ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVI, № 3, 1973 Механика

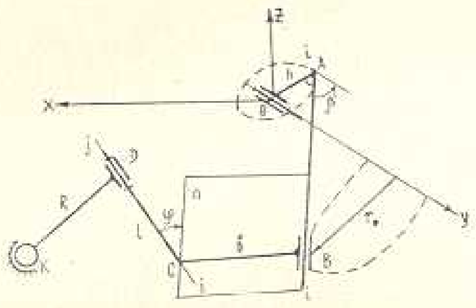
К. Х. ШАХБАЗЯН, А. А. ОГАНЕСЯН

К СИНТЕЗУ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА С ДВУМЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ, ОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПАРАМИ

Рассматривается общая задача синтеза пространственного четырехзвенника (ВЦВС) по пяти направлениям нормали плоскости, проходящей через ось цилиндрической пары (ii) и прямую, являющуюся наикратчайшим расстоянием между осями вращательной и цилиндрической кинематических пар.

Подобные задачи для других видов пространственных четырехзвенных механизмов решались авторами данной статьи [1] и [2].

Кинематическая схема механизма показана на фиг. 1, где ведущим является звено OA.



Фиг. 1

Параметрами звеньев будут:

1. Для звена OAB (ВЦ): $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ — направляющие косинусы оси (ii), где β' одновременно является углом между перекрещивающимися осью (ii) и осью вращательной пары O, которая перпендикулярна к плоскости xoz, то есть совпадает с координатной осью oy; r_0 — радиус вращения начального положения точки B_i; h — наикратчайшее расстояние между осями.

2. Для звена BCD (ЦВ): φ — угол между перекрещивающимися осями (ii) и (jj); b — кратчайшее расстояние между ними; l — расстояние от точки C до точки D.

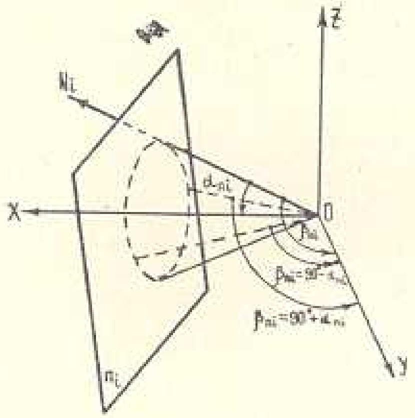
3. Для звена DK (ВС) координаты точки K — x_k; y_k; z_k.

Следовательно, механизм определяется десятью абсолютными параметрами.

При синтезе такого механизма по пяти направлениям плоскости задаемся параметрами h, b, β', φ, r_0, а остальные пять параметров считаем искомыми.

Постановка задачи.

1. Заданы направления нормали плоскости Π $N_i(\cos\alpha_{ni}, \cos\beta_{ni})$ где, если $\alpha_n = \alpha_{ni}$, то $\beta_{ni} = (90° - \alpha_{ni}) \div (90° + \alpha_{ni})$ (фиг. 2). Чтобы не



Фиг. 2

нарушилась последовательность занимаемых положений плоскости, надо учесть следующие условия:

$$\alpha_{n1} > \alpha_{n2} > \cdots > \alpha_{n5}$$

$$\beta_{n1} > \beta_{n2} > \cdots > \beta_{n5}$$

или

$$\alpha_{n1} < \alpha_{n2} < \cdots < \alpha_{n5}$$

$$\beta_{n1} < \beta_{n2} < \cdots < \beta_{n5}$$

2. Даны углы β', φ и кратчайшие расстояния h и b. При выборе угла β' нужно учесть, что

$$\beta' = (90° - \beta_{ni}) \div (90° + \beta_{ni})$$

3. Даны радиусы вращения r_i точки B_i в соответетствующих положениях.

Решение задачи. Решим задачу методом последовательного синтеза. Направляющие косинусы оси ii $(\cos\alpha_i' \cos\gamma_i')$ и прямой BC $(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ определяем по формулам:

$$\begin{gathered}\cos^2\alpha_i' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma_i' = 1 \\ \cos\alpha_i' \cos\alpha_{ni} + \cos\beta' \cos\beta_{ni} + \cos\gamma_i' \cos\gamma_{ni} = 0 \\ \cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \\ \cos\alpha_i' \cos\alpha_i + \cos\beta' \cos\beta_i + \cos\gamma_i' \cos\gamma_i = 0\end{gathered} \qquad (1)$$

$$\cos\alpha_i \cos\alpha_{ni} + \cos\beta_i \cos\beta_{ni} + \cos\gamma_i \cos\gamma_{ni} = 0 \tag{2}$$

$$(i = 1 \div 5)$$

Имея для каждого положения радиус вращения r_i, определяем координаты B_{xi}, B_{zi} из системы уравнений

$$B_{xi}^2 + B_{zi}^2 = r_i^2 \tag{3}$$

$$h = \frac{|B_{xi}\cos\gamma_i' - B_{zi}\cos\alpha_i'|}{\sqrt{1 - \cos^2\beta'}}$$

а ординаты B_{yi}—из уравнений однополого гиперболоида вращения

$$B_{xi}^2 - B_{yi}^2 + E_{zi}^2 = h^2 \tag{4}$$

Имея координаты точки B_i и углы наклона прямой BC, определяем координаты точки C

$$\begin{aligned} C_{xi} &= B_{xi} \pm b\cos\alpha_i \\ C_{yi} &= B_{yi} \pm b\cos\beta_i \\ C_{zi} &= B_{zi} \pm b\cos\gamma_i \end{aligned} \tag{5}$$

$$(i = 1 \div n)$$

где n—число заданных направлений нормали плоскости.

Имея параметры b, x_c, y_c, z_c и φ, определяем направляющие косинусы (α'', β'', γ'') оси (jj) из системы уравнений

$$b = \frac{\begin{vmatrix} C_{xi}' - B_{xi}' & C_{yi}' - B_{yi}' & C_{zi}' - B_{zi}' \\ \cos\alpha_i' & \cos\beta' & \cos\gamma_i' \\ \cos\alpha_i'' & \cos\beta_i'' & \cos\gamma_i'' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta' & \cos\gamma_i' \\ \cos\beta_i'' & \cos\gamma_i'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma_i' & \cos\alpha_i' \\ \cos\gamma_i'' & \cos\alpha_i'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha_i' & \cos\beta' \\ \cos\alpha_i'' & \cos\beta_i'' \end{vmatrix}^2}} \tag{6}$$

$$\cos\alpha_i''\cos\alpha_i' + \cos\beta_i''\cos\beta' + \cos\gamma_i''\cos\gamma_i' = \cos\varphi$$

$$\cos^2\alpha_i'' + \cos^2\beta_i'' + \cos^2\gamma_i'' = 1$$

где

$$\begin{aligned} C_{xi}' &= C_{xi} \pm \cos\alpha_i'' \\ C_{yi}' &= C_{yi} \pm \cos\beta_i'' \\ C_{zi}' &= C_{zi} \pm \cos\gamma_i'' \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} B_{xi}' &= B_{xi} \pm \cos\alpha_i' \\ B_{yi}' &= B_{yi} \pm \cos\beta' \\ B_{zi}' &= B_{zi} \pm \cos\gamma_i' \end{aligned} \tag{8}$$

Координаты точки D определяем из уравнений

$$D_{xi} = C_{xi} \pm l \cos \alpha_i^* \\ D_{yi} = C_{yi} \pm l \cos \beta_i^* \\ D_{zi} = C_{zi} \pm l \cos \gamma_i^* \tag{9}$$

$$(i = 1 \div 5)$$

Центр вращения точки D находится в точке пересечения плоскостей, проходящих через середины отрезков между точками D_i и перпендикулярных к этим отрезкам. Уравнение плоскости будет:

$$(D_{x(i+1)} - D_{xi})(2X - D_{x(i+1)} - D_{xi}) + (D_{y(i+1)} - D_{yi})(2Y - D_{y(i+1)} - D_{yi}) + \\ + (D_{z(i+1)} - D_{zi})(2Z - D_{z(i+1)} - D_{zi}) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) \tag{10}$$

Подставляя (9) в уравнение (10), при заданных пяти направляющих нормалях, получаем четыре уравнения вида

$$(A_j \pm lB_j)\,X + (C_j \pm lD_j)\,Y + (E_j \pm lF_j)Z + M_j \pm lN_j = 0 \tag{11}$$

где

$$A_j = C_{x(i+1)} - C_{xi} \qquad B_j = \cos \alpha_{i+1}^* - \cos \alpha_i^*$$

$$C_j = C_{y(i+1)} - C_{yi} \qquad D_j = \cos \beta_{i+1}^* - \cos \beta_i^*$$

$$E_j = C_{z(i+1)} - C_{zi} \qquad F_j = \cos \gamma_{i+1}^* - \cos \gamma_i^*$$

$$M_{j-1} = \frac{\rho_{i-1} - \rho_i}{2} \qquad \text{где} \quad \rho_i = C_{xi}^2 + C_{yi}^2 + C_{zi}^2 \tag{12}$$

$$N_{j-1} = C_{x(i-1)} \cos \alpha_{i-1}^* + C_{y(i-1)} \cos \beta_{i-1}^* + C_{z(i-1)} \cos \gamma_{i-1}^* - \\ - C_{xi} \cos \alpha_i^* - C_{yi} \cos \beta_i^* - C_{zi} \cos \gamma_i^*$$

Количество уравнений (10) на единицу меньше числа заданных направлений нормалей плоскостей.

Необходимым и достаточным условием нахождения пяти точек D_i $(i = 1 \div 5)$ на сфере является то, что уравнения (11) должны быть совместимы. Условие совместимости требует, чтобы определитель квадратных матриц данной системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} A_1 + lB_1 & C_1 + lD_1 & E_1 + lF_1 & M_1 + lN_1 \\ A_2 + lB_2 & C_2 + lD_2 & E_2 + lF_2 & M_2 + lN_2 \\ A_3 + lB_3 & C_3 + lD_3 & E_3 + lF_3 & M_3 + lN_3 \\ A_4 + lB_4 & C_4 + lD_4 & E_4 + lF_4 & M_4 + lN_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Отсюда получаем относительно длины l уравнение четвертой степени

$$kl^4 + ml^3 + nl^2 + pl + q = 0 \tag{14}$$

где

$$k = \begin{vmatrix} B_1 & D_1 & N_1 & F_1 \\ B_2 & D_2 & N_2 & F_2 \\ B_3 & D_3 & N_3 & F_3 \\ B_4 & D_4 & N_4 & F_4 \end{vmatrix}$$

$$m = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & N_1 & F_1 \\ A_2 & D_2 & N_2 & F_2 \\ A_3 & D_3 & N_3 & F_3 \\ A_4 & D_4 & N_4 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & B_1 & F_1 & N_1 \\ C_2 & B_2 & F_2 & N_2 \\ C_3 & B_3 & F_3 & N_3 \\ C_4 & B_4 & F_4 & N_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_1 & N_1 & D_1 & B_1 \\ E_2 & N_2 & D_2 & B_2 \\ E_3 & N_3 & D_3 & B_3 \\ E_4 & N_4 & D_4 & B_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 & F_1 & B_1 & D_1 \\ M_2 & F_2 & B_2 & D_2 \\ M_3 & F_3 & B_3 & D_3 \\ M_4 & F_4 & B_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

$$n = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & M_1 & F_1 \\ A_2 & D_2 & M_2 & F_2 \\ A_3 & D_3 & M_3 & F_3 \\ A_4 & D_4 & M_4 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & N_1 & E_1 \\ A_2 & D_2 & N_2 & E_2 \\ A_3 & D_3 & N_3 & E_3 \\ A_4 & D_4 & N_4 & E_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & N_1 & F_1 \\ A_2 & C_2 & N_2 & F_2 \\ A_3 & C_3 & N_3 & F_3 \\ A_4 & C_4 & N_4 & F_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & N_1 & E_1 \\ B_2 & C_2 & N_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & N_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & N_4 & E_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & M_1 & F_1 \\ B_2 & C_2 & M_2 & F_2 \\ B_3 & C_3 & M_3 & F_3 \\ B_4 & C_4 & M_4 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & D_1 & M_1 & E_1 \\ B_2 & D_2 & M_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & M_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & M_4 & E_4 \end{vmatrix}$$

$$p = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & N_1 & E_1 \\ A_2 & C_2 & N_2 & E_2 \\ A_3 & C_3 & N_3 & E_3 \\ A_4 & C_4 & N_4 & E_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & M_1 & F_1 \\ A_2 & C_2 & M_2 & F_2 \\ A_3 & C_3 & M_3 & F_3 \\ A_4 & C_4 & M_4 & F_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & M_1 & E_1 \\ A_2 & D_2 & M_2 & E_2 \\ A_3 & D_3 & M_3 & E_3 \\ A_4 & D_4 & M_4 & E_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & M_1 & E_1 \\ B_2 & C_2 & M_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & M_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & M_4 & E_4 \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$q = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & M_1 & E_1 \\ A_2 & C_2 & M_2 & E_2 \\ A_3 & C_3 & M_3 & E_3 \\ A_4 & C_4 & M_4 & E_4 \end{vmatrix}$$

После определения l из любых трех уравнений системы (10) вычисляем координаты точки $K(X_k;\ Y_k;\ Z_k)$.

Далее определяем длину коромысла

$$R = \sqrt{(D_{xi} - X_k)^2 + (D_{yi} - Y_k)^2 + (D_{zi} - Z_k)^2} \tag{16}$$

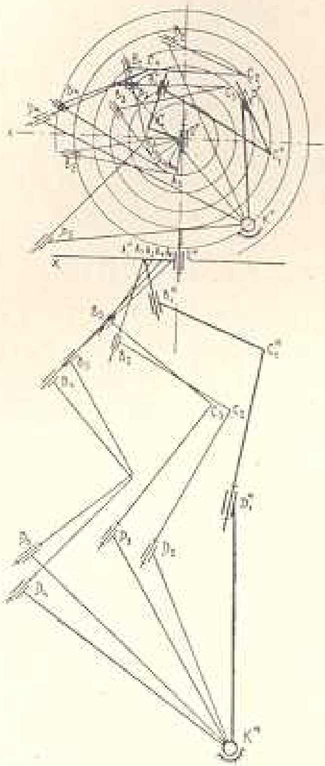
Пример.

Даны

$$h=0.4,\quad b=1.5,\quad \beta'=60^\circ02'46'',\quad \varphi=45^\circ29'34''$$

$$r_1=0.6,\quad r_2=1,\quad r_3=0.8,\quad r_4=1.4,\quad r_5=1.2$$

№№ пп	1	2	3	4	5
$\alpha_{\text{п}}$	59°52′27″	65°46′32″	72°32′11″	80°23′10″	89°19′27″
$\beta_{\text{п}}$	36°50′28″	43°56′45″	50°08′02″	61°14′57″	79°35′02″



Фиг. 3

Координаты точки B_i и значения направляющих косинусов прямых AB, BC, и CD приведены в табл. 1, 2, а значения коэффициентов—в табл. 3.

Таблица 1

Вел. / Положение	B_x	B_y	B_z	$\cos\alpha'$	$\cos\gamma'$
1	0.2507252	0.4472134	0.5451026	−0.25490671	0.8280834
2	0.6509604	0.9165152	0.7591117	0.25383816	0.8284116
3	0.7428709	0.6928203	0.2968891	0.5359954	0.6807411
4	1.3651487	1.3416408	0.3104338	0.7547507	0.4255008
5	1.1706290	1.1313708	−0.2638706	0.8603905	0.1021159

Таблица 2

Велич. / Положение	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\cos\alpha''$	$\cos\beta''$	$\cos\gamma''$
1	−0,8265101	0,3319931	−0,4546005	0,1778322	0,9213182	0,345758
2	−0,8759063	0,4819746	−0,0221043	0,4723232	0,8625113	0,181618
3	−0,7890809	0,5829389	0,1937331	0,5900049	0,8069593	−0,026669
4	−0,6343966	0,7206514	0,279647	0,6482062	0,6930162	−0,315527
5	−0,5094987	0,8473552	0,149667	0,6113803	0,4792291	−0,629725

Таблица 3

Велич. / Положение	A	B	C	D	E	F	M	N
1	0,3261411	0,2941911	0,6942737	−0,0588068	0,8627532	−0,16414	−0,8820038	−0,5851606
2	0,2221483	0,1176817	−0,0722474	−0,055552	−0,1384667	−0,208287	0,3293592	0,2438336
3	0,8543044	0,0582013	0,8553883	−0,1139431	0,1424159	−0,288858	−1,7886261	−0,7276993
4	−0,0071729	−0,0368259	−0,0202143	−0,2137871	−0,7692744	−0,314198	0,3173130	0,2921298

Далее, по формулам (13) определяем коэффициенты

$$k=0.0073243$$
$$m=0.0129398$$
$$n=0.0468455$$
$$p=-0.0667134$$
$$q=-0.1912732$$

В конкретном примере уравнение (14) имеет два действительных решения

$$l_1=1.817915$$
$$l_2=-1.4647330$$

Из трех уравнений системы (11) определяем координаты центра вращения коромысла

$$X_1=-0.7787435 \qquad X_2=0.7237680$$
$$Y_1=5.3830081 \qquad Y_2=0.2057660$$
$$Z_1=-0.9458160 \qquad Z_2=-0.055747$$

Для конструктивных соображений необходимо из уравнения (16) определить также длину коромысла R:

$$R_1=3.11600 \qquad R_2=2.14750$$

Полученный механизм для значения R_1 показан на фиг. 3.

Ереванский государственный университет

Поступила 19 VI 1972

Կ. Խ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ, Հ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՈՒՂՂՈՐԴ ԵՐԿՈՒ ՊՏՏՄԱՆ, ՄԵԿ ԳԼԱՆԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԿ ԳՆԴԻԿԱՅԻՆ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ, ՔԱՌՕՂԱԿԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում տրված է տարածական քառօղակի մեխանիզմի սինթեզը (պտտման-գլանական-պտտման-գնդային) ըստ հարթության նորմալի տրված հինգ ուղղությունների։ Հարթությունն անցնում է գլանական զույգի առանցքով և ուղիղով, որը հանդիսանում է գլանական և երկրորդ պտտման զույգերի առանցքների ամենակարճ հեռավորությունը։

Խնդիրը լուծված է հաջորդաբար սինթեզման միջոցով։

Նորմալի տրված հինգ ուղղությունների դեպքում ստացված է 4-րդ աստիճանի հավասարում երկրորդ պտտման զույգի առանցքի երկարության նկատմամբ։

Լուծված է թվային օրինակ։

ON SYNTHESIS OF A SPATIAL DIRECTOR FOUR-LINK MECHANISM WITH TWO ROTARY, ONE CYLINDRICAL AND ONE SPHERICAL PAIRS

K. KH. SHAKHBASIAN, H. A. HOVANESIAN

Summary

A solution is presented to the problem on synthesis of a spatial four-link mechanism (rotary-cylindrical-rotary-spherical) in five directions of the normal plane, passing through the axis of a cylindrical pair and a straight line, the shortest distance between the second rotary and cylindrical axes. The problem is solved by the method of logical synthesis. For the given five directions an equation of the fourth power is derived with respect to the axis length of the second rotary pair.

A numerical example is solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганесян А. А., Шахбазян К. Х.* Синтез пространственного четырехзвенника по заданным направлениям нормали шатунной плоскости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 1, 1971.

2. *Оганесян А. А.* К вопросу синтеза пространственного четырехзвенного механизма (ВПСС) по направлениям нормали шатунной плоскости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 2, 1972.