + \left[2(1 - \nu_1) \frac{K_1(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} - \lambda_k R \frac{K_0(\lambda_k R)}{K_1(\lambda_k S)} \right] X_k^{(4)} \right\} \sin \lambda_k z \end{aligned}$$

где D определяется соотношением (2.9).



Фиг. 2

Значения напряжений $\frac{\sigma_r}{p}$ и $\frac{\tau_{rz}}{p}$ для некоторых точек поверхности контакта при различных значениях размеров и модулей упругости материалов составного цилиндра приведены в табл. 1 и 2.

Вычисления проведены для значения $\varepsilon = 0.1 l$.

Значения напряжений σ_r/ρ

Таблица 1

		$\rho = 0.101l$	$R = 0.1l$	$S = 0.09l$	
G_2/G_1	z	$\nu_1 = \nu_2 = 0.1$	$\nu_1 = 0.1$ $\nu_2 = 0.4$	$\nu_1 = 0.4$ $\nu_2 = 0.1$	
1	2	3	4	5	
0.05	$\frac{l}{2}$	-0.9563	-0.8824	-1.0703	-0.9594
	$\frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	-1.0889	-1.0133	-1.2030	-1.0908
	$\frac{l}{2} + \varepsilon$	-0.5189	-0.4480	-0.6323	-0.5241
	$\frac{l}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon$	+0.0930	+0.1588	-0.0196	+0.0842
	$\frac{l}{2} + 2\varepsilon$	-0.0533	+0.0142	-0.1661	-0.0608
	$\frac{l}{2} + \frac{5}{2}\varepsilon$	+0.0119	+0.0847	-0.0949	+0.0098
0.5	$\frac{l}{2}$	-0.9167	-0.8342	-1.0349	-0.9228
	$\frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	-1.0455	-0.9566	-1.1652	-1.0480
	$\frac{l}{2} + \varepsilon$	-0.4981	-0.4249	-0.6110	-0.5042
	$\frac{l}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon$	+0.0896	+0.1415	-0.0161	+0.0792
	$\frac{l}{2} + 2\varepsilon$	-0.0517	+0.0109	-0.1593	-0.0586
	$\frac{l}{2} + \frac{5}{2}\varepsilon$	+0.0175	+0.0779	-0.0892	-0.0096
1	$\frac{l}{2}$	-0.8760	-0.7858	-0.9983	-0.8847
	$\frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	-1.0020	-0.9026	-1.1260	-1.0046

1	2	3	4	5	6
1	$\frac{l}{2} + \varepsilon$	-0.4768	-0.4021	-0.5890	-0.4838
	$\frac{l}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon$	+0.0866	+0.1345	-0.0125	+0.0746
	$\frac{l}{2} + 2\varepsilon$	-0.0507	+0.0072	-0.1523	-0.0568
	$\frac{l}{2} + \frac{5}{2}\varepsilon$	+0.0172	-0.0717	-0.0834	+0.0095
2	$\frac{l}{2}$	-0.8035	-0.7034	-0.9323	-0.8160
	$\frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	-0.9247	-0.8141	-1.0556	-0.9286
	$\frac{l}{2} + \varepsilon$	-0.4394	-0.3639	-0.5498	-0.4478
	$\frac{l}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon$	+0.0818	+0.1192	-0.0066	+0.0676
	$\frac{l}{2} + 2\varepsilon$	-0.0489	+0.0006	-0.1404	-0.0541
	$\frac{l}{2} + \frac{5}{2}\varepsilon$	+0.0166	+0.0624	-0.0733	+0.0095
20	$\frac{l}{2}$	-0.3081	-0.2362	-0.4252	-0.3256
	$\frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$	-0.3991	-0.3202	-0.5111	-0.4044
	$\frac{l}{2} + \varepsilon$	-0.1828	-0.1387	-0.2553	-0.1920
	$\frac{l}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon$	+0.0509	+0.0582	+0.0189	+0.0362
	$\frac{l}{2} + 2\varepsilon$	-0.0363	-0.0220	-0.0635	-0.0377
	$\frac{l}{2} + \frac{5}{2}\varepsilon$	+0.0138	+0.0231	-0.0111	+0.0101

Графики распределения нормального и касательного напряжений на поверхности контакта для различных значений отношения $\frac{G_2}{G_1}$ и при $\rho = 0.12l$, $R = 0.1l$, $S = 0.08l$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$ приведены на фиг. 2 и 3.

Значения нормальных напряжений σ_r вблизи жестко-гладких преград не превышают 15 процентов его максимального значения и не приведены в табл. 1 и на фигурах.

Таблица 2

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.1; \quad \rho = 0.12l; \quad R = 0.1l; \quad S = 0.08l$$

z	$\tau_{rz}(R, z)$	z	$\tau_{rz}(R, z)$
0	0	0	0
0.1	-0.0025	0.1	-0.0254
0.2	0.0072	0.2	0.0221
0.25	0.0349	0.25	0.0277
0.3	0.0534	0.3	0.1780
0.4	-0.3055	0.4	-0.1436
0.45	0.0467	0.45	-0.0424
0.5	0	0.5	0

По следующим формулам, которые получены на основе (1.1) и (1.6),

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = & 4(2 - \nu_1) A_0^{(1)} + 6(1 - \nu_1) B_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} X_k^{(1)} + \right. \\ & + \left[2(2 - \nu_1) \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} + \lambda_k r \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} \right] X_k^{(2)} + \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} X_k^{(3)} + \\ & \left. + \left[-2(2 - \nu_1) \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} + \lambda_k r \frac{K_1(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} \right] X_k^{(4)} \right\} \quad S \leq r \leq R \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(2)}(r, 0) = & 4(2 - \nu_2) A_0^{(2)} + 6(1 - \nu_2) B_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} X_k^{(5)} + \right. \\ & + \left[2(2 - \nu_2) \frac{I_0(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} + \lambda_k r \frac{I_1(\lambda_k r)}{I_1(\lambda_k \rho)} \right] X_k^{(6)} + \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} X_k^{(8)} + \\ & \left. + \left[-2(2 - \nu_2) \frac{K_0(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} + \lambda_k r \frac{K_1(\lambda_k r)}{K_1(\lambda_k S)} \right] X_k^{(9)} \right\} \quad R \leq r \leq \rho \quad (2.12) \end{aligned}$$

вычислены также нормальные напряжения σ_z на торцевых преградах.

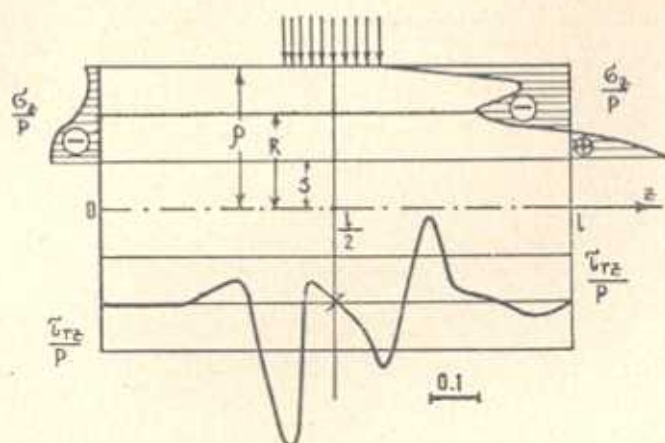
Распределение этих напряжений $\frac{\sigma_z}{p}$ при $\rho = 0.12l$, $R = 0.1l$, $S = 0.08l$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$ показано на фиг. 3. Диаграмма построена по расчетам, сделанным для пяти точек поверхности. В правой части фиг. 3 дается диаграмма для случая $\frac{G_2}{G_1} = 2$, а в левой части — для случая $\frac{G_2}{G_1} = 0.5$.

Анализ результатов вычислений

1. Нормальное напряжение σ_z на поверхности контакта меняет знак. Следовательно, при слабом сцеплении под действием внешнего давления на отдельных участках контакт может нарушиться.

2. Максимум нормального контактного напряжения σ_z возникает не в середине контактной поверхности цилиндра.

3. Если материал внешнего цилиндра мягче, чем материал внутреннего, то максимальное значение нормального контактного напряжения больше внешнего давления.



Фиг. 3

4. Если толщина внешнего цилиндра больше или равна толщине внутреннего цилиндра при постоянном отношении $\frac{G_2}{G_1}$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu_r$, то при увеличении коэффициента Пуассона (ν) максимальное напряжение на поверхности контакта уменьшается.

5. При постоянном отношении $\frac{G_2}{G_1}$ максимальное напряжение σ_z на поверхности контакта получается меньшим при $\nu_1 < \nu_2$ и большим при $\nu_1 > \nu_2$, чем при $\nu_1 = \nu_2$.

6. Касательное напряжение τ_{rz} на поверхности контакта меняет знак и не имеет особенностей.

7. Если материал внутреннего цилиндра мягче, чем материал внешнего цилиндра, нормальные напряжения σ_z на торцах преград меняют знак.

Զ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԱՌԱՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱՅ ՄՆԱՄԵՋ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ԳՂԱՆԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Գրաարկված է վերջավոր երկարավիան բաղադրյալ շրջանային գլանի առանցքաօրմնաբերիկ դեֆորմացիայի խնդիրը, երբ գլանի կողմնային մակերևույթի վրա տված են լարումները, իսկ ճակատների վրա՝ նորմալ տեղափոխությունները և շոշափող լարումները:

Ենդրի լուծումը ներկայացված է Բեսսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների շարքերով, որոնց գործակիցները որոշվում են վերջավոր տեսքով:

Թվային հաշվումները ցույց են տալիս, որ եթե արտաքին գլանի կողմնային մակերևույթի որևէ հատվածում կիրառված է հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճնշում, ապա կոնտակտի մակերևույթի որոշ մասերի վրա կարող են առաջ գալ ձգող նորմալ լարումներ:

ON CONTACT STRESSES IN AN AXISYMMETRICALLY
LOADED HOLLOW COMPOSITE CYLINDER

Z. A. MARTIROSIAN

S u m m a r y

The axisymmetrical deformation problem for a composite circular cylinder of finite length is considered, where the stresses on the lateral surface as well as the normal displacements and shearing stresses on the frontals of the cylinder are given.

The problem is solved by means of series of Bessel and trigonometrical functions whose coefficients are found in a finite form.

The numerical examination shows that, if a uniformly distributed normal pressure is applied to any part of the lateral surface of the outer cylinder, then tensile stresses may develop on the contact surface.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Binnie M. A. Axially symmetrical stress in a thick tube. Philosophical Magazine, London 212, 1941.
2. Шапиро Г. С. О сжатии бесконечного полого круглого цилиндра давлением, приложенным на участке боковой поверхности. ПММ, т. 7, вып. 5, 1943.
3. Аллен, Фокс и Саусвелл (D. De Allen, L. Fox and R. V. Southwell) Stress distribution in elastic solids of revolution. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 239, 1946.

4. Прокопов В. К. Равновесие упруго-осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра. ПММ, т. 13, № 2, 1949.
5. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра. Тр. АПИ, № 2, 1950.
6. Прокопов В. К. О равновесии полого цилиндра конечной длины, нагруженного осесимметричной нагрузкой. Тр. АПИ, № 192, 1958.
7. Старостин С. М. Решение задачи о равновесии полого цилиндра под действием нормальной к его поверхности симметричной нагрузки. Тр. АПИ им. Калнина, № 178, 1955.
8. Абрамян Б. А., Баблоян А. А. Об одной задаче осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XV, № 2, 1962.
9. Галеркин Б. Г. Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра. Изв. НИИГ, № 10, 1933.
10. Iyengar and Yogananda. Long circular cylindrical laminated Shells subjected to axisymmetric external loads. ZAMM, Bd. 44, № 6, 1964.
11. Валов Г. М. Об одной задаче о деформации упругого круглого цилиндра. Тр. сибирск. металлург. института, № 4/А, 1957.
12. Абрамян Б. А. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. 24, № 2, 1958.
13. Капшицкий А. А. Применение метода P -аналитических функций к решению одной задачи для слоистого цилиндра. ПМ (Укр. ССР), т. 9, вып. 6, 1963.
14. Глазюлев Н. И. Задача о контакте по боковым поверхностям двух коаксиальных цилиндров. Ученые записки МГУ, Механика, кн. 2, вып. 24, 1938.
15. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, ч. 1, М., 1949.
16. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Физматгиз, М., 1959.