ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 4, 1973 Механика

Н. Г. ИСАБЕКЯН

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОРТОТРОПНЫХ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

1. Рассмотрим симметрично нагруженную тонкостенную оболочку вращения, отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат s, φ, γ, где s и φ совпадают с линиями кривизны, а γ — с внешней нормалью срединной поверхности оболочки. Оболочка изготовлена из ортотропного разномодульного материала, главные направления упругости которого 1—1, 2—2 совпадают с направлениями s, φ.

В основу предлагаемой теории наряду с гипотезой недеформируемых нормалей ставятся следующие предположения:

а) напряжением σ_γ пренебрегаем по сравнению с другими напряжениями;

б) напряжение σ_s по толщине оболочки изменяется по кусочно-линейному закону, меняя при этом в точке раздела свой знак;

в) напряжение σ_φ по толщине оболочки изменяется также по кусочно-линейному закону, но по всей толщине оболочки имеет один и тот же знак, что равносильно принятию условия слабомоментности по направлению φ [4, 5].

Как известно [4—6], разномодульная теория упругости отличается от обычной, классической, теории законом упругости, устанавливающим связь между напряжениями и деформациями. Поэтому чисто статические и чисто геометрические соотношения ничем не отличаются от соответствующих соотношений для оболочек, изготовленных из обычного анизотропного материала [2—4].

Ввиду осесимметричности поставленной задачи и указанной частной ориентации ортотропии материала направления координатных осей оболочки s, φ, γ с точностью гипотезы недеформируемых нормалей считаются главными направлениями [4]. Кроме того, пренебрежение напряжением σ_γ дает возможность использовать закон упругости, записанный для плоского напряженного состояния [3, 6]. С учетом принятых относительно σ_s и σ_φ предположений будем иметь следующие варианты распределения напряжений по толщине оболочки и соответствующие им законы упругости:

I вариант

$$\begin{aligned} &\sigma_s > 0 \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \\ &\sigma_s < 0 \quad \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

При этом $\sigma_\varphi > 0$ или $\sigma_\varphi < 0$ по всей толщине оболочки.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}^{+}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}^{\pm}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}^{-}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}^{\pm}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{1.2}$$

II вариант

$$\sigma_s < 0 \quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2$$

$$\sigma_s > 0 \quad \text{при } \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{1.3}$$

Как и в I варианте, $\sigma_\varphi > 0$ или $\sigma_\varphi < 0$ по всей толщине оболочки $-\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2}$.

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}^{-}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}^{\pm}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}^{+}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{22}^{\pm}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{1.4}$$

В (1.2), (1.4) верхний индекс при коэффициенте a_{22} будет „+“, если $\sigma_\varphi > 0$, или „—“, если $\sigma_\varphi < 0$; γ_i — значение γ, где σ_s обращается в нуль; $a_{ik}^{\pm}$ — коэффициенты деформации рассматриваемого ортотропного материала в главных направлениях упругости его 1—1, 2—2.

Решая (1.2) и (1.4) относительно напряжений и подставляя значения $e_s = \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1$, $e_\varphi = \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2$, получим:

I вариант

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^{2}} + \gamma\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^{2}} \\ \sigma_\varphi &= \frac{a_{11}^{+}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^{2}} + \gamma\,\frac{a_{11}^{+}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^{2}} + \gamma\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^{2}} \\ \sigma_\varphi &= \frac{a_{11}^{-}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^{2}} + \gamma\,\frac{a_{11}^{-}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{1.5}$$

II вариант

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_s = \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^2} \\
&\sigma_\varphi = \frac{a_{11}^{-}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{11}^{-}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^{-}a_{22} - a_{12}^2}
\end{aligned}
\right\}\quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_s = \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{22}\varkappa_1 - a_{11}\varkappa_2}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^2} \\
&\sigma_\varphi = \frac{a_{11}^{+}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{11}^{+}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}^{+}a_{22} - a_{12}^2}
\end{aligned}
\right\}\quad \text{при } \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}
\tag{1.6}
$$

где

$$
\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\,(w\cos\psi - u\sin\psi)
$$

$$
\varkappa_1 = -\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right), \qquad \varkappa_2 = \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right)\frac{\sin\psi}{r}
\tag{1.7}
$$

Из условия обращения в нуль напряжения σ_s, независимо от вариантов, получаем

$$
\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}
\tag{1.8}
$$

В (1.5)—(1.8) и в последующих формулах следует брать

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad \sigma_\varphi > 0 \quad a_{22} = a_{22}^{+} \\
&\text{при} \quad \sigma_\varphi < 0 \quad a_{22} = a_{22}^{-}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Используя обычные формулы [2,5], вычислим тангенциальные силы и изгибающие моменты и, учитывая, что в I варианте $M_s < 0$, а во II варианте $M_s > 0$, представим их в следующей единой форме:

$$
\begin{aligned}
T_s &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \mu(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2) + \mu P_{11}\frac{(a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2} \\
T_\varphi &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \mu(K_{12}\varkappa_1 + K_{22}\varkappa_2) + \mu P_{12}\frac{(a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2} \\
M_s &= D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + \mu(K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu P_{11}\frac{(a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2} \\
M_\varphi &= D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + \mu(K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu P_{12}\frac{(a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{22}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где

$$C_{11}=\frac{a_{22}[a_{22}(a_{11}^{+}+a_{11}^{-})-2a_{12}^{2}]}{(a_{11}^{+}a_{22}-a_{12}^{2})(a_{11}^{-}a_{22}-a_{12}^{2})}\frac{h}{2}, \quad C_{12}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}C_{11}$$

$$C_{22}=\frac{2a_{11}^{+}a_{11}^{-}a_{22}-a_{12}^{2}(a_{11}^{+}+a_{11}^{-})}{(a_{11}^{+}a_{22}-a_{12}^{2})(a_{11}^{-}a_{22}-a_{12}^{2})}\frac{h}{2}, \quad K_{22}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}K_{12}$$

$$K_{11}=\frac{a_{22}^{2}(a_{11}^{+}+a_{11}^{-})}{(a_{11}^{+}a_{22}-a_{12}^{2})(a_{11}^{-}a_{22}-a_{12}^{2})}\frac{h^{2}}{8}, \quad K_{12}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}K_{11} \tag{1.11}$$

$$P_{11}=\frac{a_{22}(a_{11}^{+}+a_{11}^{-})}{2(a_{11}^{+}a_{22}-a_{12}^{2})(a_{11}^{-}a_{22}-a_{12}^{2})}, \quad P_{12}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}P_{11}$$

$$D_{ik}=\frac{h^{2}}{12}C_{ik}, \quad \mu=\frac{a_{11}^{-}-a_{11}^{+}}{a_{11}^{-}+a_{11}^{+}}\,\mathrm{sign}\,M_{s}$$

Как видно из (1.11), выражения для усилий и моментов содержат нелинейные члены, которые при обычном ортотропном материале ($\mu=0$) превращаются в нуль.

Для составления уравнений равновесия, как и в классической теории осесимметрично нагруженных оболочек вращения, будем пользоваться функциями Мейснера V, W [1, 2].

Используя уравнения неразрывности деформаций и уравнения равновесия элемента оболочки для классической теории [1, 2], с учетом (1.10), (1.11) окончательно получим следующую систему двух уравнений относительно V и W:

$$\left(L_{s}+\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_{1}R_{2}}\right)V-\frac{h}{a_{22}}\frac{W}{R_{2}}-\mu\frac{h}{a_{22}}\frac{\sin\psi}{r}Q=$$
$$=\frac{1}{r}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_{1}}{ds}-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin\psi}{r}F_{1}\right) \tag{1.12}$$
$$\left(L_{s}-\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_{1}R_{2}}\right)W+\frac{1}{D_{11}}\frac{V}{R_{2}}+\mu\frac{K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_{s}\left(\frac{\sin\psi}{r}V\right)+$$
$$+\mu^{2}\frac{K_{11}}{D_{11}}\nabla_{s}Q+\mu\frac{a_{22}P_{11}K_{11}^{2}}{3C_{11}^{3}D_{11}}\nabla_{s}\left|\frac{(T_{s}-\mu C_{11}Q)^{3}}{(K_{11}\varkappa_{1}+K_{12}\varkappa_{2})^{2}}\right|=$$
$$=-\frac{1}{D_{11}}\left[\frac{F_{2}}{r}-\mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\nabla_{s}\left(\frac{F_{1}}{r}\right)\right]$$

где операторы ∇_{s} и L_{s} имеют вид

$$\nabla_{s}=\frac{d}{ds}-\frac{a_{22}+a_{12}}{a_{22}}\frac{\sin\psi}{r}$$

$$L_{s}=\frac{d^{2}}{ds^{2}}-\frac{\sin\psi}{r}\frac{d}{ds}-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin^{2}\psi}{r^{2}} \tag{1.13}$$

F_{1} и F_{2}—известные функции от внешней нагрузки [1, 2]

$$F_1(s) = \sin\psi \int_{s_0}^{s} rE_r ds + \cos\psi \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^{s} rE_z ds \right) \tag{1.14}$$

$$F_2(s) = -\cos\psi \int_{s_0}^{s} rE_r ds + \sin\psi \left(\frac{P_z^0}{2\pi} - \int_{s_0}^{s} rE_z ds \right)$$

где

$$E_r = Z\cos\psi - X\sin\psi, \quad E_z = Z\sin\psi + X\cos\psi$$

$$P_z^0 = 2\pi r_0 (T_s^0 \cos\psi_0 + N^0 \sin\psi_0) \tag{1.15}$$

и, кроме того,

$$Q = \frac{2(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)}{C_{11}(1+\delta)} \left[1 + \frac{2a_{22}P_{11}K_{11}T^*(T^* - \mu)}{C_{11}^2(1+\delta)} \right] \tag{1.16}$$

$$\delta = \left[1 + \frac{4\mu a_{22} P_{11} K_{11}}{C_{11}^2}(T^* - \mu) \right]^{1/2}, \quad T^* = \frac{T_s}{K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2}$$

В принятых обозначениях для изгибающих моментов имеем

$$M_s = -D_1 \frac{dW}{ds} + D_{12} W \frac{\sin\psi}{r} - \mu \frac{K_{11}}{C_{11}} \left(V \frac{\sin\psi}{r} - \frac{F_1}{r} \right) -$$

$$- \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{22} B_{11} K_{11}^2}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{1.17}$$

$$M_\varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}} M_s + \frac{h^3}{12a_{22}} W \frac{\sin\psi}{r}$$

Как видно, полученные уравнения (1.12) являются нелинейными относительно искомых функций.

2. Как частный случай изложенной в предыдущем пункте теории осесимметрично нагруженных оболочек вращения получим соответствующие уравнения для слабомоментной оболочки, когда напряжение σ_s, изменяясь по толщине оболочки по кусочно-линейному закону, не меняет свой знак. В этом случае все точки любого нормального элемента оболочки будут точками либо первого рода, либо второго рода. Соответствующие им законы упругости будут $\left(\text{при } -\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2} \right)$:

для точек первого рода

при $\sigma_s > 0,\ \sigma_\varphi > 0$ — при $\sigma_s < 0,\ \sigma_\varphi < 0$

$$e_s = a_{11}^+ \sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \qquad e_s = a_{11}^- \sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \tag{2.1}$$

$$e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}^+ \sigma_\varphi \qquad e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}^- \sigma_\varphi$$

для точек второго рода

при $\sigma_s > 0,\ \sigma_\varphi < 0$ — при $\sigma_s < 0,\ \sigma_\varphi > 0$

$$e_s = a_{11}^+ \sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \qquad e_s = a_{11}^- \sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \tag{2.2}$$

$$e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}^- \sigma_\varphi \qquad e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}^+ \sigma_\varphi$$

Закон упругости (1.5), (1.6) в рассматриваемом случае примет вид

$$
\begin{aligned}
\sigma_s &= c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2 + \gamma\,(c_{11}\varkappa_1 + c_{12}\varkappa_2) \\
\sigma_\varphi &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2 + \gamma\,(c_{12}\varkappa_1 + c_{22}\varkappa_2)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где

$$
c_{11} = \frac{a_{22}}{\Omega}, \quad c_{22} = \frac{a_{11}}{\Omega}, \quad c_{12} = -\frac{a_{12}}{\Omega}, \quad \Omega = a_{11}a_{12} - a_{12}^2 \tag{2.4}
$$

Здесь и дальше коэффициенты a_{ik} употребляются без верхних индексов; при этом необходимо брать:

для точек первого рода

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad \sigma_s > 0, \; \sigma_\varphi > 0 \qquad a_{11}^{+}, \; a_{22}^{+} \\
&\text{при} \quad \sigma_s < 0, \; \sigma_\varphi < 0 \qquad a_{11}^{-}, \; a_{22}^{+}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

для точек второго рода

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad \sigma_s > 0, \; \sigma_\varphi < 0 \qquad a_{11}^{+}, \; a_{22}^{-} \\
&\text{при} \quad \sigma_s < 0, \; \sigma_\varphi > 0 \qquad a_{11}^{-}, \; a_{22}^{+}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Для тангенциальных сил и моментов получим

$$
\begin{aligned}
T_s &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2, \quad M_s = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 \\
T_\varphi &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2, \quad M_\varphi = D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где

$$
C_{ik} = hc_{ik}, \quad D_{ik} = \frac{h^3}{12}\,c_{ik} \tag{2.8}
$$

Уравнения равновесия для рассматриваемой слабомоментной оболочки примут вид

$$
\left(L - \frac{c_{12}}{c_{11}}\,\frac{1}{R_1R_2}\right)W + \frac{12}{h_3c_{11}R_2}\,V = -\frac{12}{h^3c_{11}r}\,F_2 \tag{2.9}
$$

$$
\left(L + \frac{c_{12}}{c_{11}}\,\frac{1}{R_1R_2}\right)V - \frac{h\,(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}{c_{11}R_2}\,W = \frac{1}{r}\left(\frac{c_{12}}{c_{11}}\,\frac{dF_1}{ds} - \frac{c_{22}}{c_{11}}\,\frac{\sin\psi}{r}\,F_1\right)
$$

где для оператора L имеем

$$
L = \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\sin\psi}{r}\,\frac{d}{ds} - \frac{c_{22}}{c_{11}}\,\frac{\sin^2\psi}{r^2} \tag{2.10}
$$

Систему (2.9) аналогично классической теории оболочек вращения можно привести к одному уравнению относительно некоторой комплексной функции [1, 2, 5]

$$
L(U) + i\,\frac{\sqrt{12\,(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{hc_{11}}\,\frac{U}{R_2} = \frac{1}{r}\,\Phi(s) \tag{2.11}
$$

где

$$U = W + \lambda V, \quad \lambda = -\frac{i}{h^2}\sqrt{\frac{12}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}$$

$$\Phi(s) = \lambda\left(\frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{dF_1}{ds} - \frac{c_{22}}{c_{11}}\frac{\sin\psi}{r}F_1\right) - \frac{12}{hc_{11}}F_2 \tag{2.12}$$

При выводе уравнения (2.11) отброшены члены порядка h/R по сравнению с 1. Полученные уравнения (1.12) и (2.9) вместе с соответствующими граничными условиями достаточны для решения осесимметричных задач оболочек вращения, изготовленных из ортотропного разномодульного материала.

3. Рассмотрим задачу изгиба шарнирно-опертой круговой цилиндрической оболочки (длина—L, радиус—R) под действием синусоидальной нагрузки интенсивности

$$Z = -q_0 \sin\frac{\pi s}{L} \tag{3.1}$$

Граничные условия задачи таковы:

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad s = 0: \quad u = 0, \; w = 0, \; M_s = 0 \\ &\text{при} \quad s = L: \quad w = 0, \; T_s = 0, \; M_s = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

С учетом (3.1) для F_1 и F_2 получим

$$F_1 = 0, \quad F_2 = \frac{q_0 RL}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi s}{L}\right) \tag{3.3}$$

Легко убедиться, что в рассматриваемой оболочке не возникает внутреннее тангенциальное усилие T_s; кроме того, тангенциальная составляющая внешней поверхностной нагрузки отсутствует ($X = 0$). Учитывая это, а также (3.1) и (3.3), из (1.12) получим для рассматриваемой задачи следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2V}{ds^2} - \frac{h}{a_{22}R}W = 0 \\ &\frac{2\delta^2}{1+\delta}\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{V}{D_{11}R} = -\frac{q_0 L}{\pi D_{11}}\left(1 - \cos\frac{\pi s}{L}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Решение системы (3.4), согласованное с (3.2), будет

$$W = A\cos\frac{\pi s}{L}, \quad V = B\cos\frac{\pi s}{L} + C \tag{3.5}$$

где

$$A = -\frac{\pi q_0}{L\left(\dfrac{h}{a_{22}R^2} + \dfrac{2\delta^2 D_{11}}{1+\delta}\dfrac{\pi^4}{L^4}\right)}$$

$$B = -\frac{hL^2}{\pi^2 a_{22} R} A, \quad C = -\frac{q_0 RL}{\pi} \tag{3.6}$$

Знак изгибающего момента (1.16)

$$M_s = \frac{2\delta^2 D_{11}}{1+\delta} \frac{\pi}{L} A \sin \frac{\pi s}{L}$$

совпадает со знаком A. Как видно из (3.6), $A < 0$, следовательно, и $M_s < 0$. Поэтому, согласно (1.10),

$$\mu = \frac{a_{11}^{+} - a_{11}^{-}}{a_{11}^{+} + a_{11}^{-}}$$

Для перемещений точек срединной поверхности оболочки u, w из (1.7) и (1.10) с учетом (3.2) получим

$$u = -A\left(\eta - \frac{a_{12}}{a_{22} R} \frac{L^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \cos \frac{\pi s}{L}\right)$$
$$w = A \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi s}{L} \tag{3.7}$$

Остается выяснить вопрос коэффициента a_{22}, индекс которого связан со знаком напряжения σ_φ (1.8). Для этого прежде всего следует выяснить, действительно ли σ_φ не меняет знак по толщине оболочки (условие „в").

Из (1.5) для σ_φ получим

$$\sigma_\varphi = A \frac{\pi}{L}\left[\frac{L^2}{\pi^2 a_{22} R} + \frac{a_{12}(\eta - \gamma)}{a_{11}^{+} a_{22} - a_{12}^2}\right] \sin \frac{\pi s}{L} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \eta$$
$$\sigma_\varphi = A \frac{\pi}{L}\left[\frac{L^2}{\pi^2 a_{22} R} + \frac{a_{12}(\eta - \gamma)}{a_{11}^{-} a_{22} - a_{12}^2}\right] \sin \frac{\pi s}{L} \quad \text{при} \quad \eta < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{3.8}$$

Внимательно рассматривая формулы (3.8), можно установить, что если геометрические размеры оболочки удовлетворяют неравенству $hR/L^2 \leqslant 0.3$, то σ_φ не меняет знака по всей толщине оболочки. При этом знак его совпадает со знаком A, то есть $\sigma_\varphi < 0$ и здесь следует брать a_{22}^{-}.

Тогда для коэффициентов η, δ и D_{11}, входящих в расчетные формулы, будем иметь

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2} - \sqrt{a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2}}{\sqrt{a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2} + \sqrt{a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2}} \frac{h}{2}$$

$$\delta = \frac{2\sqrt{(a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2)(a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2)}}{(a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2) + (a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2)} \tag{3.9}$$

$$D_{11} = \frac{a_{22}^{-}\left[(a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2) + (a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2)\right]}{(a_{11}^{+} a_{22}^{-} - a_{12}^2)(a_{11}^{-} a_{22}^{-} - a_{12}^2)} \frac{h^3}{24}$$

Ниже приведена таблица расчетных величин рассмотренной задачи для материала с упругими характеристиками

$$a_{11}^{+} = \frac{4}{E} \quad a_{11}^{-} = \frac{2}{E} \qquad a_{12} = -\frac{0.2}{E}$$
$$a_{22}^{+} = \frac{5}{E} \quad a_{22}^{-} = \frac{3}{E}$$

Главные направления упругости материала 1—1, 2—2 совпадают с осями s, φ; принято $L = R = 10h$.

Для сравнения приведены соответствующие результаты, подсчитанные по классической теории, причем расчет ведется по модулям упругости при растяжении $E_i = E_i^-$.

	$k=\frac{E_1^-}{E_1^+}=2.06,\ k_1=\frac{E_2^-}{E_2^+}=1.63$	$k = k_1 = 1$
$M_{s\max}$	$-0.9016\, q_0 h^2$	$-1.014\, q_0 h^2$
$\sigma_{s\max}$	$-7.1053\, q_0 \quad \left(\gamma = +\frac{h}{2}\right)$ $+5.2494\, q_0 \quad \left(\gamma = -\frac{h}{2}\right)$	$\pm 6.084\, q_0 \quad \left(\gamma = \pm\frac{h}{2}\right)$
$\sigma_{\varphi\max}$	$-3.117\, q_0 \quad \left(\gamma = +\frac{h}{2}\right)$ $-2.759\, q_0 \quad \left(\gamma = -\frac{h}{2}\right)$	$-2.995\, q_0 \quad \left(\gamma = +\frac{h}{2}\right)$ $-2.762\, q_0 \quad \left(\gamma = -\frac{h}{2}\right)$
$w_{\max}$	$-2.816\cdot 10^{-3}\, q_0 R$	$-4.538\cdot 10^{-3}\, q_0 R$
$u_{\max}$	$3.2356\cdot 10^{-4}\, q_0 R$	$1.7954\cdot 10^{-4}\, q_0 R$

Как видно, расхождения в моментах составляют 12 %, в напряжениях— 5—16 %; перемещениях — 60 %-80 %, то есть учет разномодульности вносит довольно существенные коррективы в решение задачи.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 16 VI 1972

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ԳՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Բերված է օրթոգոնալ տարամոդուլ նյութից պատրաստված պտտման թաղանթների ընդհանուր տեսությունը առանցքասիմետրիկ բեռնավորման դեպքում, որը կառուցված է դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների վարկածի հիման վրա։ Որպես ընդհանուր տեսության մասնավոր դեպք դիտարկված է պտտման թաղանթների թույլ մոմենտային տեսությունը։

Լուծված է ազատ հենված գլանային թաղանթի ծռման խնդիրը սինուսոիդական ճնշման տակ։

THE GENERAL THEORY OF AXISYMMETRICALLY LOADED SHELLS OF REVOLUTION MADE OF ORTHOTROPIC HETEROMODULAR MATERIAL

N. H. ISABEKIAN

Summary

The general theory of axisymmetrically loaded shells of revolution made of orthotropic heteromodular material, developed in terms of the hypothesis of non-deformable normals, is presented. The theory of low-moment shells of revolution is considered as a particular case of the general theory.

The problem of a free-supported cylindrical shell bending due to sinusoidal load is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Амбарцумян С. А.* Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Изв. АН СССР. МТТ, № 3, 1969.
4. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Теория слабомоментных оболочек, изготовленных из разномодульного материала. Прикл. механика, т. 5, в. 5, 1969.
5. *Хачатрян А. А.* К теории осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из разномодульного материала. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
6. *Исабекян Н. Г.* Безмоментная теория оболочек, изготовленных из анизотропного разномодульного материала. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 6, 1969.