ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 3, 1973 Механика

И. А. ВЕКОВИЩЕВА

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ

В работе [1] найдено, что задача об изгибе тонкой пьезоэлектрической пластинки сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $w=w(x_1, x_2)$—прогиба срединной плоскости и $V=V(x_1, x_2)$—распределения потенциала срединной плоскости. Исходные уравнения в системе единиц $CGSE$ запишутся в виде

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi}\frac{2}{h_0}L_3 V = q, \quad L_3 w + \frac{2}{h_0}L_2 V = 0 \tag{1}$$

Здесь линейные операторы с частными производными

$$L_4 = B_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(B_{12}+2B_{33})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + B_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$$

$$L_3 = B_{14}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (B_{24}+2B_{35})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \tag{2}$$

$$L_2 = B_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$q=q(x_1, x_2)$ суть интенсивность распределенной нагрузки, действующей на пластинку нормально к срединной плоскости в ее деформированном состоянии. В системе CGSE постоянные коэффициенты B_{ij} связаны с толщиной пластинки h_0 и материальными константами—модулями упругости s_{ij}^D, диэлектрическими восприимчивостями $\gamma_{kl}^{\varepsilon}$ и пьезоэлектрическими модулями g_{kj}—следующими соотношениями (надстрочные индексы D и ε для сокращения записи будут опущены):

$$B_{ij} = A_{ij}\frac{h_0^3}{12},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_{66} & -\frac{1}{4\pi}g_{26} \\ g_{26} & \gamma_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & -\frac{1}{4\pi}g_{11} \\ s_{12} & s_{22} & -\frac{1}{4\pi}g_{12} \\ g_{11} & g_{12} & \gamma_{11} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{22} & -\frac{1}{4\pi}g_{12} \\ g_{12} & \gamma_{11} \end{vmatrix}, \qquad A_{12} = -\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{12} & -\frac{1}{4\pi}g_{11} \\ g_{12} & \gamma_{11} \end{vmatrix}$$

$$A_{22}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{11} & -\frac{1}{4\pi}g_{11} \\ g_{11} & \gamma_{11}\end{vmatrix}, \qquad A_{14}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{22} \\ g_{11} & g_{12}\end{vmatrix}$$

$$A_{24}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{11} \\ g_{12} & g_{11}\end{vmatrix}, \qquad A_{44}=\frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22}\end{vmatrix} \tag{3}$$

$$A_{33}=\frac{\gamma_{22}}{\Delta_1}, \qquad A_{35}=-\frac{g_{26}}{\Delta_1}, \qquad A_{55}=\frac{s_{66}}{\Delta_1}$$

Целью задачи является определение двух неизвестных функций w и V, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (1) и следующим граничным условиям

при $x_1=0,\ x_1=l$ $\qquad w=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial x_1}=0,\ V=0 \qquad (4)$

при $x_2=\pm b$ $\qquad w=0,\ \dfrac{\partial w}{\partial x_2}=0,\ V=0 \qquad (5)$

то есть защемленный контур срединной плоскости принят за нулевой уровень потенциала электрического поля, причем размеры пластинки в плане $l\times 2b$.

Для решения задачи применим приближенный метод Л. В. Канторовича. Для этого обратимся к первому вариационному принципу в теории электроупругости, сформулированному в работе [2]. Этот вариационный принцип в применении к случаю изгиба тонкой прямоугольной пьезоэлектрической пластинки может быть сформулирован следующим образом.

Действительный прогиб срединной плоскости пластинки и действительное распределение потенциала электрического поля срединной поверхности, соответствующие заданной нагрузке и условию закрепления, отличаются от всех возможных прогибов и потенциалов тем, что они сообщают стационарное значение выражению

$$J=[w,\ V]=\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\Bigg\{B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+$$
$$+B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+4B_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2-\frac{1}{4\pi}\frac{4}{h_0}\left[B_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial V}{\partial x_1}+\right.$$
$$\left.+B_{24}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\frac{\partial V}{\partial x_1}+2B_{35}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right]-\frac{4}{h_0^2}\frac{1}{4\pi}\left[B_{44}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\right.$$
$$\left.+B_{55}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2\right]-2qw\Bigg\}dx_1dx_2 \tag{6}$$

Интеграл берется по всей площади пластинки.

Введем безразмерные координаты

$$y_1 = \frac{x_1}{b}, \quad y_1|_{x_1=0} = 0, \quad y_1|_{x_1=l} = 2a$$

$$y_2 = \frac{x_2}{b}, \quad y_2|_{x_2=\pm b} = \pm 1 \tag{7}$$

Тогда система (1) примет вид

$$L_4 w - \frac{1}{4\pi}\frac{2b}{h_0} L_3 V = qb^4$$

$$L_3 w + \frac{2b}{h_0} L_2 V = 0 \tag{8}$$

где все производные в операторах L_k берутся по y_1 и y_2 вместо x_1 и x_2, а функционал (6) запишется в виде

$$J[w,\ V] = \frac{1}{2b^4}\iint\limits_{(S)} \left\{ B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\right)^2 + 2B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} + \right.$$

$$+ B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}\right)^2 + 4B_{33}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2 - \frac{1}{4\pi}\frac{4b}{h_0}\left[B_{14}\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}\frac{\partial V}{\partial y_1} + \right.$$

$$\left. + B_{24}\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}\frac{\partial V}{\partial y_1} + 2B_{35}\frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial V}{\partial y_2}\right] - \frac{1}{4\pi}\frac{4b^2}{h_0^2}\left[B_{44}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\left. + B_{55}\left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)^2 \right] - 2qb^4 w \right\} dy_1 dy_2 \tag{9}$$

В соответствии с методом Л. В. Канторовича приближенное решение системы (8) будем искать в форме

$$w(y_1,\ y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y_1) h_k(y_2)$$

$$V(y_1,\ y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(y_1) H_k(y_2) \tag{10}$$

где $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$—системы линейно-независимых функций, в частности, ортонормированных полиномов, удовлетворяющих, согласно (5), однородным условиям

$$h_k(\pm 1) = h_k'(\pm 1) = 0, \quad H_k(\pm 1) = 0 \tag{11}$$

а $g_k(y_1)$ и $G_k(y_1)$ пока неизвестные функции, подлежащие определению из вариационного принципа.

В качестве полиномов $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$ будем употреблять систему полиномов, построенных Г. Хорви [3], обоснованных и примененных П. Г. Голоскоковым [4]. Ограничимся первым приближением

$$w(y_1,\ y_2) = g(y_1)\,h(y_2) \tag{12}$$

$$V(y_1,\ y_2) = G(y_1)\,H(y_2)$$

и приведем здесь только первые полиномы систем $h_k(y_2)$ и $H_k(y_2)$

$$h(y_2)=\frac{3\sqrt{5\cdot7}}{16}(1-y_2^2)^2 \tag{13}$$

$$H(y_2)=\frac{\sqrt{3\cdot5}}{4}(1-y_2^2)$$

Подставляя (13) в функционал (9) и производя интегрирование по y_2, получим

$$J=\frac{1}{2b^4}\int\limits_0^{2a}\Big\{B_{11}(g'')^2-6B_{12}g''g+\frac{9\cdot7}{2}B_{22}g^2+$$

$$+12B_{33}(g')^2-\frac{1}{4\pi}\frac{4b}{h_0}\Big[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{14}G'g''-$$

$$-\frac{\sqrt{3\cdot7}}{2}B_{24}G'g+\sqrt{3\cdot7}\;B_{35}Gg'\Big]-\frac{1}{4\pi}\frac{4b^2}{h_0^2}\Big[B_{44}(G')^2+$$

$$+\frac{5}{2}B_{55}G^2\Big]-2\sqrt{\frac{7}{5}}qb^4g\Big\}dy_1 \tag{14}$$

Функции $g(y_1)$ и $G(y_1)$ должны сообщать функционалу (14) стационарное значение, что приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$B_{11}g^{\mathrm{IV}}-6(B_{12}+2B_{33})g''+31.5B_{22}g-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{2b}{h_0}\Big[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{14}G'''-\frac{\sqrt{3\cdot7}}{2}(B_{24}+$$

$$+2B_{35})G'\Big]=\sqrt{\frac{7}{5}}qb^4 \tag{15}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}B_{14}g'''-\frac{\sqrt{3\cdot7}}{2}(B_{24}+2B_{35})g'-$$

$$+\frac{2b}{h_0}\Big(B_{44}G''-\frac{5}{2}B_{55}G\Big)=0$$

и граничным условиям, вытекающим из (4)

$$g(0)=g'(0)=0,\quad g(2a)=g'(2a)=0$$

$$G(0)=G(2a)=0 \tag{16}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим прямоугольную пластинку с размерами в сантиметрах

$$0\leqslant x_1\leqslant1,\quad -1\leqslant x_2\leqslant1,\quad h_0=0.1 \tag{17}$$

вырезанную из кристалла бифталата калия, подробно описанного в работе [5]. Кристалл бифталата калия принадлежит к ромбопирамидальному классу ромбической системы. Его материальные константы по отношению к выбранной нами системе координатных осей, измеренные соответственно в единицах $s\left[10^{-12}\dfrac{см^2}{дин}\right]$, $\tau_i[1]$, $g[10^{-8}CGSE]$, будут иметь следующие значения:

$$\begin{gathered} s_{11}=9.27, \quad s_{22}=10.38, \quad s_{33}=9.9, \quad s_{44}=16.05 \\ s_{55}=20.6, \quad s_{66}=13.2, \quad s_{12}=-5.22, \quad s_{13}=-0.62 \\ s_{23}=-3.8, \quad \tau_{11}=0.231, \quad \tau_{22}=0.167, \quad \tau_{33}=0.259 \\ g_{11}=46.6, \quad g_{12}=-133, \quad g_{13}=76.9, \quad g_{26}=27.15, \quad g_{35}=-70.0 \end{gathered} \tag{18}$$

Напомним, что выбранные нами оси x_i параллельны кристаллографическим осям, причем ось x_3 перпендикулярна плоскости кристаллографической симметрии, параллельной срединной плоскости пластинки.

Уравнения (15) с учетом значений (17) и (18) примут вид

$$\begin{gathered} (g^{IV}-9g''+26.8g)\cdot 10^6-(1.22G'''-8.24G')=0.0943q \\ (g'''-6.7g')\cdot 10^6+(704G''-2580G)=0 \end{gathered} \tag{19}$$

Характеристический определитель имеет корни

$$\lambda_{1,2,3,4}=\pm 2.2\pm i0.577, \quad \lambda_{5,6}=\pm 1.91 \tag{20}$$

Записывая общее решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (19) и удовлетворяя граничным условиям (16), получим

$$\begin{gathered} g=[e^{2.2y_1}(-0.766\cos 0.577y_1+0.598\sin 0.577y_1)+ \\ +e^{-2.2y_1}(-2.86\cos 0.577y_1-8.30\sin 0.577y_1)+ \\ +0.0143e^{1.91y_1}-0.097e^{-1.91y_1}+3.52]10^{-9}q \\ G=[e^{2.2y_1}(1.79\cos 0.577y_1+4.50\sin 0.577y_1)+ \\ +e^{-2.2y_1}(-35.7\cos 0.577y_1+25.5\sin 0.577y_1)- \\ -6.02e^{1.91y_1}+40.4e^{-1.91y_1}]10^{-6}q \end{gathered} \tag{21}$$

Подставляя (13) и (21) в (12), найдем искомые функции задачи

$$\begin{gathered} w=\frac{3\sqrt{35}}{16}g(y_1)(1-y_2^2)^2 \\ V=\frac{\sqrt{15}}{4}G(y_1)(1-y_2^2) \end{gathered} \tag{22}$$

Полученные соотношения (22) являются практическими формулами для подсчета прогиба и потенциала любой точки срединной плоскости рассматриваемой пьезоэлектрической пластинки. Зная функции w и V, нетрудно найти и все остальные функции задачи, такие, как деформации, напряжения, вектор электрической индукции и электрического поля, изгибающий момент по контуру защемления, которые характеризуют электроупругое состояние пластинки.

Изложенный метод позволяет рассмотреть поведение пьезоэлектрической пластинки при других видах механических воздействий, например, нагрузки, распределенной по линейному или параболическому закону, сосредоточенной силы и других.

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт им. М. И. Калинина

Поступила 11 XI 1971

Ի. Ա. ՎԵԿՈՎԻՇՉԵՎԱ

ԵԶՐԱԳԾՈՎ ԱՄՐԱՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բարակ պյեզոէլեկտրական սալերի ծռման տեսության հիման վրա լուծված է ամբողջ եզրագծով ամրակցված ուղղանկյունաձև սալի ծռման վերաբերյալ եզրային խնդիրը։

Ձևակերպված է բարակ պյեզոէլեկտրական սալերի ծռման տեսության վարիացիոն սկզբունք, որի օգնությամբ կոնկրետ պյեզոէլեկտրական բյուրեղի համար կատարված է թվային լուծում։

THE BENDING OF A RECTANGULAR PIEZOELECTRIC PLATE FIXED ALONG ITS PERIMETER

I. A. VEKOVISHCHEVA

S u m m a r y

Based upon the theory of bending thin piezoelectric plates, the regional problem on the bending of a rectangular plate, fixed throughout its perimeter, is solved.

A variation principle for the thin piezoelectric plate bending theory is formulated, used to solve numerically the case of a particular piezoelectric crystal.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вековищева И. А.* Теория изгиба тонких пьезоэлектрических пластин. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 4, 1972.
2. *Вековищева И. А.* Вариационные принципы в теории электроупругости. Прикл. механика АН УССР, т. 8, вып. 9, 1971.
3. *Horvay G.* The End Problem of Rectangular Strips. J. Appl. Mech., 20, p. 87, 1953.
4. *Голоскоков П. Г.* Изгиб прямоугольной плиты, жестко заделанной по двум противоположным сторонам. Изв. ВУЗов, Строительство и архитектура, № 11—12, 1959.
5. *Беляев Л. М., Беликова Г. С., Гильварг А. Б., Сильвестрова И. М.* Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства. Кристаллография АН СССР, т. 14, вып. 4, 1969.