ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 4, 1973 Механика

П. А. МКРТЧЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ФЕРРОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе модели ферромагнетизма, предложенной Брауном, Мун и Пао И-синь разработали теорию для исследования устойчивости и колебания ферроупругих пластин в магнитном поле [1, 2]. Ими же были проведены эксперименты по устойчивости пластинки в статическом однородном перпендикулярном магнитном поле, хорошо подтверждающие теоретические результаты.

В дальнейшем по указанной теории был решен ряд задач [3, 4, 5] в предположении, что заданное магнитное поле и внешние нагрузки, действующие на пластинку, не зависят от времени.

В настоящей работе исследуется влияние динамики изменения во времени заданного магнитного поля и внешней нагрузки на устойчивость и колебание ферроупругой пластинки.

1. Пусть бесконечная изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к ортогональным координатам (x, y, z). Пластинка, изготовленная из магнитомягкого материала, находится в поперечном переменном во времени магнитном поле с вектором магнитной индукции $\overline{B}(0, 0, B_0)$, направленным вдоль оси Oz. На пластинку действует динамическое поверхностное давление $q(x, t) = q_0(t)e^{-ikx}$.

Для простоты предполагается, что все искомые величины не зависят от координаты y.

В отношении тонкой пластинки принимается гипотеза Кирхгофа. Исходя из тех же соображений, что в работах [1, 4], в дальнейшем влиянием токов проводимости и токов смещения будем пренебрегать.

В силу принятых предположений рассматриваемая задача сводится к совместному интегрированию следующих линеаризованных дифференциальных уравнений [1, 5]:

в области, занимаемой пластинкой $(-h \leqslant z \leqslant h)$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \chi B_0\int_{-h}^{h}\frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2}dz = q(x, t)$$

$$\nabla^2\varphi^{(i)} = 0 \qquad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\right) \tag{1.1}$$

в области вне пластинки $(|z| > h)$

$$\nabla^2\varphi^{(e)} = 0 \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях на поверхностях пластинки:

$$\mu_r \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial z}$$

$$\text{при } z = \pm h \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} + \frac{B_0}{\mu_0 \mu_r} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial w}{\partial x}$$

и начальных условиях

$$w = w_0 e^{-ikx}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = w_1 e^{-ikx} \tag{1.4}$$

Здесь w—прогиб, ρ—плотность, E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона материала пластинки, $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(e)}$—потенциалы возмущенного магнитного поля, индекс i обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое пластинкой), индекс e—к внешней области (пространство вне пластинки), χ—магнитная восприимчивость, $\mu_r = (\chi + 1)$—относительная магнитная проницаемость, μ_0—универсальная постоянная.

Решения уравнений (1.1) и (1.2) представим в виде

$$w(x, t) = f(t) e^{-ikx} \tag{1.5}$$

$$\varphi^{(i)}(x, z, t) = f_1(t) \Phi_1(z) e^{-ikx}$$

$$\varphi^{(e)}(x, z, t) = f_2(t) \Phi_2(z) e^{-ikx} \qquad \text{при } z > h$$

$$\varphi^{(e)}(x, z, t) = f_3(t) \Phi_3(z) e^{-ikx} \qquad \text{при } z < -h$$

где $k = \pi/\lambda$—волновое число, λ—длина полуволны, а все функции от z являются неизвестными и подлежат определению.

Подставляя (1.5) во второе уравнение (1.1) и в уравнение (1.2), заметим, что все искомые функции от z должны быть решением следующего уравнения:

$$\Phi''(z) - k^2 \Phi(z) = 0 \tag{1.6}$$

Найдя общее решение уравнения (1.6), удовлетворяя граничным условиям (1.3) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определим указанные неизвестные функции и, следовательно, потенциалы возмущенного магнитного поля $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(e)}$

$$\varphi^{(i)} = \frac{\chi B_0(t)}{\mu_0 \mu_r \Delta} f(t) e^{-ikx} \operatorname{ch} kz = \frac{\chi B_0(t) \operatorname{ch} kz}{\mu_0 \mu_r \Delta} w \quad \text{при } -h \leqslant z \leqslant h \tag{1.7}$$

$$\varphi^{(e)} = -\frac{\chi B_0(t) \operatorname{sh} kh}{\mu_0 \Delta} \begin{Bmatrix} e^{-k(z-h)} \\ e^{k(z+h)} \end{Bmatrix} f(t) e^{-ikx} =$$

$$= -\frac{\chi B_0(t) \operatorname{sh} kh}{\mu_0 \Delta} \begin{Bmatrix} e^{-k(z-h)} \\ e^{k(z+h)} \end{Bmatrix} w \quad \begin{matrix} \text{при } z > h \\ \text{при } z < -h \end{matrix}$$

Здесь $\Delta = \mu_r \operatorname{sh} kh + \operatorname{ch} kh$.

Подставляя выражения для w из (1.5) и $\varphi^{(i)}$ из (1.7) в первое уравнение (1.1), для нахождения $f(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$f''(t)+\Omega_0^2\left[1-\frac{2\chi^2 B_0^2(t)\,\mathrm{sh}\,kh}{Dk^3\mu_0\mu_r\Delta}\right]f(t)=\frac{1}{2\rho h}q_0(t) \tag{1.8}$$

где $\Omega_0^2=Dk^4/2\rho h$ — частота собственных колебаний пластины в вакууме при отсутствии магнитного поля.

В случае статической задачи ($q_0=0$, $B_0=\mathrm{const}$) из (1.8) получается, что пластинка теряет устойчивость при

$$B_0^2=B_{*0}^2=\frac{Dk^3\mu_0\mu_r\Delta}{2\chi^2\,\mathrm{sh}\,kh}$$

что совпадает с результатом, полученным в [1]. Обозначая $q_0(t)=2\rho hq_1(t)$, уравнение (1.8) представим в виде

$$f''(t)+\Omega_0^2\left[1-\frac{B_0^2(t)}{B_{*0}^2}\right]f(t)=q_1(t) \tag{1.9}$$

при начальных условиях

$$f(0)=w_0,\quad f'(0)=w_1 \tag{1.10}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задания закона изменения внешнего магнитного поля и нагрузки во времени.

2. Предположим, что магнитное поле изменяется по линейному закону

$$B_0^2(t)=\alpha tB_1^2 \tag{2.1}$$

где α характеризует скорость изменения интенсивности магнитного поля.

В этом случае уравнение (1.9) принимает вид

$$\frac{d^2f}{dt^2}+\Omega_0^2(1-\gamma t)f(t)=q_1(t),\quad \gamma=\alpha B_1^2/B_{*0}^2 \tag{2.2}$$

В квазистационарном приближении (изменения магнитного поля и поверхностной нагрузки такие, что инерционными членами можно пренебречь) для $f(t)$ получим

$$f(t)=\frac{q_1(t)}{\Omega_0^2(1-\gamma t)} \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3), в момент $t=t_{\text{кр}}$ магнитное поле принимает критическое значение

$$B_0^2=B_{*0}^2=\frac{Dk^3\mu_0\mu_r\Delta}{2\chi^2\,\mathrm{sh}\,kh}$$

при котором пластинка теряет устойчивость в смысле Эйлера.

Принимая $t_1 = \gamma t$, уравнение (2.2) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} + \Omega^2 (1 - t_1) f = \frac{1}{\gamma^2} q_1(t_1), \quad \Omega = \Omega_0 / \gamma \tag{2.4}$$

Рассмотрим отдельно два случая: $1 - t_1 \geqslant 0$, то есть докритическое движение, и $1 - t_1 \leqslant 0$, то есть послекритическое движение.

В первом случае, принимая $1 - t_1 = \tau$, для $f(\tau)$ получим

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \Omega^2 \tau f = \frac{1}{\gamma^2} q_1(\tau) \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.5) представляется через бесселевы функции первого рода

$$f(\tau) = c_1 f_1(\tau) + c_2 f_2(\tau) + f_*(\tau) \tag{2.6}$$

где

$$f_1(\tau) = \sqrt{\tau}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega \tau^{3/2}\right), \quad f_2(\tau) = \sqrt{\tau}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega \tau^{3/2}\right)$$

$$f_*(\tau) = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,\gamma^2}\left[f_2 \int_0^{\tau} q_1(\tau) f_1(\tau)\, d\tau - f_1 \int_0^{\tau} q_1(\tau) f_2(\tau)\, d\tau \right] \tag{2.7}$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 находятся из начальных условий (1.10)

$$c_1 = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left[w_0 f_2'(1) - w_1 f_2(1) + \frac{1}{\gamma^2}\int_0^1 q_1(\tau) f_2(\tau)\, d\tau \right.$$

$$\tag{2.8}$$

$$c_2 = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left[w_1 f_1(1) - w_0 f_1(1) - \frac{1}{\gamma^2}\int_0^1 q_1(\tau) f_1(\tau)\, d\tau \right.$$

Функции (2.6) изменяются периодически, так что движение системы на протяжении первого этапа имеет колебательный характер.

Представляет интерес значение $f(\tau)$ в момент $\tau = 0$ (что соответствует $t = t_{кр}$)

$$f(t_{кр}) = -\frac{2\pi}{3\sqrt[6]{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{\Omega}}\left[w_1 f_1(1) - w_0 f_1(1) - \frac{1}{\gamma^2}\int_0^1 q_1(\tau) f_1(\tau)\, d\tau \right]$$

то есть в момент $t = t_{кр}$ прогиб пластинки—конечная величина и зависит от скорости изменения интенсивности магнитного поля. Таким образом, в этом случае сила инерции стабилизирует пластинку, и в момент $t = t_{кр}$ пластинка не теряет устойчивости, получается своего рода прохождение через критическое значение магнитного поля.

Во втором случае, принимая $t_1 - 1 = \theta$, для $f(\theta)$ получим

$$\frac{d^2f}{d\theta^2} - \Omega^2\theta f = \frac{1}{\gamma^2} q_1(\theta) \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.9) с учетом начальных условий, получаемых из (2.6) при $t = t_{кр}$, будет

$$f(\theta) = -c_1 \sqrt{\theta}\, I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right) + c_2\sqrt{\theta}\, I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right) -$$

$$-\frac{2\pi\sqrt{\theta}}{3\sqrt{3}\gamma^2}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right)\int_0^\theta q_1(\theta)\sqrt{\theta}\, I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right) - \right.$$

$$\left. - I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right)\int_0^\theta q_1(\theta)\sqrt{\theta}\, I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right) d\theta\right] \tag{2.10}$$

где $I_{\pm 1/3}\left(\frac{2}{3}\Omega\theta^{3/2}\right)$ — модифицированные функции Бесселя.

Из (2.10) видно, что амплитуда прогиба будет при $t \geqslant t_{кр}$ неограниченно возрастать.

3. Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка отсутствует, а магнитное поле изменяется по закону

$$B_0^2(t) = B_1^2 \sigma_0(t - t_0) \tag{3.1}$$

где $\sigma_0(t - t_0)$ — единичная функция Хевисайда нулевого порядка

$$\sigma_0(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ 1 & \text{при } t > t_0 \end{cases}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (1.9), получим

$$f''(t) + \Omega_0^2[1 - a^2\sigma_0(t - t_0)] f(t) = 0, \quad a^2 = B_1^2/B_{*0}^2 \tag{3.2}$$

Решение уравнения (3.2) при начальных условиях (1.10) в интервале $[0, t_0]$ будет

$$f(t) = w_0 \cos\Omega_0 t + \frac{w_1}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t \tag{3.3}$$

Общее решение уравнения (3.2) в интервале $[t_0, t]$ имеет вид

$$f(t) = A_1 \cos\Omega_0\sqrt{1-a^2}\, t + A_2 \sin\Omega_0\sqrt{1-a^2}\, t \tag{3.4}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные интегрирования.

Применяя естественное предположение о непрерывности прогиба в момент $t = t_0$, то есть

$$f_+(t_0) = f_-(t_0) \tag{3.5}$$

интегрируя уравнение (3.2) в пределах $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим также

$$f'_{+}(t_0)=f'_{-}(t_0) \tag{3.6}$$

Используя начальные условия (3.5) и (3.6), определяем постоянные A_1 и A_2, входящие в решение (3.4)

$$A_1=\left(w_0\cos\Omega_0 t_0+\frac{w_1}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t_0\right)\cos\Omega_0\sqrt{1-a^2}\,t_0+$$
$$+\left(w_0\sin\Omega_0 t_0-\frac{w_1}{\Omega_0}\cos\Omega_0 t_0\right)\frac{\sin\Omega_0\sqrt{1-a^2}\,t_0}{\sqrt{1-a^2}} \tag{3.7}$$
$$A_2=\left(w_0\cos\Omega_0 t+\frac{w_1}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t_0\right)\sin\Omega_0\sqrt{1-a^2}\,t_0-$$
$$-\left(w_0\sin\Omega_0 t_0-\frac{w_1}{\Omega_0}\cos\Omega_0 t_0\right)\frac{\cos\Omega_0\sqrt{1-a^2}\,t_0}{\sqrt{1-a^2}}$$

Рассмотрим случай, когда начальные условия такие, что

$$w_0\sin\Omega_0 t_0-\frac{w_1}{\Omega_0}\cos\Omega_0 t_0\neq 0 \tag{3.8}$$

Тогда при $B_1=B_{*0}$ решение уравнения (3.2) принимает вид

$$f(t)=w_0\cos\Omega_0 t_0+\frac{w_1}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t+\Omega_0(t-t_0)\left(\frac{w_1}{\Omega_0}\cos\Omega_0 t_0-w_0\sin\Omega_0 t_0\right) \tag{3.9}$$

отсюда видно, что, когда в момент $t=t_0$ внезапно прилагается магнитное поле с напряженностью $B_1=B_{*0}$, прогибы пластинки при условии (3.8) в последующем неограниченно возрастают.

Если же начальные условия при $t=0$ такие, что

$$w_0\sin\Omega_0 t_0-\frac{w_1}{\Omega_0}\cos\Omega_0 t_0=0$$

то при $B_1=B_{*0}$ $\qquad f(t)=\dfrac{w_0}{\cos\Omega_0 t_0}$

то есть прогиб пластинки—конечная величина.

Итак, когда магнитное поле принимает статическое критическое значение, то в зависимости от начальных условий прогибы либо бесконечно возрастают по линейному закону, либо остаются постоянными с течением времени. В последнем случае пластинка принимает новое равновесное состояние. Таким образом, при динамическом изменении магнитного поля (3.1) пластинка теряет устойчивость при статическом критическом значении магнитного поля, отличающемся от статического случая только характером потери устойчивости.

При $B_1 > B_{*0}$ решение (3.4) выразится с помощью гиперболических функций, и с течением времени прогибы будут неограниченно возрастать по экспоненциальному закону.

4. Магнитное поле является стационарным, поверхностное давление изменяется по времени.

Рассмотрим два случая:

$$\text{а)}\quad q_1(t) = F_0 \sin \beta t \tag{4.1}$$

В этом случае представляет интерес, когда частота внешнего воздействия β совпадает с частотой колебаний $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \dfrac{\chi B_0^2 k \operatorname{sh} kh}{\rho h \mu_0 \mu_r}}$. Тогда наступает резонанс при критическом значении напряженности магнитного поля

$$B_{\text{кр}}^2 = \frac{\rho h \mu_0 \mu_r \Delta}{\chi^2 k \operatorname{sh} kh} (\Omega_0^2 - \beta^2)$$

которое меньше, чем статическое критическое значение напряженности магнитного поля B_{*0}.

$$\text{б)}\quad q_1(t) = F_0 \delta(t) \tag{4.2}$$

где $\delta(t)$—функция Дирака.

При этом начальные условия для уравнения (1.9) должны иметь вид [6]

$$f(0) = w_0, \quad f'(0) = F_0$$

Решение уравнения (1.9) с указанными начальными условиями будет

$$f(t) = \begin{cases} w_0 \cos \Omega t + \dfrac{F_0}{\Omega} \sin \Omega t & \text{при} \quad t > 0 \\ w_0 & \text{при} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 - \frac{\chi B_0^2 k \operatorname{sh} kh}{\rho h \mu_0 \mu_r \Delta} \tag{4.3}$$

Как видно из (4.3), при $B = B_{*0}$ решение неограниченно возрастает по линейному закону.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 VII 1972

Գ. Հ. ՄԻՐՏՉՅԱՆ

ՖԵՐՈԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է անվերջ չափերի ֆեռոառաձգական սալի տատանում-ները և կայունությունը համասեռ, ըստ ժամանակի փոփոխական, մագնիսա-

կան դաշտում։ Սալի վրա ազդում է դինամիկական մակերևույթային ճնշում։ Մագնիսական դաշտի ինդուկցիայի $\overline{B}$ *վեկտորը ուղղված է սալի միջին մակերևույթի նորմալով։*

Սալի արտաքին տիրույթում ենթադրվում է վակուում։

Որոշված են սալի կայունությունը բնորոշող կրիտիկական պարամետրերը։

STABILITY AND VIBRATIONS OF FERROELASTIC PLATE IN A VARIATIONAL MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A ferroelastic plate of infinite extention placed in a uniform dynamic magnetic field, under the action of a dynamic surface pressure is considered. The magnetic field is normal to the median surface of the plate. The space outside the plate is vacuum.

The critical parameters of the stability of the plate are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мун, Пао И-синь.* Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки. Прикл. механика, № 1, 1968. Изд. „Мир".
2. *Мун, Пао И-синь.* Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле. Прикл. механика, № 1, 1969. Изд. „Мир".
3. *Мун.* Механика ферроупругих пластинок в однородном магнитном поле. Прикл. механика, № 1, 1970. Изд. „Мир".
4. *Kaliski S.* Quasi-static approximation to the equation of elastic vibrations in a ferromagnetic plate under the action of a transverse magnetic field. Bull. Acad. Pol. Sci., Serie Sci. Techn., v. 17, № 9, 1969.
5. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Устойчивость ферромагнитной пластинки в потоке газа при наличии магнитного поля. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
6. *Дечь Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд. „Наука", М., 1965.